This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3433 06907583 0

QA
Mathematische

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

SIEBZEHNTER BAND.

1899.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

[IN WIEN BEI CARL GRAESER & Co.]

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
263653
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1903 L

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

INHALT DES XVII. BANDES.

Abhandlungen.

Seite

1. Paul Stäckel, Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai 1
2. Ludwig Schlesinger, Über das Gauss'sche Pentagramma mirificum. 20
3. Joseph Kürschák, Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung 29
4. A. Onodi, Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven 39
5. A. Onodi, Das subcerebrale Phonationscentrum 70
6. Alois Schuller, Über die richtige Unterscheidung der collectiven und dispansiven optischen Systeme 83
7. L. Klug, Desmische Systeme 95
8. J. Hegyfoky, Die Vertheilung des Niederschlages nach Tageszeiten 113
9. R. von Kövesligethy, Über das Spectrum der Himmelskörper . . 127
10. R. von Kövesligethy, Über die Axendrehung der Fixsterne . . . 166
11. Alex. Mágócsy-Dietz, Das Diaphragma im Marke der dicotylen Holzgewächse 181
12. Gustav Rados, Gruppen inducierter Substitutionen 227
13. Gustav Rados, Über die Factorenzerlegung der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution 248
14. Paul Plósz, Beiträge zur Fettbildung in der Leber 261
15. Alois Schuller, Secundäre Kathodenstrahlen 281
16. Anton Abt, Thermoelektrische Kraft einiger Metalloxyde und Sulfide in Verbindung mit einander und mit einfachen Metallen bei 100° Temperaturunterschied der Berührungsstellen 292
17. Desider Korda, Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleitungsfähigkeit des Eises 313
18. E. Lörenthey, „Andorina" und „Daránya", zwei neue Brachyuren-Gattungen aus Ungarn 328

Sitzungsberichte.

Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

16. Januar 1899 337
13. Februar 1899 337
13. März 1899 337

Seite
17. April 1899 338
15. Mai 1899 340
19. Juni 1899 340
16. Oktober 1899 342
20. November 1899 343
18. Dezember 1899 343

Bericht über die Thätigkeit der Ung. Akademie der Wissenschaften.

Jahresversammlung 1899:
1. Eröffnungsrede des Präsidenten 344
2. Bericht des Generalsecretärs 350
Zur Erinnerung an Géza von Mihalkovics 357

NAMENREGISTER.*

Abt A., Thermoelektrische Kraft einiger Metalloxide und Sulfide in Verbindung mit einander und mit einfachen Metallen bei 100° Temperaturunterschied der Berührungsstellen. 292, 343.

Csorba G., Zur Theorie der additiven Behandlung der ganzen Zahlen. 338.*

Daday E., Freilebende Nematoden aus Neu-Guinea. 342.* — Entomostraceen und Hydrachmiden aus Neu-Guinea. 343.*

Fabinyi R., Über die „Ceracidine" genannten Färbestoffe. 337.*

Filarszky F., Pflanzenmorphologie. 340.*

Gáspár J., Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens. 339. — Beiträge zur Chemie des Klebers. 340. — Die chemische Untersuchung des Weizenklebers. 340.*

Genersich A., Über die Bauchfellcysten. 338.

Grósz E., Die von der Wirbelsäulenschwindsucht herrührende Blindheit. 341.

Györy T., Morbus Hungaricus. 342.*

Hajós L., Zur Histologie der Epilepsie. 337.*

Hankó W., Über die Schwankung der Zusammensetzung der Mineralwässer. 339. — Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens. 339.

Hasenfeld A., Auf welche Art wird die Function des an überwuchernden Klappenfehler leidenden Herzens durch die fette (phosphorige) Entartung der Muskulatur beeinflusst. 342.*

Hegyfoky J., Die Vertheilung des Niederschlages nach Tageszeiten. 113, 338.

Heller A., Bericht über die 1898 in London gehaltene internationale Conferenz über einen math. naturwiss. Katalog. 342.*

Högyes A., Statistik des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1898. 340.* — Neuere Beiträge zur Frage des reflexen Zusammenhanges des Hör- und Sehorganes. 340.*

Hoór M., Neue Methode zur Bestimmung der Rutschung der Inductionsmotoren mit wechselndem Strome. 337.

* Der Stern * bedeutet, dass bloss der Titel der Abhandlung angeführt ist.

Klug L., Desmische Systeme. 95.

Klupáthy E., Kathodenstrahlen in nicht homogenem und magnetischem Rotationsraum. 341.

Kövesligethy R., Über das Spectrum der Himmelskörper. 127. — Über die Axendrehung der Fixsterne. 166, 342.* — Bericht über das Handbuch der astronomischen und mathematischen Geographie. 337.*

Korda D., Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens. 313, 337.

Kürschák J., Über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung. 29.

Laufenauer C., Die Histologie der Haematohydrose. 337.*

Lörenthey E., „Andorina" und „Darányia", zwei neue Brachyuren-Gattungen aus Ungarn. 327.

Mágócsy-Dietz A., Das Diaphragma im Marke der dicotylen Holzgewächse. 181.

Mihalkovics G., Zur Erinnerung an. 357.

Mocsáry A., Die Neuropteren Ungarns. 340.*

Ónodi A., Beiträge zur Kenntniss der Kehlkopfnerven. 39. — Das subcerebrale Phonationscentrum. 70. — Über das Centrum der menschlichen Tonbildung. 337.* — Zur Kenntnis der Nebenhöhlen der Nase. 343.* — Chorea laryngis. 343.*

Plósz P., Beiträge zur Fettbildung in der Leber. — Fettbildung aus Kohlehydraten. 261, 337.*

Rados G., Gruppen inducierter Substitutionen. 227. — Über die Factorenzerlegung der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitution. 248. — Zur Theorie der algebraischen Resolventen. 340.*

Ranschburg P., Zur Psychologie der histerischen motorischen Lähmungen. 337.*

Richter A., Zur Physiologie der Luftwurzeln. 343.*

Schaffer C., Über die Structur des hinteren Bandes des Rückenmarkes. 337.*

Schlesinger L., Über das Gauss'sche Pentagramma mirificum. 20, 341.

Schuler W., Schutzgläser gegen das ultraviolette Licht auf Grund von Studien über Lichtwirkung. 340.* — Die Lichtabsorption durchsichtiger gelber Stoffe. 340*. — Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre. 341. — Ungarische Beiträge zur Augenheilkunde. 343.*

Schuller A., Über die richtige Unterscheidung der collectiven und dispansiven optischen Systeme. 83. — Secundäre Kathodenstrahlen. 281.

Sóbányi J., Vorangehender Bericht über seine hydrographische Studienreise. 337.*

Stäckel P., Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai. 1. — Zur Theorie der imaginären Zahlen in den nachgelassenen Schriften Johannes von Bolyai's. 340.

Staub M., Das Cinnamomum Genus aus der urweltlichen Flora. 339.

Steindl E., Über das neue Parlamentsgebäude in Budapest. 337.*

Szarvasy E., Die Darstellung der Induline auf elektrolytischem Weg. 342.

Szépligeti V., Braceniden aus Neu-Guinea. 343.*

Tangel F., Ein Beitrag zur Kenntniss des Energiegehaltes der menschlichen Nierenausscheidung. 342.

Thanhoffer L., Die Lage des Herzens im Körper. 343.* — Ein neues Hilfsmittel zur Untersuchung des Zusammenhaltens der Zellen. 343.*

Zimányi C., Beiträge zur Kenntniss des Dognácskaer rosenfarbenen Aragonites. 337.*

INDEXED

293693

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

SIEBZEHNTER BAND.

1899.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

[IN WIEN BEI CARL GRAESER & Co.]

1.

DIE ENTDECKUNG DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE DURCH JOHANN BOLYAI.

Auf Grund nachgelassener Aufzeichnungen Johanns dargestellt von

PAUL STÄCKEL,

Ord. Prof. der Mathematik an der Univ. Kiel.

Vorgelegt der ungarischen Akademie in der Sitzung vom 18. Juni 1900 durch das ord. Mitglied *Jul. König*.

In Johann Bolyais Nachlass, dessen Benutzung mir das ev.-ref. Collegium zu Maros-Vásárhely freundlichst gestattet hat, finden sich umfangreiche Aufzeichnungen, in denen Johann über die Entstehung seiner absoluten Geometrie berichtet. Ein Theil davon stammt aus der Zeit zwischen 1833 und 1835, ein andrer aus der Zeit zwischen 1851 und 1860. Da es sich nicht um druckfertige Ausarbeitungen, sondern um Entwürfe, zum Theil auf einzelnen Zetteln, mit zahlreichen Wiederholungen, Einschaltungen, Streichungen handelt, und da die Aufzeichnungen der ersten Periode von heftigen Angriffen auf Johanns Vater Wolfgang wimmeln, die Johann später bereut hat, so erschien ein vollständiger Abdruck nicht angebracht, es ergab sich vielmehr für den Verfasser die Aufgabe, auf Grund dieses Materials und der sonstigen, allerdings recht spärlichen Quellen, die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai im Zusammenhange darzustellen; dabei sind, so weit das irgend möglich war, die Aufzeichnungen Johanns in den Text aufgenommen worden. Als Hauptergebniss lässt sich die Feststellung der Thatsache bezeichnen, dass Johann seine absolute Raumlehre

durchaus selbständig entdeckt und ausgebildet hat. Damit soll nicht geleugnet werden, dass Anregungen seitens seines Vaters WOLFGANG BOLYAI und eines Jugendfreundes KARL SZÁSZ, auf den bereits Herr JOHANN BEDŐHÁZI aufmerksam gemacht hat*, fördernd eingewirkt haben; allein Einflüsse dieser Art bedeuten nicht mehr, als die auslösenden Kräfte des Lichtes und der Wärme bei der Entwickelung organischen Lebens, den Kern der Individualität lassen sie unberührt.

Die erste Anregung zur Beschäftigung mit der Parallelentheorie verdankt JOHANN BOLYAI seinem Vater WOLFGANG, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtete und ihn „auf die Unvollkommenheit der Theorie der Parallelen, der Geraden und anderer Grundlehren aufmerksam machte". Es handelte sich freilich hierbei nur um Andeutungen, die der geniale Vater dem wissenshungrigen Knaben „zuwarf". Einige Aeusserungen dieser Art führt Johann gelegentlich an. „Einst äusserte er, derjenige, der einen Beweis für das elfte Axiom fände, verdiente einen Diamanten, so gross als der Erdball. Ein anderes Mal: dem dieses einst gelingen wird, setzt, Sterbliche, ihm ein ewiges Denkmal".

So kam es, dass JOHANN „durch die ganz eigene Vortrefflichkeit und hohe Wichtigkeit der Aufgabe gereizt" die Parallelentheorie während seines Aufenthalts in der K. K. Ingenieur-Akademie zu Wien (1817—1822) zu seiner „Lieblingsbeschäftigung" machte; daneben hatte er übrigens hochfliegende Pläne, er wollte die ganze Mathematik von den Elementen bis zur Infinitesimalrechnung in einem grossen Werke darstellen, eine Idee, auf die er später zurückgekommen ist, ohne jedoch auch nur das auszuführen, was WOLFGANG in dem Tentamen geleistet hat.

„Zu einem möglichen Beweise des elften Axioms schlug" JOHANN „zuerst den Weg ein, zu beweisen, dass die mit einer Geraden gleichlaufende, das ist davon in einer Ebene überall gleich weit abstehende Linie, auch eine Gerade sei und behufs dessen die Eigenschaften einer solchen Linie für den Gegenfall zu untersuchen"; wir wissen jetzt, dass schon SACCHERI (1733) und LAMBERT

* A két BOLYAI. Maros-Vásárhely 1898. S. 413—414.

(1766) genau denselben Weg betreten hatten.* Im Besondern suchte JOHANN zu zeigen, dass „eine regelmässige Polygonallinie, welche in allen Brechungspunkten von einer Geraden gleich absteht", diese nothwendig schneiden müsse, und traf so mit seinem Vater zusammen, der diese Polygonallinie in seiner „Göttingischen Theorie der Parallelen" betrachtet hatte.**

Als JOHANN im Jahre 1820 seinem Vater von seinen Versuchen, das elfte Axiom zu beweisen, Mittheilung machte, schrieb ihm dieser folgenden merkwürdigen Brief.

„„Versuche die Parallelen auch Du nicht, ich bitte Dich; denn alle Deine Zeit würdest Du dabei verschwenden. Den Satz werdet ihr alle mitsammen nicht beweisen. Versuche die Ergründung der Parallelen weder auf dem mir mitgetheilten noch auf einem andern Wege. Versuche es nicht, nie wirst Du zeigen, dass die obere Gerade von Strecke zu Strecke um gleiche Winkel gegen die untere gedreht, diese je schneiden werde. Ich kenne alle Wege bis ans Ende; ich habe keine Idee angetroffen, die ich nicht schon bearbeitet hätte. Ich durchmaass diese grundlose Nacht, und alles Licht, alle Freude meines Lebens erstarb in ihr. Ich bitte Dich um Gottes Willen! lass ab von der Materie der Parallelen — entsetze Dich davor nicht weniger als vor welch' immer für einem lüderlichen Umgang, sie kann Dich ebenso aller Deiner Zeit, Gesundheit, Ruhe und Deines ganzen Lebensglückes berauben. Jene grundlose Finsterniss verschlingt gar wohl tausend NEWTONsche Riesenthürme. Nie wird sie erhellt auf Erden, und nie wird das arme Menschengeschlecht etwas vollkommen Reines besitzen, auch in der Geometrie nicht. Eine grosse und ewige Wunde ist dies in meiner Seele. Gott bewahre Dich davor, dass dies sich bei Dir jemals so tief einfresse. Dies benimmt einem die Lust zur Geometrie, zum irdischen Leben. Ich hatte mir vorgenommen, mich aufzuopfern für die Wahrheit, und bereit wäre ich gewesen, ein Märtyrer zu werden, um nur die Geometrie von diesem Flecken gereinigt dem menschlichen Geschlechte über-

* STÄCKEL und ENGEL, Die Theorie der Parallellinien von EUKLID bis auf GAUSS. Leipzig 1895.

** Briefwechsel GAUSS-BOLYAI, herausgegeben von SCHMIDT und STÄCKEL. Leipzig 1899. S. 67—78.

geben zu können. Ich habe riesenhafte Arbeiten unternommen, nichts unversucht gelassen. Ich lieferte weit Besseres, als bis dahin geleistet wurde, aber völlige Befriedigung fand ich nicht, da auch hier das: Si paullum a summo discesseris, vergis ad imum Anwendung findet. Als ich einsah, dass der Grund dieser Nacht von der Erde aus nicht erreichbar ist, kehrte ich um, trostlos, mich und das arme Menschengeschlecht bejammernd. Lerne Du an meinem Beispiel. Ich blieb strebend die Parallelen zu erkennen unwissend. Das raubte alle Blüthe meines Lebens und meiner Zeit, ja darin wurzelte der Grund aller meiner nachherigen Fehler, und aus den trüben Wolken häuslicher Verhältnisse regnete es darauf. Hätte ich die Parallelen erfunden, ich würde, wenn es auch Niemand erfahren hätte, ein Engel geworden sein; ich hätte mich aus Verzweiflung weder auf die Dichtkunst noch auf eine Menge anderer Dinge, theilweise Tausendkünstelei, verlegt und wäre überhaupt ein ganz anderer Mensch geworden.““

„„Glaube mir! und lerne jetzt, trachte vorwärts zu kommen, zeichne auf, wo Du nicht verstehst, wo Du Mängel entdeckst, und gehe weiter; sonst kannst Du auf einen Stoff gerathen, der leicht Dein ganzes Leben verschlingt. Uebrigens freut es mich, dass Du die reine Wahrheit so liebst, wie auch zu sehen, dass Du solch' schönes Talent besitzest, womit Du anderwärts es weit bringen kannst, und desto mehr thut es mir leid, wenn Du der Parallelen wegen zu Grunde gehen müsstest. Ich glaube nicht, dass Du dieses besser zu machen im Stande seiest, als ich, so wie ich glaube, dass Du in anderen, höheren Theilen der Wissenschaft mehr leisten könntest als ich. Mache Dich über das, was ich nicht lieferte. Vergeuden wir nicht doppelte Kraft. Was von dem einen schon da ist, arbeite nicht der andere. Die Mängel, die Du in LAGRANGE [Theorie der Functionen] fandest, die sind zu beseitigen.““

„„Zusenden werde ich Dir meine eigenen Versuche, und dann wirst Du Dich davon überzeugen. Wird der Grundsatz angenommen, so ist alles Uebrige darin allerdings gut, aber keines meiner Axiome ist so beschaffen, wie es sein sollte. Unbegreiflich ist es, wie diese unabwendbare Trübung, diese ewige Sonnenfinsterniss, dieser Fleck in der Geometrie hat bleiben müssen,

diese ewige Wolke über der jungfräulich reinen Wahrheit. Ein immer in sich selbst sich zurückdrehender Kreis herrscht in dieser Materie. Ein Fluch liegt darauf — ein beständig hinlockendes Labyrinth — gleich dem Schatzgräber verarmt, der sich hiermit abgiebt, und bleibt unwissend. Du mögest welch' immer für einen scheinbaren Widerspruch herausbringen, es hilft alles nichts, zu einem Grundsatz kannst Du es nachher doch nicht annehmen. Ich setze zum Beispiel, dass man, wenn die Theorie der Parallelen unwahr ist, ein Dreieck oder auch ein Vieleck von beliebiger Seitenzahl bilden könne, dessen gesammte Winkelsumme kleiner als jeder gegebene Winkel ist*, und tausend derlei. Liesse sich nur beweisen, dass für eine wie immer kleine Summe der beiden inneren Winkel zwei Gerade von den Endpunkten einer wie immer langen Strecke sich schneiden müssen, alsdann weiss ich das Uebrige mit Strenge herzuleiten; allein so etwas darf man als Grundsatz nicht annehmen.““

„„Einige meiner neuen Axiome sind so bezaubernd, dass man auf den ersten Anblick geneigt sein könnte, sie für evident zu halten. Sie sind es aber nicht. Es giebt keinen vollkommen einfachen und hinlänglich klaren Grund für solch' eine Wissenschaft als die Geometrie. Hier richtet man mit der Grösse nichts aus, denn hier ist ein Ganzes gleich seinem Theile. So zum Beispiel ist, so wie auch schon $\overline{am} = \overline{bm}$ ist, wenn $u = v$ ist, hier in dieser Lage gleichwohl v ein Stück von u, und der ebenfalls unendliche Streifen $[nabp]$ bleibt übrig. Eben desshalb bin ich auch nicht im Stande zu beweisen, dass, sobald die Parallelentheorie falsch ist, wenn x bis zu 0 abnimmt, ab stets so lang sein kann, dass, obschon cab stets $= x$ ist, ac und bd beide auch unendlich verlängert sich nicht schneiden und dass somit in dem

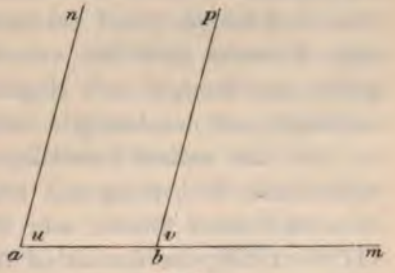


Fig. 1.

* [Vergl. hierzu Gauss' Brief an Wolfgang vom 16. December 1799, Briefwechsel Gauss-Bolyai, S. 36—37.]

zu 0 strebendem Winkel x der zu $2R$ strebende Winkel $2R - y$ und so in $2x$ der Winkel $4R - 2y$ ganz enthalten ist. Und all' dies ist noch nicht genug, aber damit Du nicht etwa versuchst, es auszufüllen, beendige ich es.""

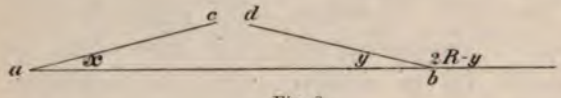


Fig. 2.

„„Wird ein beliebiges meiner Axiome gesetzt, so ist das Uebrige alsdann elegant, lichtvoll und streng in jedem meiner Beweise mit aller Euklidischen Strenge ausgeführt. Aber selbst dazu vermöchtest Du nur nach einem ungeheuren Zeitverluste zu gelangen, was bei mir bereits in aller Vollkommenheit vorhanden ist, aber sich in die Länge ziehend und schwierig. Vielleicht würdest Du auch Dein ganzes Leben damit vergebens zubringen. Mehr als ich würdest Du darin nicht leisten können. Ich drang wohl am tiefsten darein. In diesen Gegenden stehen Herkulessäulen. Gehe keinen Schritt weiter, sonst bist Du verloren!""

Diese „sehr nachdrückliche und kräftige Mahnung, die vielleicht geeignet schiene, selbst dem Kühnsten den Muth für immer zu benehmen", hatte bei JOHANN keinen Erfolg, „indem dadurch", wie er schreibt, „weit entfernt davon abgeschreckt zu werden, mein Interesse dafür nur um so lebhafter wurde, und meine Begierde und Energie nach Möglichkeit um jeden Preis darin durchzudringen auf das heftigste wuchs".

Für die weitere Entwickelung der Ideen JOHANNS wurde von wesentlicher Bedeutung sein freundschaftlicher Verkehr mit einem etwa fünf Jahre älteren, sehr fähigen jungen Mann, KARL SZÁSZ (1798—1853), der damals in Wien Erzieher beim Grafen Alexius Teleki war, ein Verkehr, der freilich nur kurze Zeit dauerte, da SZÁSZ bald, entweder noch im Jahre 1820 oder am Anfange des Jahres 1821, nach Ungarn zurückkehrte und Professor der Rechte am Collegium zu Nagy-Enyed wurde. Bei ihren Gesprächen über die Parallelentheorie, die während der „Sonn- und Feier-, überhaupt Ausgehtage" stattfanden, hatte SZÁSZ einmal „die sehr sinnreiche, echt geometrische und einer richtigen Entwicklung und Darstellungsweise der von dem XI. Axiom unabhängigen Raum-

lehre zur Grundlage dienende Idee, dass wenn die Gerade von einem Punkte [b] durch einen Punkt [c] einer andern Geraden [am] in der durch die beiden bestimmten Ebene um jenen Punkt [b] herumgedreht wird, dieselbe eine Zeit lang die andere Gerade [am] schneidend einmal, nach dem Ausdruck von Szász, **abspringe,** in welcher Lage [bn] er sie die nächste Parallele oder Nichtschneidende nannte". Johann sagte dafür asymptotische Parallele oder Asymptote.

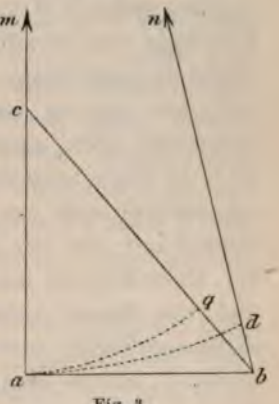


Fig. 3.

Ein anderes Mal stellte Szász die Frage, „ob daraus, dass bn Asymptote von am ist, nicht folge, dass $am = bn$ sei", was Johann „ihm allerdings sofort verneinte". Denn wenn ab auf am senkrecht steht und man immer auf cb von c aus $cq = ca$ abträgt, so wird der Punkt q, indem bc um b bis in die Lage bn gedreht wird, schliesslich in einen Punkt d übergehen, der, sobald abn ein spitzer Winkel ist, von b verschieden ausfällt. „Oberflächlich gesprochen" ist dann „bd der Unterschied der beiden unendlichen Geraden am, bn oder, streng ausgedrückt, die Grenze des Unterschiedes der beiden unendlich werdenden Seiten. Hieraus entstand sofort die Idee einer concreten räumlichen Grenzlinie der Kreisumfänge, wenn der Strahl unendlich wächst, welche gleichsam einen ähnlichen Bezug zu den Kreislinien von endlichen Strahlen und den mit einer geraden Linie gleichlaufenden Linien hat, wie die Parabel zu den Ellipsen und Hyperbeln". Aus diesem Grunde habe er, so behauptet Johann, schon 1823 den später von Gauss vorgeschlagenen Namen Paracykel für die Grenzlinie der Kreisumfänge gebildet.

Weiter berichtet er, dass die beiden Freunde „den engen Zusammenhang der Beschaffenheit dieser Kreislinie von unendlichem Halbmesser mit der Frage nach der Wahrheit des XI. Axioms instinktiv ahnten und nicht daran zweifelten, dass sich das XI. Axiom wohl streng rechtfertigen liesse, sobald es anginge, die Geradheit der Kreislinie von unendlichem Radius darzuthun", und dass sie

sich „eine grosse Fertigkeit darin erwarben, die Unzulänglichkeit der diesfalls nicht genügenden Sätze sogleich zu erkennen.“ „Aber hierbei“, so schliesst JOHANN, „blieben wir auch vollends stehen“.

Als JOHANN seinem Vater von diesen Speculationen Mittheilung machte, verhielt WOLFGANG sich durchaus ablehnend. „Was die Kreislinie vom unendlichem Radius betrifft, die verwarf er gänzlich, indem er sagte, dass davon Euklid das Gesicht abwenden würde, und mir glauben machen wollte, dass jene einem GAUSS und überhaupt jedem ganz gewiss anstössig vorkäme und entbehrlich sei.“ Er fügte noch dringendere Warnungen hinzu. „„Ich gestehe, ich erwarte auch von dem Absprunge Deiner Geraden nichts. Es kommt mir vor, ich habe auch diese Gegenden betreten; ich bin bei allen Klippen dieses höllischen todten Meeres vorbeigefahren und von überall kehrte ich mit zerschmettertem Mastbaum und zerfetzten Segeln zurück, und von da an datiere ich erst die Verderbniss meines Humors und meinen Fall. Unbesonnen setzte ich mein Leben und mein Glück hierauf — aut Caesar aut nihil. Wahrscheinlich hätte NEWTON selbst sein ganzes schätzbares Leben hiermit verschwendet. Ich betrachte dies als ein grosses Unglück. Ich bedauere Dich. Ich sehe, mein unglückliches Leben wiederholt sich in Dir. Ich sehe Dich gleichsam zwischen gefahrvollen Klippen, wo noch ein Jeder Schiffbruch litt, im finstern Sturm hilflos hin und her geschleudert. Es ist ein unheimliches Schlachtfeld, worauf ich jeder Zeit geschlagen wurde; eine allem Streben des Forschergeistes trotzende uneinnehmbare Felsenburg. In dieser Materie ist das ganze Leben nur eine ins Meer getauchte brennende Fackel. Es ist eine wahre Krankheit, eine Art von Narrheit, eine tyrannische Idee. Es ist gleich wie des Cirkels Quadratur, das Suchen des Steins der Weisen, das Goldmachen, das Schatzgraben. Alles dieses, wie ich merke auch die Parallelen bei besseren Köpfen, ist Krankheit. Bald zur Einsicht gelangend, dass Du hierin nichts gethan habest, dürftest Du gleich mir für immer Deine Lust verlieren. Lerne an meinem Beispiel hierin und in Betreff anderer Dinge. Hättest Du es wirklich herausgebracht, so würde ich mich freilich mehr darüber freuen, als über eine Herrschaft. Da ich dieses aber schlechterdings nicht glaube, so fürchte ich, Du verlierst Dein Alles auf eine Lotterie von einer Million gesetzt.““

„„Wäre es mir ehemals geglückt, so wäre ich ein ganz anderer Mensch geworden, weder hätte ich zweimal geheirathet noch mich auf die Gärtnerei, auf die Dichtkunst, noch auf die Hafnerei verlegt, meine verlorene Lust anderswo suchend. Ich wäre moralisch besser geworden und wäre meinem Amte und meinem Haushalte ganz anders vorgestanden. Ist man glücklich, so macht man andere leichter glücklich; was soll aus einer Quelle herausfliessen, die selbst trocken ist? Verliere nicht eine Stunde damit. Keinen Lohn bringt es, und es vergiftet ganz das Leben. Selbst durch das ein Jahrhundert dauernde Kopfzerbrechen von hundert grossen Geometern ist es schlechterdings unmöglich ohne ein neues Axiom zu erweisen. Ich glaube doch alle erdenklichen Ideeen diesfalls erschöpft zu haben.““

„„Hätte GAUSS auch fernerhin seine Zeit mit Grübeleien über das elfte Axiom zugebracht, so wären die Lehre von den Vielecken, seine Theoria motus corporum coelestium und alle seine sonstigen Arbeiten nicht zum Vorschein gekommen, und er ganz zurückgeblieben. Ich kann es schriftlich nachweisen, dass er seinen Kopf über die Parallelen zerbrach. Er äusserte mündlich und schriftlich, dass er fruchtlos darüber nachgedacht habe. Meine Ideen gefielen ihm überhaupt gar sehr, und er machte mich darauf aufmerksam, welch' hochwichtige Sache die Materie der Parallelen sei, obschon er davon doch keineswegs befriedigt war. In den Elementen der Arithmetik und Geometrie war damals GAUSS (übrigens viele Thurm-Etagen über mir erhaben) weniger fest als ich durch mich selbst, aber ihm waren die höheren Rechnungen bereits eine Spielerei, wo ich noch nicht einmal eine Idee davon hatte.““

Die vorstehenden Aeusserungen WOLFGANGS stimmen durchaus überein mit den betreffenden Stellen in seiner Autobiographie vom Jahre 1840 und in seinem Briefe an SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN vom 13. Juli 1856.* Sie werden vervollständigt durch eine Aufzeichnung von JOHANN, die allerdings noch später, jedenfalls erst nach 1856 abgefasst ist.

„In Jena [Herbst 1796] an der Saale spazierend fing er

* Vgl. den Briefwechsel GAUSS-BOLYAI, S. 151—152.

[WOLFGANG] an, sich zu fragen, auf welchem Grunde denn doch sein Wissen beruhe; und da nahm er wahr, dass er eigentlich noch gar nichts gründlich wisse; und da sank er zu seinem unbeschreiblichen Schmerz von einem Fanatismus in Atheismus; welcher unglückliche Zustand jedoch nicht lange dauerte, indem er bald eine weit bessere, reinere Vernunft-Religion bildete. Und nun erst fing er an, sich auf Mathematik zu verlegen und die Gründe davon zu erforschen; suchte klare und allgemeine Begriffe nebst andern Grundlehren von +, —, Multiplication, Division, Potenz, ... gerader Linie und hauptsächlich einen Beweis des elften Euklidischen Axioms. Und fand in der That überall weit Besseres."

„Als er von Jena nach Göttingen kam, traf er mit GAUSS zufällig bei dem Professor SEYFFER zusammen und äusserte sich da freimüthig und entschieden über die Leichtfertigkeit der Behandlung der Mathematik. Kurz darauf begegnete er dem GAUSS am Walle im Spazierengehen. Sie näherten sich einander. Mein Vater sprach unter anderem von seinen Gedanken bezugs einer Erklärung der geraden Linie und der etwaigen Wege zum Beweise des elften Axioms, und der schon damals zum Kolosse in den höheren Regionen der Wissenschaft, besonders der Zahlenlehre, emporgewachsene GAUSS brach ergötzt, überrascht in die lakonischen Worte darüber aus: »Sie sind ein Genie! Sie sind mein Freund!«, worauf sogleich auch das Band der Bruderschaft folgte."

„Uebrigens ist es durchaus irrig, wenn, wie es in dessen durch Herrn Professor SARTORIUS zu Göttingen im Jahre 1856 gelieferten Lebensbeschreibung S. 17 steht, GAUSS geäussert hat, WOLFGANG BOLYAI sei der einzige gewesen, der in seine metaphysische Ansicht der Mathematik einzugehen wusste, indem erstens GAUSS sein ganzes Leben hindurch mit seiner Arbeit, so lange sie nicht im Drucke das Tageslicht erblickte, sehr zurückhaltend war und somit meinem Vater auch gar nicht derlei mittheilte, ausser dass er auf die mitgetheilte Ansicht meines Vaters über die Gerade erwiderte: »Ja wahrlich, die Gerade wird schändlich behandelt; sie ist in der That die Linie, welche sich in sich selbst dreht«. Worauf ich jedoch be-

merke, dass dieser Ausdruck fehlerhaft ist, indem eine gerade Linie sich gar nicht um zwei ihrer Punkte drehen kann. Zweitens hat gerade mein Vater ihm seine Ansicht über die Begründung der Mathematik eröffnet, und allem Anschein nach ist GAUSS selbst dann und dadurch erst näher aufmerksam gemacht worden auf diesen hochwichtigen Gegenstand, was ja auch kein Wunder ist, indem GAUSS sehr früh sich hauptsächlich mit der Zahlenlehre befasst hat, die auch bis ans Ende sein Lieblingsgegenstand blieb, indem er sie, obschon mit Unrecht, Königin der Mathematik nannte."

Gewiss sind JOHANNS Worte, aus denen ein Hass spricht, dessen Feuer unter langjähriger Asche noch immer glomm, nur mit Vorsicht zu benutzen, liefert er doch, indem er GAUSS' Definition der Geraden mittheilt, gegen seinen Willen einen Beweis dafür, dass dieser schon vor seinem Zusammentreffen mit WOLFGANG BOLYAI über die Grundlagen der Geometrie nachgedacht hatte. Allein in Verbindung mit den Aeusserungen seines Vaters lässt sich daraus doch mit Sicherheit schliessen, dass der Gedanke einer in sich begründeten, logisch widerspruchsfreien Raumlehre, die unabhängig von dem elften Axiom gilt, nicht etwa von GAUSS aus durch Vermittelung von WOLFGANG auf JOHANN übertragen, sondern von JOHANN BOLYAI selbständig gefunden worden ist. Ein weiterer Beweis hierfür liegt darin, dass JOHANN in der Zeit nach 1820 zunächst noch ganz von dem Bestreben beherrscht war, einen Beweis für das elfte Axiom zu finden. Indem er die Folgerungen, die sich aus den Annahmen von Asymptoten und Paracykeln ergaben, immer weiter trieb, hoffte er auf einen Widerspruch zu stossen und so die Unzulässigkeit dieser Annahmen zu zeigen. Aus den Briefen an seinen Vater geht hervor, dass er sogar eine Zeit lang geglaubt hat, einen solchen Widerspruch gefunden zu haben, indem er „mit so vielen Geometern des Erdballs das Schicksal hatte, aus Uebereilung eine Lücke zu übersehen und somit zu fallen"*. Als er so „aus seinem falschen und zu frühzeitigem Himmel herabgestürzt" wurde, war er „durch

* Ueber den Beweisversuch selbst werde ich an anderer Stelle ausführlich berichten.

Wahrnehmung seines Fehlers der Wahrheit und dem Ziele, wenigstens in negativem Sinne, um desto näher gerückt", denn er gelangte jetzt zu der Ueberzeugung, „dass man der Natur keinen Zwang anthun, die Natur nach keinen blind gebildeten Hirngespinsten modeln, sondern vernünftiger und natürlicher Weise eben die Wahrheit oder Natur selbst sehen wollen muss und dass man zufrieden sein müsse mit der bestmöglichen Darstellung".

Dass JOHANN sich nunmehr die Aufgabe stellte, die „absolute Raumlehre" in derselben Weise auszubilden, wie das bei der Euklidischen Geometrie bereits geschehen war, ist gewiss begünstigt worden durch den Einfluss seines Vaters WOLFGANG, der „die Unzulänglichkeit seiner eigenen Untersuchungen fühlend und auch dadurch unbefriedigt, zuletzt an der Möglichkeit das elfte Axiom zu beweisen zweifelte". Ja WOLFGANG „behauptete, in der That die Wahrheit erahnend, jedoch ohne Beweis, die Unmöglichkeit das elfte Euklidische Axiom zu beweisen". Mit Recht sagt JOHANN „ohne Beweis", denn WOLFGANG wusste seine Behauptung nur damit zu begründen, „„dass alles dem elften Axiom Widersprechende sich im Unendlichen verbergen könne und dass, wo man zuerst von dem Gesetz des Schnittes (nämlich gerader Linien in einer Ebene) zu handeln beginnt, dieses Gesetz beliebig angenommen durch das Vorhergegangene nicht zerstört werden könne, da darin von dem Gesetze des Schnittes noch nichts enthalten ist, also daraus auch des Schnittes Gesetz nicht abgeleitet werden kann. Die Unwahrheit des elften Axioms und was daraus folgt vertrage sich mit allen sonstigen Sätzen der Geometrie"". In demselben Sinne ist eine Aeusserung WOLFGANGS aufzufassen, die sich in seinem Briefe vom 30. April 1835 an GAUSS findet: „„Ich kann sonst nichts beweisen, als dass sowohl das Sein als das Nichtsein dieses Satzes mit den übrigen Euklidischen Axiomen gleich bestehen könne . . .; welches ich schon seit vielen Jahren her weiss.""

JOHANN betont mit Nachdruck, dass GAUSS sich in seiner Jugend zu der Frage nach der Beweisbarkeit des elften Axioms nicht unbedingt verneinend gestellt habe. „Um so mehr muss man sich wundern", sagt er, „dass ein GAUSS, der doch ohne Zweifel einer der allergrössten Mathematiker aller Zeiten des Erd-

balls ist, sich in einem an meinen Vater als seinem Jugendfreunde gerichteten Briefe noch Hoffnung in dieser Hinsicht machte, indem er sich im Jahre 1804 darüber so äusserte: »Vielleicht wird es mir einst gelingen diese Klippen zu umgehen«".

„Auf diesem Wege", so berichtet JOHANN über den weiteren Verlauf seiner Untersuchungen, „drang ich zwar glücklich vor; da ich jedoch wegen der übrigen Berufsstudien in der Ingenieur-Akademie und später seit meinem Austritte und Dienstantritte [1822] nur einen unbeträchtlichen Theil meiner Zeit dieser meiner Lieblings-Wissenschaft und -Untersuchung widmen konnte, so geschah es, dass ich erst im Jahre 1823 selber dem Wesen nach gänzlich durchdrang, obschon auch nachher manche Vervollkommnungen hinsichtlich Materie und Form hinzukamen". Was JOHANN im Jahre 1823 fand, war der Lehrsatz des § 29 des Appendix, wo es sich darum handelt, die Beziehung zwischen dem Lothe y und dem zugehörigen Parallelwinkel u (in der Bezeichnung von LOBATSCHEFSKIJ $\Pi(y)$) zu finden, eine Relation, die sofort den Zugang zu der ganzen nichteuklidischen Trigonometrie eröffnet. In einem Briefe, den er am 3. November 1823 aus Temesvár an seinen Vater richtete, kündigte er diesem seine Entdeckung an.* „Mein Entschluss steht fest, ein Werk über die Parallelen herauszugeben, sobald ich den Stoff geordnet habe und es die Umstände erlauben; gegenwärtig habe ich es noch nicht, aber der Weg, den ich befolgt habe, hat beinahe sicher das Erreichen des Zieles versprochen; ich habe das Ziel noch nicht, aber ich habe so grossartige Sachen hervorgebracht, dass ich selbst verblüfft war, und dass es ewig schade wäre, wenn sie verloren gingen. Wenn Sie es sehen werden, werden Sie es auch erkennen; jetzt kann ich nur so viel sagen: dass ich aus Nichts eine neue Welt geschaffen habe. Alles was ich früher geschickt habe, ist ein Kartenhaus im Vergleich zu dem Thurme. Ich bin überzeugt,

* Diesen von Herrn Professor MARTIN SCHMIDT in dem Nachlass der BOLYAI im Jahre 1884 aufgefundenen Brief, dessen Original sich in der Bibliothek des Ev.-ref. Kollegiums zu Maros-Vásárhely befindet, habe ich 1897 in deutscher Uebersetzung in den Math. Annalen, Bd. 49, S. 155—156 veröffentlicht. Der ungarische Originaltext wurde 1898 abgedruckt von BEDŐHÁZI, A két BOLYAI, S. 403.

dass es mir nicht minder zur Ehre gereichen wird, als ob ich es schon entdeckt hätte."

WOLFGANG äusserte schon damals den Wunsch JOHANNS Parallelentheorie in sein Tentamen aufzunehmen, dessen Druck er vorbereitete. „Er ertheilte den Rath, dass, wenn es wirklich gelungen ist, mit der öffentlichen Bekanntmachung sich aus einem zweifachen Grunde zu beeilen sei, erstens weil die Ideen leicht in einen andern übergehen, der es sodann eher herausgiebt, zweitens liege auch darin einige Wahrheit, dass manche Dinge gleichsam eine Epoche haben, wo sie dann an mehreren Orten aufgefunden werden; gleichwie im Frühjahr die Veilchen mehrwärts ans Licht hervorkommen und, da alles wissenschaftliche Streben nur ein grosser Krieg ist, worauf ich nicht weiss, wann der Friede folgen wird, so muss man wenn man es vermag siegen, indem hier dem ersten der Vorrang zukommt." Diese Ahnung hat sich in wunderbarer Weise erfüllt: bald darauf betraten TAURINUS und LOBATSCHEFSKIJ denselben Weg wie JOHANN und gelangten ebenfalls zur nichteuklidischen Trigonometrie.

Leider geben uns die Aufzeichnungen JOHANNS über die nächsten Jahre, in denen die „absolute Raumlehre" ihre Ausbildung erhielt, nur spärlichen Aufschluss. Wir erfahren nur, dass er bereits im Jahre 1825 (an einer anderen Stelle sagt er 1826) seinem ehemaligen Lehrer der Mathematik an der Ingenieur-Akademie in Wien dem damaligen Hauptmann, späteren General JOHANN WALTER VON ECKWEHR (1789—1857) „einen schriftlichen Aufsatz übergab, worin bereits der Grund zum Ganzen gelegt wird und der sich wahrscheinlich noch in hochdessen Händen befindet".

Als JOHANN bei einer Zusammenkunft seinem Vater, wahrscheinlich im Jahre 1829, den Entwurf der „absoluten Raumlehre" vorlegte, fand er nicht die unbedingte Anerkennung, auf die er gerechnet hatte, und es kam in Folge dessen zwischen ihnen zu einem bedauerlichen Zerwürfniss, das durch weitere Streitigkeiten verschärft, beiden, die sich im Grunde eng zusammen gehörig fühlten, viele Jahre des Lebens verbittert hat. „Er suchte den Werth auf alle erdenkliche Weise zu schmälern und declamierte mit aller Ereiferung, derer er fähig war, dagegen, wovon ich die Ursache in dem Unvermögen suchte, das Wesen der Sache zu

penetrieren. So zum Beispiel sagte er nach meinen Explicationen mit Geringschätzung, die aber auf ihn zurückfiel, dass dieses nur eine Ausarbeitung des antieuklidischen Systems sei. Gesetzt auch, es wäre nur das gewesen, so wäre es ihm nicht als eine Geringfügigkeit vorgekommen, wenn sein Verstand es heller aufgefasst, sein Gemüth freier gewesen wäre. Auch behauptete er ganz verzweifelt, dass es nur zwei Systeme (denkbar subjective successive) gebe, nämlich entweder das Euklidische oder, wenn dieses nicht ist, ein anderes, worin die Grösse des Parallelwinkels* absolut bestimmt sei, und liess sich diese Idee nicht aus dem Kopfe jagen und konnte es ungeachtet aller meiner auf das möglichst deutliche dargestellten Beweisgründe nicht einsehen, dass es doch unzählig viele hypothetische Systeme geben könne, zwischen welchen man das wahre auszuwählen nicht im Stande ist, indem man zum Beispiel bei ein und derselben Grundlinie ab und demselben einen inneren Winkel bam, bei $bn /\!/\!/ am$, dem andern inneren Winkel abn offenbar von 0 an (ausschliesslich) bis $2R - bam$ (einschliesslich) jede beliebige Grösse geben kann, wie es umständlicher in der Lehre selbst erklärt wird."

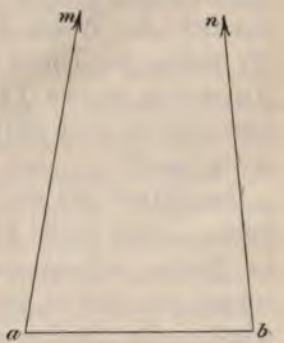


Fig. 4.

„Dass der Buchstabe e in den Ausdrücken häufig erscheint, überraschte ihn, und er fragte noch nach der Durchlesung, ob derselbe nothwendig vorkomme. Ich bejahte es, gab ihm aber auch zu verstehen, dass in derlei Ausdrücken wie zum Beispiel $e^{\frac{a}{i}}$ der Buchstabe e insofern nicht wesentlich ist, als man dafür auch jede andere Länge setzen kann, wenn man nur statt i auch die entsprechende Länge wählt, und darauf fiel seine Freude über das Paradieren des e als eine Spielerei und versetzte darauf: Ja, ja! es dringt sich in diese Lehre e nicht nothwendig auf. Dem-

* [Es verdient, bemerkt zu werden, dass Johann Bolyai an dieser Stelle, die aus der Zeit zwischen 1833 und 1835 stammt, das Wort „Parallelwinkel" gebraucht, das Lobatschefskij in seinen Geometrischen Untersuchungen vom Jahre 1840 ebenfalls anwendet.]

nach hatte er auch von der hohen Wichtigkeit der durch i bezeichneten Länge keine entfernte Idee, hielt es nur für eine Willkürlichkeit." — — —

„Zur Einsicht gelangt, dass hier mit Gründen (Vernunft sowohl als Verstand) nichts auszurichten sei, hoffte ich ihm nunmehr durch Autorität die gebührende Achtung vor den Asymptoten einzuflössen. Ich nannte den Einen GAUSS bemerkend, dass dieser colossale Geometer gewiss nicht nur leicht verstehen, sondern auch Beifall schenken und den wahren Werth davon anerkennen werde, und schlug vor, es diesem grossen Manne zuzusenden."

WOLFGANG ging auf den Vorschlag ein und veranlasste, dass JOHANN „das Wesen der Sache in lateinischer Sprache verfasste." Zu Anfang des Jahres 1831 übergab JOHANN den so entstandenen Appendix seinem Vater, der ihn auf JOHANNS Kosten drucken liess und im Juni 1831 ein Exemplar an GAUSS schickte. Gleichzeitig sandte er nach 16jähriger Pause einen Brief an GAUSS. „„Dem GAUSS gab ich"", meldet er am 17. September 1831 seinem Sohne, „„eine kleine klare Idee von Deiner Arbeit, damit er nicht im Voraus sich grause vor der Materie, aber es fiel mir nicht einmal ein, dass er das Werkchen nicht zugleich mit dem Briefe erhalte. Im Spätherbst werde ich mein Werk (das Tentamen) sowohl Dir als dem GAUSS schicken."" Da das „Werkchen" wegen der Choleraepidemie nicht an GAUSS gelangt war, sandte WOLFGANG im Januar 1832 ein zweites Exemplar, das sich noch gegenwärtig in GAUSS' Nachlass befindet. GAUSS antwortete am 6. März 1832.

„Wenn ich damit anfange", so äusserte er sich über die Arbeit JOHANNS, „dass ich solche nicht loben darf: so wirst Du gewiss einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Aeusserste überrascht".

„Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der

übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderem Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge."

„Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann, und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."

Eine Abschrift der Antwort theilte WOLFGANG seinem Sohne mit und fügte hinzu: „„GAUSSEN's Antwort hinsichtlich Deines Werkes ist sehr schön und gereicht unserem Vaterlande und unserer Nation zur Ehre. Ein guter Freund sagte, es wäre eine grosse Satisfaction."" Ganz anders wirkten GAUSS' Aeusserungen auf Johann. Er konnte und wollte zuerst nicht glauben, dass GAUSS unabhängig von ihm und lange vor ihm ebenfalls zur nichteuklidischen Geometrie gelangt sei, wobei er sich besonders auf dessen schon angeführte Aeusserung vom Jahre 1804 berief: Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt gestatten, und so kam er auf den hässlichen Verdacht, sein Vater habe die im Appendix niedergelegten Ideen an GAUSS verrathen und dieser wolle ihn nun der Priorität, auf jene Ideen gekommen zu sein, berauben.* Aber auch nachdem er sich von der Grundlosigkeit dieser Unterstellung überzeugt hatte, war er keineswegs mit GAUSS' Verhalten ihm gegenüber einverstanden. Dass GAUSS das seinem Vater im Jahre 1804 gegebene Versprechen: „Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen,

* KOLOMAN SZILY, Adatok Bolyai Farkas életrajzához. Értekezések a mathematikai tudományok köréből. Bd. XI. Heft 9. Budapest 1884.

so viel in meinen Kräften steht" dem Sohne nicht erfüllt und JOHANNS Appendix keiner öffentlichen Anerkennung gewürdigt hat, bildete für diesen eine Kränkung, die er nie hat verwinden können. Aus einer längeren Kritik des GAUSS'schen Briefes mögen die folgenden Ausführungen hier mitgetheilt werden.

„Nach meiner und, wie ich fest überzeugt bin, jedes Unbefangenen Ansicht, erscheinen alle von GAUSS angeführten Gründe, warum er von seinen eigenen diesfälligen Arbeiten bei seinen Lebzeiten gar nichts habe wollen bekannt machen, kraftlos und nichtig zu sein, indem es ja in der Wissenschaft, wie im wirklichen Leben selbst, sich stets gerade darum handelt, nothwendige und gemeinnützige, aber noch unklare Dinge gehörig aufzuklären und den noch fehlenden oder vielmehr schlummernden Sinn für Wahrheit und Recht zu wecken, gehörig zu stählen und zu fördern. Der Sinn für Mathematik überhaupt ist ja, zu sehr grossem allgemeinen Schaden und Unheile, leider nur bei wenigen Menschen rege geworden; und aus einem solchen Grunde oder unter einem solchen Vorwande hätte GAUSS consequenter Weise wohl noch einen bedeutenden Theil seiner vortrefflichen Arbeiten für sich behalten müssen. Und der Umstand, dass es leider selbst unter den Mathematikern, und noch dazu unter berühmten derlei, noch viele oberflächliche giebt, kann ja doch für keinen Vernünftigen einen Grund abgeben, demnach fortan nur Oberflächliches und Mittelmässiges zu leisten und die Wissenschaft lethargisch in dem ererbten Zustande zu belassen. Ein derlei Ansinnen könnte nur geradewegs widernatürlich und ein reiner Unsinn genannt werden; und demnach kann es nur um so unangenehmer auffallen, wenn GAUSS auf den Appendix wie auch auf das ganze Tentamen statt seine gerade, biedere, freimüthige Anerkennung des hohen Werthes und Aeusserung seiner hohen Freude und Theilnahme darüber auszusprechen und statt nach der Kunst zu trachten, der guten Sache gebührenden Eingang zu verschaffen, dem vielmehr auszuweichen sich bemühet und sich beeilt in fromme Wünsche und Leidwesens-Aeusserungen über den Mangel an gehöriger Bildung sich zu ergiessen. Darin besteht das Leben und Wirken und Verdienst wahrlich nicht!"

Im Juni 1833 wurde JOHANN BOLYAI als Capitain-Lieutenant pensioniert und kehrte aus seiner Garnison Olmütz nach Maros-Vásárhely zurück. Ueber die geometrischen Untersuchungen, die er von da ab bis zu seinem 1860 erfolgten Tode angestellt hat, soll auf Grund der nachgelassenen Papiere in einer zweiten Note berichtet werden.

2.

UEBER DAS GAUSS'SCHE PENTAGRAMMA MIRIFICUM.

Von LUDWIG SCHLESINGER in Klausenburg.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 19. Juni 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö". (Math. und Naturw. Anzeiger) Band XVII, pp. 526—534.

In dem von SCHERING herausgegebenen GAUSS'schen Nachlasse (Werke, Bd. III, pag. 481 sq.) wird als *Pentagramma mirificum* ein sphärisches Pentagon behandelt, welches (vgl. a. a. O. pag. 495) dahin charakterisiert werden kann, dass seine fünf Diagonalen Quadranten sind. GAUSS gelangt zu dem Ergebnisse, dass die Bestimmung der Ecken eines solchen Pentagons von der Fünftheilung der elliptischen Functionen abhängt.

Da das PONCELET'sche Schliessungsproblem im Falle eines Fünfecks auf die Verfünffachung der elliptischen Functionen führt, ist es von vornherein wahrscheinlich, dass zwischen diesem Probleme und dem Pentagramma mirificum ein Zusammenhang besteht; da ferner die charakteristische Eigenschaft des Pentagramma bei einer beliebigen Biegung der Kugel erhalten bleibt, liegt es nahe, statt der Kugel eine beliebige Fläche von constantem positivem Krümmungsmaasse zu Grunde zu legen. Da, wie es scheint, diese beiden Gesichtspunkte bisher noch nicht hervorgehoben worden sind, und namentlich die Durchführung des letzteren zu einigen Formeln führt, die auch für anderweitige Untersuchungen von Interesse sein können, möge es erlaubt sein, in der vorliegenden Note einige auf das Pentagramma bezügliche Entwickelungen zusammen zu stellen.

I.

Wir legen, wie bereits bei einer früheren Gelegenheit*, für eine Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k den Ausdruck

$$ds = 2\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2}{(p^2 + q^2 + k)^2}}$$

des Linienelementes zu Grunde, dann werden die geodätischen Linien durch die Gleichung**

(1) . . . $\mathfrak{a}(p^2 + q^2 - k) + 2\mathfrak{b}p + 2\mathfrak{c}q = 0,$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt.

Durch einfache Rechnung findet man, dass die zwischen zwei Punkten mit den Coordinaten (p_1, q_1), (p_2, q_2) gemessene Bogenlänge $s_{1,2}$, der durch diese Punkte gelegten geodätischen Linie (der geodätische Abstand der beiden Punkte) durch die Formel

$$\cos\sqrt{k}\, s_{1,2} = \frac{(k - p_1^2 - q_1^2)(k - p_2^2 - q_2^2) + 4k(p_1 p_2 + q_1 q_2)}{(k + p_1^2 + q_1^2)(k + p_2^2 + q_2^2)}$$

gegeben wird, und hiernach erscheint es zweckmässig, neben p, q noch

(2) . . . . . $t = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p^2 - q^2)$

als Homogeneitätscoordinate einzuführen, wodurch, wenn

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p_1^2 - q_1^2),$$

$$t_2 = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p_2^2 - q_2^2)$$

gesetzt wird, der obige Ausdruck die elegante Gestalt

(3) . . $\cos\sqrt{k}\, s_{1,2} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2 + t_1 t_2}{\sqrt{p_1^2 + q_1^2 + t_1^2}\,\sqrt{p_2^2 + q_2^2 + t_2^2}}$

annimmt, wie man mit Rücksicht auf die Identität

$$4k(t^2 + p^2 + q^2) = (k + p^2 + q^2)^2$$

leicht erkennt.

---

* Handbuch der Theorie der lin. Differentialgleichungen, Band II, 2. (Leipzig, 1898), pag. 95.

** a. a. O. pag. 97, Gleichung (7).

Da die Quotienten

$$\frac{p}{t}, \frac{q}{t}$$

im Wesentlichen mit den sogenannten BELTRAMI'schen Coordinaten übereinstimmen (CRELLE's Journal, Bd. 121, pag. 174), wollen wir (p, q, t) als *homogene BELTRAMI'sche Coordinaten* bezeichnen.

Der Uebergang von dem Coordinatensysteme (p, q) zu einem ebenso beschaffenen (p', q') d. h. zu einem solchen, in welchem der Ausdruck für das Linienelement wieder

$$2\sqrt{\frac{dp'^2 + dq'^2}{(p'^2 + q'^2 + k)^2}}$$

ist, entspricht einer Verschiebung der Fläche in sich selbst, also (vergl. Handbuch, II, 2, pag. 101) einer auf die complexe Grösse

$$\eta = p + qi$$

auszuübenden projectiven Substitution, die den Ausdruck

$$p^2 + q^2 + k$$

von einem positiven Factor abgesehen ungeändert lässt. Interpretieren wir (p, q) als rechtwinkelige Coordinaten in einer Ebene, so lässt sich bekanntlich jede projective Substitution von η als Aufeinanderfolge zweier *Spiegelungen* in Bezug auf Kreise dieser Ebene darstellen.* Wenn diese beiden Kreise insbesondere den Kreis

$$p^2 + q^2 + k = 0$$

rechtwinkelig schneiden, so ist die resultierende projective Substitution eine Verschiebung in dem a. a. O. charakterisierten Sinne (vergl. Handbuch, Band II, 2, pag. 87). Eine Spiegelung in Bezug auf einen solchen Kreis, d. h. in Bezug auf einen Kreis, dessen Gleichung die Form (1) oder, wie wir jetzt, mit nicht in Betracht kommender Beschränkung der Allgemeinheit, schreiben wollen,

$$p^2 + q^2 - k + 2\alpha p + 2\beta q = 0$$

besitzt, wird durch die Formeln:

---

* POINCARÉ, Acta Mathem. III, pag. 51.

$$p' + \alpha = (p + \alpha)\frac{k + \alpha^2 + \beta^2}{(p+\alpha)^2 + (q+\beta)^2},$$
$$q' + \beta = (q + \beta)\frac{k + \alpha^2 + \beta^2}{(p+\alpha)^2 + (q+\beta)^2}$$

dargestellt. Diese Formeln lassen sich in homogenen BELTRAMI'schen Coordinaten so schreiben:

$$(4)\quad \begin{cases} \varrho p' = \dfrac{k+\beta^2-\alpha^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p - \dfrac{2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho q' = \dfrac{-2\alpha\beta}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{k+\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \\ \varrho t' = \dfrac{2\alpha\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,p + \dfrac{2\beta\sqrt{k}}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,q + \dfrac{\alpha^2+\beta^2-k}{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}\,t, \end{cases}$$

woselbst

$$\varrho = \frac{\sqrt{k+\alpha^2+\beta^2}}{(p+\alpha)^2+(q+\beta)^2},$$
$$t' = \frac{1}{2\sqrt{k}}(k - p'^2 - q'^2)$$

gesetzt wurde. Die rechten Seiten von (4) liefern eine symmetrische orthogonale Substitution von der Determinante -1, und zwar gleich in der Form, die sich aus der bekannten EULER'schen Parameterdarstellung (vergl. z. B. BALTZER, Determinanten, 5. Aufl., pag. 194) durch Specialisierung ergiebt.

Durch Composition zweier Substitutionen von der Form (4) erhalten wir demnach die allgemeinste Transformation eines Systems homogener BELTRAMI'scher Coordinaten in ein anderes, oder q. i. e. die Darstellung der allgemeinsten Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k in sich selbst. Da dieselbe für die Quotienten

$$\frac{p}{t}, \frac{q}{t}$$

offenbar eine projective Substitution ist und überdies nur die Bedingung zu erfüllen hat, dass sie den Kreis

$$p^2 + q^2 + k = 0$$

oder

$$p^2 + q^2 + t^2 = 0$$

nicht verändert, so erkennt man a priori, dass diese Transformation, abgesehen von einem Proportionalitätsfactor, einer auf p, q, t aus-

zuübenden orthogonalen Transformation u. zw. der allgemeinsten solchen Transformation gleich kommen muss. Dies kann man auch aus den Formeln (4) verificieren und erkennt zugleich, dass die resultierende orthogonale Transformation die Determinante 1 besitzt; das letztere hängt mit dem Umstande zusammen, dass (vergl. Handbuch, Band II, 2, pag. 90) eine projective Substitution von $p + qi$, die sich aus Spiegelungen von der Art wie (4) zusammensetzt, stets eine *positive* ist. Wir fassen dies letztere Ergebniss in den folgenden Satz:

Eine Verschiebung der Fläche vom constanten Krümmungsmaasse k stellt sich in homogenen Beltrami'schen Coordinaten in der Form

$$(5) \quad \ldots \ldots \begin{cases} \varrho p' = \alpha_{11} p + \alpha_{12} q + \alpha_{13} t, \\ \varrho q' = \alpha_{21} p + \alpha_{22} q + \alpha_{23} t, \\ \varrho t' = \alpha_{31} p + \alpha_{32} q + \alpha_{33} t, \end{cases}$$

dar, wo die (α_{ik}) die Elemente einer orthogonalen Transformation mit der Determinante $+1$ bedeuten, und

$$\varrho^2 = \frac{p^2 + q^2 + t^2}{p'^2 + q'^2 + t'^2}$$

ist; einer Spiegelung in Bezug auf eine geodätische Linie

$$p^2 + q^2 - k + 2\alpha p + 2\beta q = 0$$

entspricht dagegen die symmetrische orthogonale Transformation (4) *mit der Determinante* -1.

Dieser Satz ist von Wichtigkeit, wenn man in einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Classe, deren homogene Monodromiegruppe eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems und seinen conjugierten Werthen gebildete bilineare Form ungeändert lässt, den realen Theil und Coëfficienten von i des Integralquotienten gesondert untersucht. Ich hoffe darauf an anderer Stelle zurückkommen zu können.

II.

Es sei nun die Krümmung k unserer Fläche gleich Eins. Wir nehmen auf derselben fünf Punkte

$$(p_i, q_i, t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

von der Beschaffenheit, dass die Diagonalen des von diesen Punkten gebildeten Pentagons Quadranten sind, d. h. also, wenn (i, k) den geodätischen Abstand der durch die Coordinatenindices i, k charakterisierten Punkte bedeutet, so ist

$$(i, i+2) = \frac{\pi}{2}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

wo die Indices, wie auch stets im Folgenden, modulo 5 zu reducieren sind. Mit Rücksicht auf die Formeln (3) der Nr. I haben wir demnach

$$(1) \quad \ldots \quad p_i p_{i+2} + q_i q_{i+2} + t_i t_{i+2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Ein solches Fünfeck nennen wir mit GAUSS ein *Pentagramma mirificum.*

Interpretieren wir (p, q, t) als homogene CARTESIUS'sche Coordinaten in einer Ebene, so besagen die Gleichungen (1), dass die fünf Punkte

$$(p_i, q_i, t_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

ein *Polfünfeck* in Bezug auf den Kegelschnitt C

$$p^2 + q^2 + t^2 = 0$$

constituieren, d. h. ein Fünfeck, in welchem jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist. Legen wir durch die fünf Punkte einen Kegelschnitt C_1 und construieren dessen Polarfigur C_2 in Bezug auf C, so ist das betrachtete Fünfeck dem Kegelschnitte C_1 eingeschrieben und dem Kegelschnitte C_2 umschrieben. D. h.:

*Einem Pentagramma mirificum entspricht stets ein ebenes Poncelet'sches Schliessungsproblem für den Fall eines Fünfecks.**

Die Kegelschnitte C_1, C_2 haben die Eigenschaft, dass die Gleichung des einen in Punktcoordinaten mit der Gleichung des anderen in Liniencoordinaten übereinstimmt, sie werden also simultan auf ihre Hauptaxen transformiert. Gehen wir nun von (p, q, t) zu einem anderen System (u, v, w) homogener BELTRAMI'scher Coordinaten über, d. h. setzen wir (u, v, w) proportional

* Vergl. GUNDELFINGER, Vorlesungen aus der analyt. Geometrie der Kegelschnitte (1895), pag. 423, auf welche Stelle der Herr Verfasser mich während der Drucklegung der vorliegenden Note brieflich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

den rechten Seiten einer orthogonalen Transformation der (p, q, t), so können wir diese orthogonale Transformation in sehr bekannter Weise so einrichten, dass die Gleichung des Kegelschnitts C_1 in (u, v, w) die Form

$$s_1 u^2 + s_2 v^2 + s_3 w^2 = 0$$

erhält; die Gleichung von C_2 lautet dann

$$s_2 s_3 u^2 + s_3 s_1 v^2 + s_1 s_2 w^2 = 0.$$

Die eventuell möglichen singulären Fälle lassen wir der Einfachheit halber beiseite. Da wir es naturgemäss in C_1 mit einem realen Kegelschnitt zu thun haben, sind von den Grössen s_1, s_2, s_3 etwa zwei positiv, die dritte negativ; sei die Bezeichnung so gewählt, dass

$$s_3 < 0,\ s_1 > 0,\ s_2 > 0.$$

Wir schreiben dann die Gleichungen von C_1, C_2 in der Form

$$\frac{u^2}{A^2} + \frac{v^2}{B^2} - w^2 = 0,$$
$$A^2 u^2 + B^2 v^2 - w^2 = 0,$$

und können offenbar, ohne dadurch die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken,

$$A > B > 1$$

voraussetzen. C_1, C_2 sind dann concentrische und coaxiale Ellipsen, von denen C_2 ganz innerhalb C_1 liegt.

Führen wir in der bei der Behandlung des Schliessungsproblems gebräuchlichen Weise* die zu der Ellipse C_2 gehörige excentrische Anomalie durch die Gleichungen

$$u = wA \cos \varphi,$$
$$v = wB \sin \varphi$$

ein und bezeichnen durch φ_i den dem Punkte (p_i, q_i, t_i) entsprechenden Werth von φ, so lauten die den Gleichungen (1) entsprechenden Gleichungen zwischen den neuen Bestimmungsstücken der fünf Punkte:

$$(2) \qquad A^2 \cos \varphi_i \cos \varphi_{i+2} + B^2 \sin \varphi_i \sin \varphi_{i+2} + 1 = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

* Rosanes und Pasch, Crelles Journal, Bd. 64, pag. 129.

Man kann diesen Gleichungen auch die von JACOBI* benützte Form geben, indem man an Stelle von φ_{i+2} die der Ellipse C_2 entsprechende excentrische Anomalie

$$\psi_{i+2} = \pi + \varphi_{i+2}$$

desjenigen Punktes von C_2 einführt, in welchem die der Ecke (p_i, q_i, t_i) des Fünfecks gegenüberliegende Seite den Kegelschnitt C_2 berührt; wir wollen aber der Einfachheit wegen die Form (2) beibehalten.

Verbindet man mit der Gleichung (2) die in demselben Systeme enthaltene Gleichung

$$A^2 \cos \varphi_{i+2} \cos \varphi_{i-1} + B^2 \sin \varphi_{i+2} \sin \varphi_{i-1} + 1 = 0,$$

so erhält man durch Elimination die von GAUSS** aufgestellten Relationen

$$-B^2 \sin \varphi_{i+2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_{i-1})},$$

$$-A^2 \cos \varphi_{i+2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\varphi_{i-1} + \varphi_i)}{\cos \frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_{i-1})},$$

woraus sich durch Division die von JACOBI bei der Behandlung des Schliessungsproblems*** angewandte Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_i + \varphi_{i-1}) = \frac{B^2}{A^2} \operatorname{tg} \varphi_{i+2}$$

ergiebt. Setzt man nunmehr†

$$k^2 = \frac{A^4 - B^4}{A^4 - 1} < 1,$$

$$x = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varphi = \operatorname{am} x,$$

$$\frac{1}{A^4} = \cos^2 \operatorname{am} \tau, \qquad \frac{B^4}{A^4} = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \tau,$$

$$\varphi_i = \operatorname{am} x_i, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

so nimmt die Gleichung (3) die Form an:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\operatorname{am} x_i + \operatorname{am} x_{i-1}) = \Delta \operatorname{am} \tau \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} x_{i+2},$$

---

* Werke, Bd. I, pag. 284.

** a. a. O., pag. 489, art. [7].

*** a. a. O., pag. 285.

† GAUSS, a. a. O. pag. 490.

und hieraus folgt, wie bei JACOBI, durch Vergleichung mit der aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Formel

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (\operatorname{am} x + \operatorname{am} (x + 2\tau)) = \Delta \operatorname{am} \tau \,.\, \operatorname{tg} \operatorname{am} (x + \tau),$$

die Darstellung

$$\varphi_{i-1} = \operatorname{am} (x_i + 2\tau), \quad \varphi_{i+2} = \operatorname{am} (x_i + \tau),$$

also abgesehen von Vielfachen von 2π,

$$\varphi_{2i+1} = \operatorname{am} (x_1 + i\tau) \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Nehmen wir, um die Vorstellung zu fixieren, an, dass das betrachtete Fünfeck ein convexes sei, so hat man, wenn man die Ecken in der Reihenfolge

$$1, 3, 5, 2, 4, 1$$

durchläuft, die excentrische Anomalie φ_1 um 4π vermehrt, es ist also

$$\operatorname{am} (x_1 + 5\tau) = \operatorname{am} x_1 + 4\pi,$$

woraus sich

$$\tau = \frac{8K}{5}$$

ergiebt. Wir finden demnach bei dieser Annahme in Uebereinstimmung mit GAUSS

$$\varphi_i = \operatorname{am} \left(x_1 + (i - 1)\frac{4K}{5}\right).$$

Die von GAUSS aufgestellten Formeln ergeben sich nun durch einfache Rechnung.

Klausenburg, 1. Juni 1899.

3.

UEBER DIE TRANSFORMATION DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER VARIATIONSRECHNUNG.

Von Dr. JOSEF KÜRSCHAK,

corr. Mitgl. der ungarischen Academie der Wissenschaft, Professor am kön. ung. Josefs-Polytechnicum zu Budapest.

Vorgelegt der Academie in der Sitzung vom 15. Mai 1899.

Aus: „Mathematikai és Természettudományi Értesitö" (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger der Academie), Band XVII, pp. 457—466.

1. Diese Abhandlung beschäftigt sich mit der Frage, ob die Differentialgleichungen der Variationsrechnung durch die Berührungstransformationen wieder in Differentialgleichungen der Variationsrechnung überführt werden. Ich beweise wenigstens für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dass diese Frage zu bejahen ist. Eine Untersuchung der Differentialgleichungen höherer Ordnung würde zweifellos zu demselben Resultate führen, aber ein strenger analytischer Beweis scheint mir in diesem Falle umständlich zu sein.

2. Es mögen

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k} \qquad (k = 1, 2 \ldots, n)$$

und

$$p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots, n)$$

die Ableitungen erster resp. zweiter Ordnung der unbekannten Function z bedeuten; f sei eine lineare Verbindung von

$$| p_{ik} | \qquad (i, k = 1, 2 \ldots, n)$$

und deren Subdeterminanten mit Coefficienten, die bloss von

$$z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n$$

abhängen.

Soll die erste Variation von

$$I = \int\int \ldots \int f dx_1 dx_2 \ldots dx_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

verschwinden, so muss z der partiellen Differentialgleichung

$$V(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{dx_i dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = 0, \quad . \quad . \quad (2)$$

genügen, wo bei der mit $\frac{d}{dx_k}$ bezeichneten Differentiation zu berücksichtigen ist, dass auch z und deren Ableitungen x_k enthalten.

Die Differentialgleichung $V(f) = 0$ ist — wie wir sehen werden — von der zweiten Ordnung, und zwar hat ihre linke Seite dieselbe Beschaffenheit wie f, nämlich sie ist ebenfalls eine lineare Verbindung von

$$\underset{(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ n)}{|\ p_{ik}\ |}$$

und deren Subdeterminanten mit bloss von den unabhängigen Variablen, und von z und den ersten Ableitungen abhängigen Coefficienten. Wenigstens für 1, 2 und 3 unabhängige Veränderliche ist auch bekannt*, dass, wenn die Coefficienten von f beliebig sind, $V(f) = 0$ die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Variationsrechnung bedeutet.

Wenden wir nun auf $V(f) = 0$ die Berührungstransformation

$$\begin{aligned} z' &= Z(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n) \\ x_1' &= X_1,\ \ldots,\ x_n' = X_n,\ p_1' = P_1,\ \ldots,\ p_n' = P_n \end{aligned} \quad (3)$$

an, indem wir die Transformation in bekannter Weise mit den Gleichungen

$$p_{ik}' = P_{ik}(z,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n,\ p_{11},\ \ldots,\ p_{nn}) \quad . \quad (3^*)$$
$$(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

erweitern**, und dann $V(f)$ in den neuen Veränderlichen ausdrücken.

---

* Arthur Hirsch. Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung, *Mathematische Annalen*, Bd. 49.

** Lie, Theorie der Transformationsgruppen. Bd. II, pp. 378—383.

Aus I ergiebt sich ebenfalls ein *transformiertes* Integral, wenn man an Stelle von

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

das Product

$$\sigma^{-1} dx_1' dx_2' \ldots dx_n'$$

setzt, wo

$$\sigma = \left| \frac{dX_i}{dx_k} \right|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und dann $\bar{f} = f\sigma^{-1}$ (und die Grenzen des Integrals*) in den neuen Veränderlichen ausdrückt.

In dem transformierten Integrale

$$I = \int\int \ldots \int \bar{f} dx_1' dx_2' \ldots dx_n'$$

hat $\bar{f}$ wieder die Beschaffenheit von f.

Wird die Transformation als Einführung neuer Coordinaten betrachtet, so lässt sich vermuthen, dass die in Angriff genommene Frage mit folgendem Satze beantwortet werden kann:

Die dem ursprünglichem Integrale I entsprechende Differentialgleichung $V(f) = 0$ wird durch die Berührungstransformation in eine Differentialgleichung überführt, die sich nur durch einen unwesentlichen Factor von jener unterscheidet, die bei der Variation des transformierten Integrales zu lösen ist.

Wir brauchen also nur diesen Satz zu beweisen.

3. Vor allem entwickeln wir $V(f)$ ausführlich.

Die aus den zweiten Ableitungen p_{ik} gebildete Determinante und jede ihrer Subdeterminanten lässt sich als eine Functionaldeterminante

$$D_0 = \left| \frac{dU_\nu}{dx_\pi} \right| \qquad (\nu, \pi = 1, 2, \ldots, n)$$

darstellen, in der die U_ν bloss von

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$$

abhängen. Für

---

* Dazu ist allerdings nothwendig, dass für jede Stelle $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ der Begrenzung auch die Werthe von z und den ersten Ableitungen bekannt seien.

$$\left| p_{\nu\pi} \right|_{\substack{(\nu = i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r) \\ (\pi = k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_r)}}$$

ist

$$U_{i_1} = p_{k_1},\ U_{i_2} = p_{k_2},\ \ldots,\ U_{i_r} = p_{k_r},$$

und die übrigen U_ν sind je einem x gleich.

Bezeichnen wir in f den Coefficienten von D_0 mit U_0, *so ist f eine Summe von Gliedern von der Form $U_0 D_0$, wo D_0 die dem Elemente U_0 adjungierte Subdeterminante von*

$$\left| U_\nu \frac{dU_\nu}{dx_1} \frac{dU_\nu}{dx_2} \cdots \frac{dU_\nu}{dx_n} \right|_{(\nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)} \quad \ldots\ldots\ (4)$$

bedeutet; und $V(f)$ ist die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$.

Bei der Berechnung von $V(U_0 D_0)$ hat man

$$\frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}, \quad \ldots\ (5)$$

wo $D_{0\nu}^{(k)}$ die zu $\frac{dU_\nu}{dx_k}$ adjungierte Subdeterminante von D_0 bezeichnet. Hier kann man die Reihenfolge von $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{d}{dx_k}$ vertauschen, also ist:

$$U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} = \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \right) - U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{dD_{0\nu}^{(k)}}{dx_k} - D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{dU_0}{dx_k}.$$

Ferner hat man nach einem bekannten Satze über Functionaldeterminanten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dD_{0\nu}^{(k)}}{dx_k} = 0.$$

Folglich ist

$$\sum_{k=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

wo

$$D_\nu = -\sum_{k=1}^{n} D_{0\nu}^{(k)} \frac{dU_0}{dx_k}$$

die zu U_ν adjungierte Subdeterminante von (4.) bedeutet.

Wird dies in der Formel (5.) in Betracht gezogen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z}. \qquad (6)$$

Ferner ist

$$\frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial p_k}. \qquad (7)$$

Hier kann die Reihenfolge von $\frac{\partial}{\partial p_k}$ und $\frac{d}{dx_i}$ nicht vertauscht werden, sondern es ist

$$\frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} = \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U_\nu}{\partial z} + p_{i1} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_1} + \cdots + p_{in} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_n} \right) =$$

$$= \frac{d}{dx_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik} \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

wo δ_{ik} nur dann verschwindet, wenn $i \gtrless k$, hingegen für $i = k$ wird $\delta_{ik} = 1$. Also ist

$$U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} = U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{d}{dx_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} =$$

$$= \frac{d}{dx_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) - D_{0\nu}^{(i)} \frac{d U_0}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} -$$

$$- U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \frac{d D_{0\nu}^{(i)}}{d x_i} + \delta_{ik} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

folglich

$$\sum_{i=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}.$$

Dies ergiebt in (7.) eingesetzt:

$$\frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}. \qquad (8)$$

Endlich ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\delta_{ik})\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}},$$

und da

$$(1+\delta_{ik})\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \sum_{\nu=0}^{n}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_i}\right),$$

so hat man

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\frac{\partial(U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{d^2}{dx_i dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right). \qquad (9)$$

Aus den Formeln (6.), (8.) und (9.) erhalten wir:

$$V(U_0 D_0) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)\right). \qquad (10)$$

Hieraus ist bereits ersichtlich, dass in $V(U_0 D_0)$ höchstens die Ableitungen bis zur dritten Ordnung auftreten.

Dass auch die Ableitungen dritter Ordnung fehlen, ergiebt sich durch folgende Rechnung.

Es bezeichne $D_{\nu\pi}^{(i)}$ die zu $\frac{dU_\pi}{dx_i}$ adjungierte Subdeterminante von D_ν. Dann ist

$$\delta_{ik} D_\nu = \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{dU_\pi}{dx_k} \qquad \frac{dD_\nu}{dx_k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d^2 U_\pi}{dx_i dx_k},$$

wo $^{(\nu)}$ andeutet, dass π nur von ν verschiedene Werthe annimmt. Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir:

$$\frac{d}{dx_k}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right) = \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dD_\nu}{dx_k} + \sum_{i=1}^{n}\delta_{ik} D_\nu\frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D_{\nu\pi}^{(i)}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{d^2 U_\pi}{dx_i dx_k} + \frac{dU_\pi}{dx_k}\frac{d}{dx_i}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}\right).$$

und

$$\frac{d}{dx_k}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)} \frac{d}{dx_i}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}\right),$$

wo bereits in Betracht gezogen ist, dass

$$D_{\nu\pi}^{(i)} = -\,D_{\pi\nu}^{(i)}.$$

Also ist

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\, D_{\nu\pi}^{(i)} \frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi], \quad (11)$$

wo $[U_\nu,\ U_\pi]$ den POISSON'schen Klammerausdruck

$$[U_\nu,\ U_\pi] = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\pi}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial U_\pi}{\partial z}\right) - \frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_k} + p_k\frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right)\right)$$

bedeutet.

Die definitive Form von $V(U_0 D_0)$ ist also:

$$V(U_0 D_0) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \tfrac{1}{2}\sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)}\sum_{i=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi]\right). \quad (12)$$

Hier unterscheidet sich D_ν höchstens dem Vorzeichen nach von der aus den Matricen

$$\left\| \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial U_\lambda}{\partial z} \cdots \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial U_\lambda}{\partial z}\ \frac{\partial U_\lambda}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial U_\lambda}{\partial p_n} \right\|_{(\lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ \nu-1,\ \ldots,\ n)}$$

$$\left\| \frac{dx_\mu}{dx_1}\cdots\frac{dx_\mu}{dx_n}\, p_{\mu 1}\cdots p_{\mu n} \right\|_{(\mu = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)}$$

componierten Determinante. Nach dem Determinanten-Satze von BINET und CAUCHY hat also D_ν die Beschaffenheit wie f. Aehnliches gilt auch von

$$\sum_{i=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(i)}\frac{d}{dx_i}[U_\nu,\ U_\pi],$$

indem dieser Ausdruck aus D_ν sich dadurch bilden lässt, dass statt U_π

$$[U_\nu, U_\pi]$$

gesetzt wird.

Auf diese Weise hat jedes $V(U_0 D_0)$, also auch $V(f)$, die Beschaffenheit wie f.

4. Untersuchen wir nun die Wirkung der Berührungstransformation (3.) auf $V(U_0 D_0)$.

Gemäss der Definition der Berührungstransformationen ist

$$dZ - \sum_{k=1}^{n} P_k dX_k = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k \right), \quad . \quad . \quad (13)$$

wo der Factor ϱ bloss von

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$$

abhängt. Derselbe Factor spielt auch bei der Transformation des POISSON'schen Klammerausdruckes eine Rolle. Es ist nämlich*

$$[\varphi, \psi] = \varrho [\varphi, \psi]' \quad [\varphi, \psi] - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\varrho \varphi, \psi]' - \varrho \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z'},$$

wo $[\varphi, \psi]'$ den bezüglich der neuen Variablen gebildeten Klammerausdruck bedeutet.

Z. B. für $\varphi = 1$ und $\psi = U_\nu$ hat man

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu, \varrho]' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Das Verhalten von D_ν giebt die Formel

$$D_\nu = \sigma D'_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

an, wo

$$\sigma = \left| \frac{dx_i}{dx_k} \right|, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

und D'_ν die zu U_ν adjungierte Subdeterminante von

$$\left| U_\nu \frac{dU_\nu}{dx'_1} \frac{dU_\nu}{dx'_2} \cdots \frac{dU_\nu}{dx'_n} \right| \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

bedeutet.

---

* LIE, l. c., pp. 123 und 276.

Aus (14) und (15) folgt:

$$D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \sigma D'_\nu \left(\varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu, \varrho]' \right). \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wenn wir noch die zu $\frac{dU_\pi}{dx'_i}$ adjungierte Subdeterminante von D'_ν mit $D'^{(i)}_{\nu\pi}$ bezeichnen, so ergiebt sich

$$\sum_{i=1}^{n} D^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{dx_i} = \sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{dx'_i} = \sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d\varrho[U_\nu, U_\pi]'}{dx'_i},$$

das heisst

$$\sum_{i=1}^{n} D^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]}{dx_i} =$$

$$= \varrho\sigma \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]'}{dx'_i} + \sigma [U_\nu, U_\pi]' \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d\varrho}{dx'_i}. \quad (17)$$

Folglich ist $V(U_0 D_0)$ in den neuen Veränderlichen ausgedrückt gleich der Summe von

$$\varrho\sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{dz'} - \tfrac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]'}{dx'_i} \right) \quad (18)$$

und

$$\sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu [U_\nu, \varrho]' - \tfrac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu U_\pi]' \frac{d\varrho}{dx'_i} \right). \quad (19)$$

Der zweite Theil verschwindet. Es ist nämlich

$$\tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu, U_\pi]' = \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{dU_\pi}{dx'_k} - \frac{\partial U_\pi}{\partial p'_k} \frac{dU_\nu}{dx_k} \right) =$$

$$= \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{dU_\pi}{dx'_k} + \tfrac{1}{2} D'^{(i)}_{\pi\nu} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\pi}{\partial p'_k} \frac{dU_\nu}{dx'_k},$$

und hieraus

$$\tfrac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu, U_\pi]' = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n}{}^{(\nu)} D'^{(i)}_{\nu\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} \frac{dU_\pi}{dx'_k} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \frac{\partial U_\nu}{\partial p'_k} D'_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_i}.$$

Anderseits ist

$$0 = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \frac{dU_\nu}{dx'_i}.$$

Folglich ist

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=0}^{n} {}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} [U_\nu, U_\pi]' \frac{d\varrho}{dx'_i} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p'_i} \frac{d\varrho}{dx'_i} - \frac{\partial \varrho}{\partial p'_i} \frac{dU_\nu}{dx'_i} \right) = \sum_{\nu=0}^{n} D'_\nu [U_\nu, \varrho]',$$

und die Summe (19.) verschwindet wirklich.

Wir haben also

$$V(U_0 D_0) = \varrho\sigma \sum_{\nu=0}^{n} \left(D'_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} - \frac{1}{2} \sum_{\pi=0}^{n} {}^{(\nu)} \sum_{i=1}^{n} D'^{(i)}_{\nu\pi} \frac{d[U_\nu, U_\pi]'}{dx'_i} \right). \quad (20)$$

Diese Formel besagt aber eben, $V(U_0 D_0)$ sei gleich dem Producte von $\varrho\sigma$ und der linken Seite jener Differentialgleichung, die bei der Variation von

$$\int\int \ldots \int U_0 D'_0 dx'_1 dx'_2 \ldots dx'_n$$

— also der transformierten Form von

$$\int\int \ldots \int U_0 D_0 dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

— zu lösen ist.

Da nun $V(f)$ die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$ ist, so gilt der in Artikel 2 behauptete Satz allgemein; und zwar ist der dort erwähnte Factor gleich: $\varrho\sigma$.

4.

BEITRÄGE ZUR KENNTNISS DER KEHLKOPF-NERVEN.

Von Dr. A. ÓNODI, Prof. an d. Univ. Budapest.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 12. December 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitő" (Math. und Naturw. Anzeiger) Bd. XVII, pp. 79—111.

In der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts vertraten fast alle Anatomen dieselbe Ansicht in Betreff der Innervation des Kehlkopfes, sie betrachteten sowohl den oberen wie den unteren Kehlkopfnerven für gemischte Nerven und liessen von beiden Kehlkopfnerven die Schleimhaut und die Muskeln des Kehlkopfes innervieren, somit eine doppelte Innervation der Schleimhaut und der Muskeln des Kehlkopfes. Diese Lehre sehen wir wesentlich verändert in den von dem Jahre 1850 bis heute erschienenen anatomischen Lehrbüchern. Wenn wir die Endausbreitungen der Kehlkopfnerven näher betrachten, so können wir die verschiedenen Ansichten in folgende Gruppen zusammenfassen.

1. Der äussere und der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven. Diese Ansicht ist bei GEGENBAUR[1] vertreten. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versieht den Musc. cricothyreoideus und durch diesen Muskel „sollen feine Zweige auch zur Schleimhaut gelangen". Der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ver-

[1] GEGENBAUR, Lehrbuch der Anatomie. 1890.

sieht die Schleimhaut des Kehlkopfes bis zur Stimmritze, ferner lesen wir „auch an den inneren Kehlkopfmuskeln sind untergeordnete Zweige beschrieben". Der untere Kehlkopfnerv versieht ausser dem Musc. cricothyreoideus die anderen Kehlkopfmuskeln, ferner „auch zur Schleimhaut des unteren Kehlkopfraumes verbreiten sich Zweige".

2. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein sensibler Nerv. Diese Ansicht vertritt SCHWALBE[1]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt den Musc. cricothyreoideus, „der Nerv ist also vorzugsweise motorischer Natur, giebt aber ausserdem noch einige feine Zweige zur Schleimhaut des Stimmbandes". Der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt die Kehlkopfschleimhaut bis zur Stimmritze, „ist ein sensibler Nerv". Der untere Kehlkopfnerv innerviert ausser dem Musc. cricothyroideus die anderen Kehlkopfmuskeln, ferner „auch dringen einige Fäden abwärts zu dem unterhalb der Stimmritze gelegenen Theile der Kehlkopfschleimhaut vor".

3. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist motorisch, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv sind gemischte Nerven. Ein alter Vertreter dieser Ansicht ist ARNOLD[2]. LUSCHKA[3] spricht sich auch in seinem älteren Buche in diesem Sinne aus. Nach ihm führt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven Fasern zu den Mm. arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus. RÜDINGER[4] lässt den Musc. cricothyreoideus vom äusseren Aste des oberen Kehlkopfnerven, die Mm. arytaenoideus transversus und aryepiglotticus von dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven versehen; der untere Kehlkopfnerv giebt Muskelzweige, ferner „auch sensible Fäden bringt der untere Kehlkopfnerv zur Schleimhaut". Nach AEBY[5] versorgt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut und den Musc. epiglotticus: der untere Kehlkopfnerv

[1] SCHWALBE, Anatomie. 1881.
[2] ARNOLD, Anatomie. 1851.
[3] LUSCHKA, Die Anatomie des menschlichen Halses. 1862.
[4] RÜDINGER, Anatomie der Gehirnnerven. 1870.
[5] AEBY, Anatomie. 1871.

giebt Zweige zu den Muskeln und zur Schleimhaut. Nach QUAIN-HOFFMANN[1] versorgt der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut bis zu den Stimmbändern, ferner den Musc. arytaenoideus obliquus; der untere Kehlkopfnerv innerviert die übrigen Kehlkopfmuskeln und mit einigen Fäden die Kehlkopfschleimhaut. Nach HOLLSTEIN[2] giebt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ausser seinen sensiblen Fasern Zweige zu den Mm. arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus; der untere Kehlkopfnerv versorgt die übrigen Kehlkopfmuskeln und die Schleimhaut unterhalb der Stimmritze. Nach LANGER[3] ist der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ein gemischter Nerv, er versorgt die Schleimhaut bis zur Stimmritze, dass er auch motorische Fasern führt, das erfahren wir aus der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven, „auch er enthält motorische und sensible Fasern, die ersteren giebt er theils allein, theils im Verein mit dem Ramus communicans vom oberen Laryngeus an die Muskeln ab, welche direct die Stimmritze beherrschen". Die sensiblen Fasern des unteren Kehlkopfnerven versehen die Schleimhaut in und unter der Stimmritze. Dieselbe Beschreibung finden wir später in dem Lehrbuch von LANGER-TOLDT[4]. In der neuesten Ausgabe dieses Lehrbuches äussert sich TOLDT[5] in einer ganz abweichenden Weise. Er sagt auch hier, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ein gemischter Nerv, aber wir finden nicht mehr die vorige Erklärung seines gemischten Charakters, denn TOLDT macht von den motorischen Fasern des Ramus communicans N. lar. sup. gar keine Erwähnung. Von den unteren Kehlkopfnerven spricht er folgendermaassen: „auch er enthält motorische und sensible Fasern", „überdies versorgt er die Schleimhaut in und unter der Stimmritze, und zwar wahrscheinlich mittelst jener Fasern, welche ihm durch den Ramus anastomoticus des Nervus laryng. sup. zugeführt werden".

[1] QUAIN-HOFFMANN, Anatomie. 1872.
[2] HOLLSTEIN, Anatomie. 1873.
[3] LANGER, Anatomie. 1885.
[4] LANGER-TOLDT, Anatomie. 1893.
[5] l. c. 1897.

HYRTL[1] lässt die Mm. thyreo- et aryepiglotticus vom inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven innervieren; der untere Kehlkopfnerv giebt Muskelzweige, ferner verbinden sich die feinsten Ramificationen in der Schleimhaut mit jenen der oberen Kehlkopfnerven.

4. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind motorische Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein sensibler Nerv. Ein alter Vertreter dieser Ansicht ist MEYER[2]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt den Musculus cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Kehlkopfschleimhaut und der untere Kehlkopfnerv innerviert die übrigen Kehlkopfmuskeln. Dieselbe Ansicht vertraten später HARTMANN[3] und PANSCH[4], in letzterer Zeit RAUBER[5], VAN GEHUCHTEN[6], ZUCKERKANDL[7], GRAY[8] und QUAIN-SCHÄFFER-THANE[9].

5. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven, sowie der untere Kehlkopfnerv sind motorische Nerven, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein gemischter Nerv. Diese Ansicht vertrat HIRSCHFELD[10]. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven innerviert den Musculus cricothyroideus, die übrigen Kehlkopfmuskeln der untere Kehlkopfnerv; der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt ausser der Schleimhaut den Musculus arytaenoideus transversus.

6. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist ein gemischter Nerv, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist sensibel, der untere Kehlkopfnerv ist ein motorischer Nerv. Diese Ansicht hat sich allgemein verbreitet unter den französischen Ana-

---

[1] HYRTL, Anatomie. 1893.
[2] MEYER, Anatomie. 1861.
[3] HARTMANN, Anatomie. 1881.
[4] PANSCH, Anatomie. 1881.
[5] RAUBER, Anatomie des Menschen. 1893.
[6] VAN GEHUCHTEN, Anatomie du système nerveux. 1893.
[7] ZUCKERKANDL, Heymann's Handbuch der Laryng. 1896.
[8] GRAY, Anatomy. 1890.
[9] QUAIN-SCHÄFFER-THANE. 1895.
[10] HIRSCHFELD, Système nerveux. 1867.

tomen, einige deutsche Anatomen schliessen sich gleichfalls dieser an. LUSCHKA[1] hat in seinem neueren Werke in zwei Fragen seine Ansicht wesentlich geändert. Er nahm an, dass der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musculus cricothyreoideus innerviert und einige Fasern durch diesen Muskel zur Schleimhaut des Stimmbandes geben; ferner, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven nur die Kehlkopfschleimhaut und der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln versorgt. Diese Ansicht vertritt HENLE[2] in seinem älteren und neueren Lehrbuche, sowie auch KRAUSE[3]. Die Mehrzahl der französischen Anatomen äussert sich in demselben Sinne und zwar BEAUNIS et BOUCHARD[4], SAPPEY[5], DEBIERRE[6], TESTUT[7], FORT[8].

7. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist motorisch, der innere Ast desselben sensibel, der untere Kehlkopfnerv ist ein gemischter Nerv.

Nach VOLL[9] innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven die Schleimhaut bis zu den Stimmbändern; der untere Kehlkopfnerv versorgt die übrigen Kehlkopfmuskeln, und die Kehlkopfschleimhaut unter den Stimmbändern. Bei BRÖSIKE[10] finden wir eine Abweichung in der Innervation der Kehlkopfschleimhaut, nämlich der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven versorgt die ganze Kehlkopfschleimhaut, und nur einige Fäden gehen zur Schleimhaut unter der Stimmritze. Nach dem neuesten Beobachter BABES[11] ist der untere Kehlkopfnerv ein gemischter Nerv, seine sensiblen Fasern gehen durch die Vermittelung der

---

[1] LUSCHKA, Der Kehlkopf des Menschen. 1871.
[2] HENLE, Anatomie, Nervenlehre. 1871, 1879.
[3] KRAUSE, Anatomie. 1879.
[4] BEAUNIS et BOUCHARD, Anatomie. 1877.
[5] SAPPEY, Traité d'Anat. 1889.
[6] DEBIERRE, Traité d'Anat. 1891.
[7] TESTUT, Traité d'Anat. 1891.
[8] FORT, Anat. descript. 1892.
[9] VOLL, Compendium der Anatomie. 1893.
[10] BRÖSIKE, Lehrbuch der Anatomie. 1895.
[11] A. BABES, Contributiuni la studial Innervatiunei Laryngol. Bucarest 1897.

GALEN'schen Schleife und die von ihm beschriebenen Verbindungen in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven, um mit dessen Zweigen zur Kehlkopfschleimhaut zu gelangen. Nach unseren älteren[1] und neueren Untersuchungen halten wir unter den aufgezählten Meinungen die letzte für die richtige.

Nach unseren Untersuchungen innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln; an der Innervierung der Kehlkopfschleimhaut nimmt sowohl der obere wie der untere Kehlkopfnerv theil, immerhin in grösserer Stärke der obere, und ausserdem treten die sensiblen Fasern über die Mittellinie, daher auch eine gekreuzte, doppelte sensible Innervation besteht.

Was die Innervation der Kehlkopfmuskeln betrifft, so finden wir in neuerer Zeit fast die gleiche Ansicht, welche auch nach unseren Untersuchungen der Wirklichkeit entspricht. Es innerviert der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven den Musc. cricothyreoideus, der untere Kehlkopfnerv die übrigen Kehlkopfmuskeln und zwar die Mm. cricoarytaenoideus posticus et lateralis, arytaenoideus transversus, ary- et thyreoepiglotticus, thyreoarytaenoideus.

Was die Innervation der Kehlkopfschleimhaut betrifft, so können wir die verschiedenen Ansichten in folgende vier Gruppen theilen:

1. Die Kehlkopfschleimhaut versorgen die beiden Aeste des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv (SCHWALBE[2], GEGENBAUR[3].

2. Die Kehlkopfschleimhaut innerviert der äussere und der innere Ast des obereren Kehlkopfnerven (LUSCHKA[4], HENLE[5], BEAUNIS et BOUCHARD[6], KRAUSE[7], SAPPEY[8], DEBIERRE[9], TESTUT[10], FORT[11].

3. Die Kehlkopfschleimhaut versorgt der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven und der untere Kehlkopfnerv (ARNOLD[12],

---

[1] ÓNODI, Innervation des Kehlkopfes. Wien 1895.

[2] l. c. 1881. — [3] l. c. 1890. — [4] l. c. 1871. — [5] l. c. 1871—1879. — [6] l. c. 1877. — [7] l. c. 1879. — [8] l. c. 1889. — [9] l. c. 1890. — [10] l. c. 1891. — [11] l. c. 1892. — [12] l. c. 1851.

RÜDINGER[1], AEBY[2], QUAIN-HOFFMANN[3], HOLLSTEIN[4], LANGER[5], LANGER-TOLDT[6], HYRTL[7], VOLL[8], BRÖSIKE[9], ONODI[10], BABES[11]).

4. Die Kehlkopfschleimhaut wird vom inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven versehen (MEYER[12], HIRSCHFELD[13], HARTMANN[14], PANSCH[15], RAUBER[16], VAN GEHUCHTEN[17], GRAY[18], QUAIN-SCHÄFFER-THANE[19], ZUCKERKANDL[20]).

Wir haben gesehen die verschiedenen Ansichten in Betreff des Ursprunges und der Verbreitung der Schleimhautnerven. Den verschiedenen Ursprung zeigen die eben erwähnten vier Gruppen, aber gleichfalls verschieden sind die Ansichten das Innervationsgebiet betreffend. Einzelne haben in der Stimmritze die scharfe Grenzlinie gezogen zwischen der Ausbreitung des oberen und unteren Kehlkopfnerven. Andere haben eine doppelte Innervation in der Schleimhaut unter der Stimmritze angenommen; einzelne wieder haben das ganze sensible Innervationsgebiet dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven zugesprochen. In den erwähnten Büchern finden wir nur zwei, welche eine Erwähnung enthalten über die Kreuzung der Nerven und über die Verbindungen der Fasern des oberen und unteren Kehlkopfnerven.

GEGENBAUR sagt, bei der Beschreibung des Ramus internus N. lar. sup. „sind untergeordnete Zweige beschrieben, sowie Uebertritte von Nerven von der einen nach der anderen Seite". Bei HYRTL finden wir: „Die feineren und die feinsten Ramificationen des Laryngeus superior in der Kehlkopfschleimhaut gehen mehrfache Verbindungen mit jenen des Laryngeus inferior ein". Wie wir sehen, erwähnt GEGENBAUR die Kreuzung, HYRTL die Verbindungen in der Schleimhaut. Hier erwähne ich MANDELSTAMM's[21] Arbeit, welche sich zwar nicht auf den Menschen bezieht. Er hat beim Meerschweinchen gefunden, dass in der Schleimhaut der hinteren Kehlkopfwand einzelne Faserbündel die

---

[1] l. c. 1870. — [2] l. c. 1871. — [3] l. c. 1872. — [4] l. c. 1873. — [5] l. c. 1885. — [6] l. c. 1873—1879. — [7] l. c. 1893. — [8] l. c. 1893. — [9] l. c. 1895. — [10] l. c. 1895. — [11] l. c. 1897. — [12] l. c. — [13] l. c. — [14] l. c. — [15] l. c. — [16] l. c. — [17] l. c. — [18] l. c. — [19] l. c. — [20] l. c.

[21] Studien über Innervation und Atrophie der Kehlkopfmuskeln. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1882. 85. Bd. III. Abth.

Medianlinie überschreiten. Dieser Befund hat WEINZWEIG[1] bewogen, diese Verhältnisse beim Menschen und beim Rind zu untersuchen. Bei seinen Untersuchungen hatte er die Kehlkopfschleimhaut mit Kalilauge behandelt. WEINZWEIG hat beim Menschen unter dem Mikroskop gefunden, dass die Nervenbündel sich in der Medianlinie kreuzen und dass die Kehlkopfschleimhaut vom oberen und unteren Kehlkopfnerven versorgt wird. Beim Rind fand er ein präparierbares Medianbündel, welches sich aus

Fig. 1.

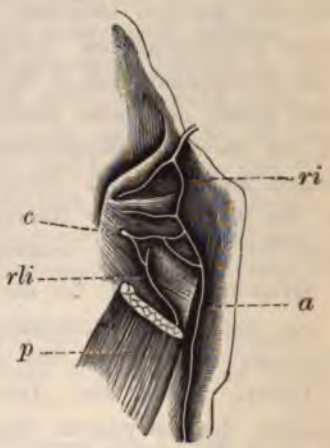


Fig. 2.

ri Ramus internus n. lar. sup. *c* Verbindung. *a* Ram. descendens n. lar. sup. *li* Laryngeus inferior. *rli* Zweig des Laryngeus inf. *p* Musc. cricoarytaenoideus posticus.

zwei Zweigen der unteren Kehlkopfnerven zusammensetzt und am unteren Rande des Aryknorpels verzweigt. Unsere Untersuchungen haben beim Menschen gezeigt, dass im Gebiete des Musc. arytaenoideus transversus mehrfache Verbindungen existieren zwischen dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven und dem für den Musculus arytaenoideus bestimmten Zweige des unteren Kehlkopf-

[1] Zur Anatomie der Kehlkopfnerven. Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1883. 86. Bd. III. Abth.

nerven. Wegen der Wichtigkeit dieser Verbindungen für die späteren Auseinandersetzungen und experimentellen Forschungen füge ich die Illustrationen bei. Am oberen Rande der Ringplatte, wo der Recurrenszweig sichtbar wird, um sich dann in den Musc. arytaenoideus transversus einzusenken, an dieser Stelle finden wir einen Theil der Verbindungen ganz oberflächlich. Diese Verbindung wird durch einen langen, den Muskel überbrückenden Ast hergestellt (Fig. 1 und 3). Manchmal treffen wir Verbindungszweige, die sich zu einem Stamme gesellen (Fig. 2). Einmal habe

Fig. 3.

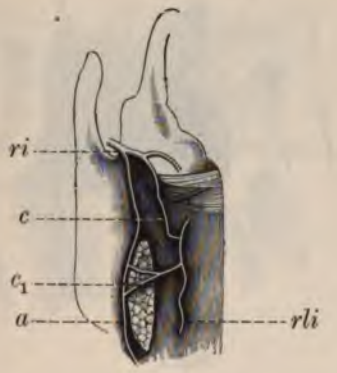


Fig. 4.

ri Ramus internus n. lar. sup. *c* Verbindung. *p* Musculus cricoarytaenoideus posticus. *rli* Zweig des Laryngeus inferior. c_1 Verbindung. *a* Ramus descendens n. lar. sup.

ich beobachtet, dass der genannte Recurrenszweig mit zwei gesonderten Fäden mit dem Laryngeus superior eine oberflächliche Verbindung einging, und zwar ein Zweig mit dem inneren Aste des oberen Kehlkopfnerven, ein anderer mit der Ansa Galeni. Ausser diesen oberflächlichen Verbindungen habe ich in der Tiefe des Musc. arytaenoideus transversus ebenfalls Verbindungen angetroffen; ein längs des Muskels laufender Nervenast verbindet den oberen mit dem unteren Kehlkopfnerven (Fig. 5). Aus dieser tiefen Schlinge gehen Zweige zum Muskel und zur Schleimhaut. Ausserdem finden wir tiefer, unmittelbar an der Schleimhaut zur Medianlinie convergierend und diese überschreitend, sich kreuzende

Zweige des oberen Kehlkopfnerven, welche mit dem Recurrens in Verbindung stehen (Fig. 6 und 7). Was die Verbindungen zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven betrifft, so hat BABES in letzter Zeit beim Menschen auch mehrfache Verbindungen beschrieben, die er zumeist mittelst Anwendung von Kalilauge beobachtet hat. Aus seinen brieflichen Mittheilungen, die sich auf seine in rumänischer Sprache erschienenen Werke beziehen, entnehmen wir Folgendes: „Was die Anastomosen der beiden Laryngei anlangt, so habe ich verschiedene, aber nicht constante Verbindungen gefunden. So ist eine Verbindung unter der Mucosa, welche die hintere Wand des Kehlkopfes bekleidet, diese ist aus

Fig. 5.

Fig. 6.

ri Ramus int. n. lar. sup. *c* Verbindung. *t* Musculus arytaenoideus transversus. *rli* Zweig des Laryngeus inferior. *p* Musculus cricoarytaenoideus posticus.

Fasern gebildet, welche von der Ansa Galeni ausgehen. Andere Verbindungen befinden sich auf der Oberfläche und in der Tiefe des Arytaenoid, zwischen den Nerven derselben als auch der entgegengesetzten Seite. Andere Verbindungen befinden sich zwischen dem Recurrens und dem Laryngeus externus. Verbindungen der beiden Laryngei befinden sich auch auf der Aussenseite nahe der Furche, welche den Crico-arytaen. lat. vom Thyreo-arytaen. trennt. Diese Verbindung bildet der Endast des Recurrens, welcher zum Thyreo-aryt. führt, mit einem Aste aus dem Bündel der horizontalen Aeste (Laryng. sup.). An derselben Stelle begegnet man häufig einem Aste vom Laryngeus ext. durch den Musc. cricothyr. unter dem unteren Rande der Cartil. thyreoid.,

wo sie sich vereinigen (Recurrens mit Laryng. sup. und Laryng. ext.). Einer anderen Verbindung zwischen dem Laryng. sup. und Laryng. ext. begegnete ich auch.“ (Ein Ast des Ram. ext. n. lar. sup. mit einem Aste der Ansa Galeni.)

Bei den späteren Besprechungen werden wir noch auf die von uns und von BABES beschriebenen Verbindungen zurückkommen. Jetzt wollen wir jene Verbindung näher betrachten, welche schon längst als Ansa Galeni bekannt ist. Nur in wenigen Lehrbüchern finden wir eine Erwähnung über die Faserbündel und deren Ursprung in der Ansa Galeni. Die meisten beschreiben einfach diese Verbindung mit den folgenden verschiedenen Bezeichnungen: als Ansa Galeni, Ramus descendens, Ramus anastomoticus, Ramus communicans; in den französischen Lehrbüchern wird zumeist die Ansa Galeni so beschrieben, dass dieselbe von einem absteigenden Aste des oberen Kehlkopfnerven und von einem aufsteigenden Aste des unteren Kehlkopfnerven gebildet wird.

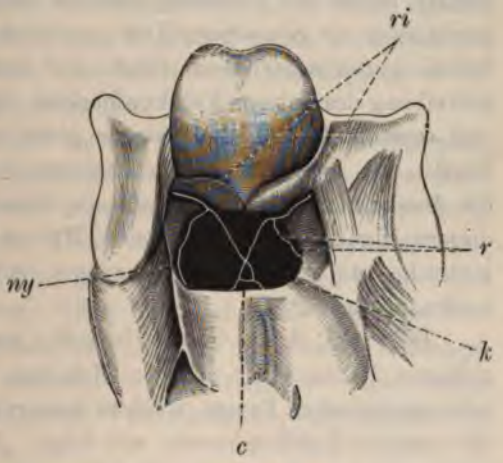


Fig. 7.

ri Ramus internus n. lar. sup. *ny* Schleimhaut. *r* Schleimhautäste des Ram. int. n. lar. sup. *k* Kreuzung. *c* Verbindung.

PHILIPPEAUX und VULPIAN[1] haben beim Hunde auf experimentellem Wege mittelst der WALLER'schen Methode gefunden, dass die Verbindung zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven Fasern vom oberen Kehlkopfnerven führt, welche im Stamme des unteren Kehlkopfnerven sich in zwei Bündel theilen, von denen das dünnere im Stamme verbleibt, das grössere von demselben sich trennt und zur Schleimhaut der Luftröhre geht.

[1] Archives de physiologie. 1869.

RÜDINGER lässt schon in diesem Sinne die Fasern der Ansa Galeni zur Trachea gelangen, ebenso HENLE, FORT. Nach LUSCHKA[1] „geht der Ramus communicans nur scheinbar in den Laryngeus inferior über". SCHWALBE schreibt: „Es gelangen dadurch Fasern des sensiblen Ramus internus in die Bahn des Nervus laryngeus inferior, nicht umgekehrt." RAUBER sagt: „Der Ramus communicans führt sensible Fasern in den unteren Kehlkopfnerven über." In den Lehrbüchern von LANGER und LANGER-TOLDT haben wir gefunden, dass der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven als gemischter Nerv beschrieben ist und dass die Ansa Galeni motorische Fasern führt, wir lesen nämlich bei der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven: „Auch er enthält motorische und sensible Fasern, die ersteren giebt er theils allein, theils im Verein mit dem Ramus communicans vom oberen Laryngeus an die Muskeln ab, welche direct die Stimmritze beherrschen." In diesem Sinne äussert auch sich HENLE-MERKEL[2]: „Der anastomotische Ast beider Nn. laryngei enthält lediglich aufwärts laufende Fasern."

Was die Ansa Galeni betrifft, so ist TOLDT in seinem späteren Buche einer anderen Meinung, er erwähnt nicht mehr seine motorischen Fasern, sondern äussert sich bei der Beschreibung der unteren Kehlkopfnerven wie folgt: „Ueberdies versorgt er die Schleimhaut in und unter der Stimmritze, und zwar wahrscheinlich mittelst jener Fasern, welche ihm durch den Ramus anastomoticus des Nerv. laryng. sup. zugeführt werden."

ZUCKERKANDL spricht sich über die Ansa Galeni folgendermaassen aus: „Wobei es sich höchst wahrscheinlich um sensible Fasern handeln dürfte, welche die Bahn des Laryng. inf. benutzen, um an die tieferen Antheile des Kehlkopfes und an das obere Stück der Trachea zu gelangen." BABES[3] schreibt über die Ansa Galeni, „dass sie sowohl aus Aesten aus dem Nerv. laryng. sup., welche absteigend sind, als auch aus aufsteigenden Aesten aus dem Recurrens sich zusammensetzte. Wohin sich die Aeste begeben und auf welchem Wege, konnte ich nicht nachweisen".

[1] l. c. 1871.

[2] HENLE-MERKEL, Anatomie. 1888.

[3] l. c. 1897.

Er vermuthet, dass die Fasern des unteren Kehlkopfnerven durch die Ansa Galeni in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven gelangen und mit seinen Aesten zum Kehlkopf gehen, während die Fasern des oberen Kehlkopfnerven umgekehrt in die Bahn des unteren Kehlkopfnerven treten, um mit seinen Aesten zum Kehlkopf, Luftröhre und Oesophagus zu gelangen.

Wie wir gesehen haben, sind die Ansichten verschieden: a) die Ansa Galeni führt motorische Fasern, b) sie bringt sensible Fasern zu den unteren Kehlkopfnerven, c) sie führt sensible Fasern zur Luftröhre und d) zum Kehlkopf, e) sie vermittelt die sensiblen Fasern des oberen und des unteren Kehlkopfnerven für den Kehlkopf und für die Luftröhre.

Wir können auf Grund unserer Untersuchungen behaupten, dass die Ansa Galeni hauptsächlich von Fasern des inneren Astes des oberen Kehlkopfnerven zusammengesetzt ist, welche beim Menschen für den oberen Theil der Luftröhre bestimmt sind, ferner vermittelt sie den Eintritt der Recurrensfasern in die Bahn des oberen Kehlkopfnerven. Offen bleibt aber die Frage des Verlaufes dieser Recurrensfasern im Gebiete des oberen Kehlkopfnerven. Im Folgenden werden wir die Frage der Ansa Galeni beim Hunde, dem wichtigsten Versuchsthiere, ausführlich besprechen.

Kandarazky[1] war der erste, der diese Frage beim Hunde einer gründlichen Untersuchung unterworfen hat. Er fand, dass die Ansa Galeni bis zum vierten Trachealring mit dem Recurrens in einer Scheide geschlossen ist, dann von ihm sich trennt und als selbständiger Nerv, Ramus trachealis n. lar. sup., der Luftröhre zahlreiche Aeste gebend in den Vagusstamm unterhalb des Recurrensursprunges übergeht. Dieser Nerv bildet die directe Fortsetzung des oberen Kehlkopfnerven. Aus seiner Beschreibung heben wir Folgendes hervor: „In dem Trachealzweig finden sich auf- und absteigende Fasern"; „die ganze obere Hälfte der Trachea etwa im Bereich von 20 Knorpeln, die vier oberen, wo der Trachealzweig in einer Scheide mit dem Recurrens liegt, nicht ausgenommen, wird vom Trachealzweig aus und von N. recurrens

[1] Kandarazky, Archiv f. Anat. u. Physiol. 1881.

innerviert." „Als Variation des Trachealzweiges ist anzugeben, dass er zuweilen sich nicht vom N. recurrens abzweigt, sondern mit ihm verläuft, so dass es scheinen kann, als ob die Trachea vom N. recurrens ihre Zweige erhalten würde." „Weiter trifft man einen Verbindungszweig zwischen dem N. recurrens und dem Trachealzweig an und endlich tritt der Trachealzweig selbst nach Abgabe der Zweige für die obere Hälfte der Trachea (vom 1. bis 20. Knorpel) an den Recurrens." In einem früheren Aufsatze[1] habe ich den Ramus trachealis u. lar. sup. im Sinne KANDARAZKY's kurz berührt und eine Zeichnung beigegeben. In einer neueren Arbeit[2] habe ich diese Frage wieder berührt: „Beim Hund verläuft parallel und lose verbunden mit dem Stamme des Recurrens der R. trachealis u. lar. sup. zahlreiche feine Aeste zur Trachea sendend. Eigentlich bildet er die Fortsetzung der Ansa Galeni, welche beim Menschen mit dem lateralen Zweig im Zusammenhang steht und in die Bahn des Recurrens sensible Fasern vom Laryngeus sup. bringt. Beim Hund hängt er mit dem Stamme des Recurrens zusammen vor seiner Verästelung und dann läuft er parallel mit ihm am Halse, seine Fasern der Trachea abgebend." Diese Verhältnisse illustriert Fig. 8. Diese Arbeit hatte zum Gegenstand die isolierten respiratorischen und phonatorischen Faserbündel des Recurrens und bezog sich auch auf die Experimente RUSSEL's.[3] RUSSEL hat am lebenden Hunde den Stamm des unteren Kehlkopfnerven in drei Bündel getheilt, und elektrisch gereizt, das eine erzielte Verengerung, das zweite Erweiterung der Stimmritze, das dritte Bündel reagierte nicht. In meiner erwähnten Arbeit habe ich schon meine Meinung ausgesprochen, dass dieses dritte Bündel, dem von KANDARAZKY und von mir beschriebenen Ramus trachealis n. lar. sup. entspricht. Seitdem habe ich an einem lebenden Hunde ein Experiment ausgeführt, wo der Ramus trachealis n. lar. sup. isoliert war, ausserdem konnte ich den Stamm des unteren Kehlkopfnerven in vier Nervenbündel theilen, unter denen bei drei Bündeln auf elektrische

[1] ONODI, Beiträge zur Lehre von der Innervation etc. Monatsschrift f. Ohr., Kehlkopf etc. 1887. Nr. 4.

[2] ONODI, Archiv für Laryngologie. Bd. 7. 2. u. 3. Heft.

[3] Proceeding of the Royal Society.

Reizung Verengerung, beim vierten Bündel Erweiterung der Stimmritze resultierte. Dieses Experiment führte ich aus, um mich von der Isolierbarkeit des Ramus trachealis n. lar. sup. und der einzelnen Bündel des unteren Kehlkopfnerven am lebenden Hunde zu überzeugen. Auf die Anwendung dieser Methode einiger noch zu lösender Fragen komme ich später zurück.

Mit dem vorliegenden Gegenstande haben sich experimentell auch KOKIN[1] und RÉTHY[2] befasst. Beide illustrieren in einer Zeichnung die anatomischen Verhältnisse und beide berufen sich auf das Buch von ELLENBERGER und BAUM.[3] ELLENBERGER und BAUM haben weder KANDARAZKY's noch meine Arbeit gekannt, ebenso KOKIN und RÉTHY, daher berufen sich die Letzteren auf die Beschreibungen von ELLENBERGER und BAUM. Aus diesen Thatsachen folgt, dass das wahre Bild dieser Verhältnisse in den Beschreibungen nicht zu finden ist, und die Verwirrung der diesbezüglichen Kenntnisse durch eine neue Benennung noch gesteigert wurde. ELLENBERGER und BAUM geben folgende Beschreibung: „Der Hauptstamm des Nerv. recurrens theilt sich ausserdem meist kurz, nachdem er die Brusthöhle verlassen, in zwei fast gleich starke Aeste, welche mit einander kopfwärts verlaufen und sich am aboralen Ende der Schilddrüse wieder zu einem Stamme vereinigen. Sie verbinden sich durch feinere Fäden sowohl untereinander als auch mit denen der anderen Seite." „Der Nerv. lar. inf. selbst aber theilt sich in einen dorsalen und einen ventralen Zweig, die durch einige Fäden wieder mit einander in Verbindung stehen. Der dorsale Zweig stellt wesentlich einen Ram. communicans n. l. s. dar."

KOKIN macht auf diese Beschreibung folgende Bemerkung: „diese Beschreibung ist sogar anatomisch nur bis zu einem gewissen Grade richtig." Er selbst äussert sich folgendermaassen: „Bald nach seiner Trennung vom Vagus giebt er einige Zweige für den unteren Abschnitt der Trachea (R. tracheales). Unter der Stelle, an welcher der Nerv in den Kehlkopf eintritt, theilen sich vom Stamme grösstentheils 1—2—3, auch mehr Zweige ab, die zur

[1] KOKIN, Pflüger's Archiv f. Physiol. 1896.
[2] RÉTHY, Sitzungsberichte der Wiener Akademie. 1898.
[3] ELLENBERGER und BAUM, Anatomie des Hundes. 1891.

Trachea ziehen, aber weiter unten gleich bei der Schilddrüse trennt sich gewöhnlich vom Stamm unter einem sehr spitzen nach unten geöffneten Winkel ein ziemlich starker Ast, der parallel dem N. recurrens, medial von ihm gelegen, abwärts zieht; im unteren aboralen Theil des Halses communiciert dieser Ast mit einem oder zwei Trachealzweigen des Recurrens, oder zuweilen mit einem Trachealzweige des Vagus. Von diesem Aste des Stammes des Recurrens, den ich der Kürze wegen Nervus trachealis nennen will, trennen sich oben und unten Zweige unter sehr spitzem Winkel, der für die oberen Zweige nach unten, für die unteren nach oben geöffnet ist. Zu diesem Nerv gelangen häufig am aboralen Theil des Halses zarte Rr. commun. vom Recurrens." „Der Nervus trachealis besteht aus Fasern, die von oben nach unten und von unten nach oben ziehen; erstere bilden die Fortsetzung eines Theiles des inneren Astes des N. l. s., der sich wahrscheinlich durch die GALEN'sche Anastomose schon in der Kehlkopfregion dem N. lar. inf. beigesellt, aber unter dem Kehlkopf sich von ihm zuerst in Gestalt einzelner Zweige, dann als selbständiger Nerv abtrennt, um sich im oberen und mittleren Abschnitt der Trachea zu verzweigen. Letztere Nervenfasern, also die, die von unten nach oben ziehen, gelangen hierher entweder nur vom N. recurrens oder vom Recurrens und Vagus und versorgen den mittleren und theilweise auch oberen Abschnitt der Trachea."

RÉTHY erwähnt die Arbeiten von KOKIN und ELLENBERGER und BAUM, die letzteren bei dem von ihm gebrauchten Ausdruck „Nebenrecurrens." Aus seinem Aufsatze entnehmen wir Folgendes: „Ich habe dann noch beim Hunde die Communicationsfasern auf dem Wege der Präparation im Recurrens weiter verfolgt und gefunden, dass sie in dem bei dieser Thiergattung ziemlich constanten Nebenrecurrens weiter verlaufen, in welchen Fällen der eigentliche Recurrensstamm von ihnen frei bleibt. Die meisten dieser Communicansfasern giebt der Nebenrecurrens schon hoch oben an die Trachea ab, ein Theil geht zum Oesophagus, während die unteren Aestchen relativ wenige Communicansfasern führen; doch sendet der Nebenstamm, wie ich mich durch Präparation und mikroskopische Untersuchung der excidierten Nervenpartien

überzeugen konnte, auch von unten her Fasern zu den abgehenden Aestchen, so dass fast jedes von oben sowohl wie auch von unten her Fasern bekommt."

„Zuweilen vereinigt sich der Nebenrecurrens weit unten wieder mit dem Recurrens und dann gehen die Communicansfasern in einem stärkeren Trachealstämmchen nach unten und verlassen dasselbe allmählich mittelst feiner Aestchen. Ist dagegen ein solcher Nebenrecurrens gar nicht vorhanden, so verlaufen die Communicansfasern grösstentheils mit den oberen zur Trachea abgehenden Aestchen peripherwärts und nur ein kleiner Theil lässt sich eine kurze Strecke im Recurrens centralwärts weiter verfolgen."

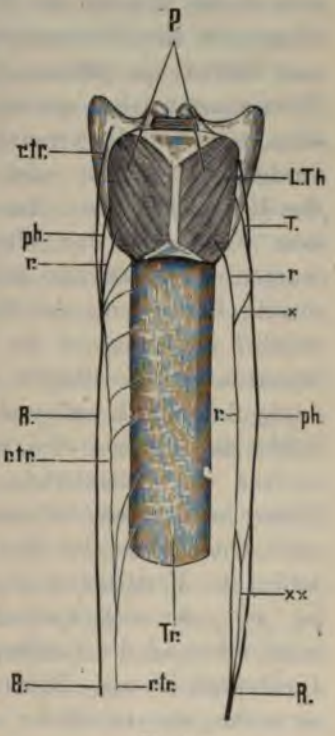


Fig. 8.

Hund. Rechts ist der Recurrens zerlegt, links die normalen anatomischen Verhältnisse, mit den Recurrens parallel verlaufenden Ram. trachealis n. lar. sup. *R.* Recurrens. *P.* Posticus. *Tr.* Trachea. *r. tr.* ramus trachealis n. lar. sup. *L. Th.* Nerv der Mm. cricoarytaenoideus lateralis und thyreoarytaenoideus. *T* Nerv des Musc. transversus. *r r* Nerv des Posticus, respiratorisches Bündel. × Phonatorische Fasern, welche die Bahn des respiratorischen Bündels verlassen. ×× Phonatorisches Bündel, dessen Zweigchen sich dem respiratorischen Bündel anschmiegt.

Wie wir gesehen haben, wurden drei Benennungen gebraucht: 1. Ramus trachealis nervi laryngei superioris (KANDARAZKY, ÓNODI), 2. Nervus trachealis (KOKIN), 3. Nebenrecurrens (RÉTHY). Den Bezeichnungen entsprechend sind auch die Beschreibungen verschieden. Nach unseren neueren Untersuchungen können wir behaupten, dass von diesen Beschreibungen keine den thatsächlichen Verhältnissen entspricht, da diese morphologischen Erscheinungen keinen constanten Charakter besitzen. KANDARAZKY erwähnt jene Fälle als Varietäten, in welchen der Ram. trachealis n. lar. sup. nicht als selbständiger Nerv erscheint und sagt: „Diese Variationen stören keinesfalls den Grundplan." Ganz entgegengesetzt lautet die Beschreibung von ELLENBERGER und

BAUM, und KOKIN corrigiert die letztere. Die Figuren von KOKIN und RÉTHY entsprechen einander, stehen aber im starken Gegensatz zu den Figuren von KANDARAZKY und ÓNODI. Die ersteren illustrieren eine Nervenschleife, welche KOKIN als Nervus trachealis und RÉTHY als Nebenrecurrens bezeichnet. In der Figur von KANDARAZKY sehen wir einen selbständigen Nerven, welcher ganz oben mit dem Recurrens zusammenhängt und dann als Ramus trachealis n. lar. sup. zum Vagus läuft. Unsere Figur illustriert den Ram. trachealis n. lar. sup. auch als selbständigen Nerv. Mit dem Namen ist das Wesen seines Ursprunges gekennzeichnet worden. KANDARAZKY hat das Hauptgewicht darauf gelegt, die directe Fortsetzung der Ansa Galeni in diesem Zweige zu beweisen; doch war er im Reinen damit, dass auch Fasern des Recurrens darin enthalten sind, indem er sagt: in dem Trachealzweig finden sich auf- und absteigende Fasern"; „die ganze obere Hälfte der Trachea wird vom Trachealzweig aus und vom N. recurrens aus innerviert." Dagegen bezeichnet KOKIN nur mit Wahrscheinlichkeit die Ansa Galeni als die Bahn der von oben nach unten ziehenden Nervenfasern, indem er schreibt: „erstere bilden die Fortsetzung eines Theiles des inneren Astes des Nerv lar. sup., der sich wahrscheinlich durch die GALEN'sche Anastomose schon in der Kehlkopfregion dem Nerv. lar. inf. beigesellt." Diesbezüglich sagt RÉTHY: „Der Recurrens oder der Nebenrecurrens, wo ein solcher vorhanden ist, führt demnach in seinen oberen Partien centripetale, eigentlich dem Nerv. lar. sup. angehörende Fasern. Als RÉTHY die Bezeichnung Nebenrecurrens zuerst gebraucht, citiert er die Beschreibung von ELLENBERGER und BAUM, nach welcher der Stamm des Recurrens gleich nach seinem Ursprunge sich in zwei gleich starke Zweige theilt, welche nebeneinander verlaufend am unteren Ende der Schilddrüse sich wieder vereinigen. Diese morphologische Erscheinung wird von RÉTHY als „ziemlich constanter Nebenrecurrens" aufgefasst. Unsere Meinung geht dahin, dass diese Bezeichnung verfehlt und überflüssig ist, denn sie entspricht nicht dem Wesen des damit bezeichneten Nerven, andererseits können die von ELLENBERGER und BAUM beschriebenen morphologischen Verhältnisse nicht als normale betrachtet werden, es handelt sich nur um eine Varietät,

die in der beschriebenen Form selten vorkommt. Die Bezeichnung Nebenrecurrens könnte nur in Fällen solcher anatomischen Anomalien berechtigt sein, wo thatsächlich der Nervus recurrens in überzähliger Form, doppelt erscheint, wie dies auch WRISBERG[1] beim Menschen beobachtet hat. In diesen Fällen, wo der überzählige Recurrens unterhalb des Ursprunges des normalen Recurrens den Vagusstamm verlassen hat und beide neben einander zwischen Trachea und Oesophagus verliefen, und später sich vereinigten, in diesen Fällen wäre die Bezeichnung „Nebenrecurrens", die Bezeichnung einer Anomalie am Platze. Wir werden aber auch die anderen Bezeichnungen modificieren, da man mit ihnen keine constanten morphologischen Verhältnisse bezeichnen kann. Nach unseren Untersuchungen können die beschriebenen Verhältnisse auftreten, wir wollen daher dem Wesen des Faserverlaufes und der Formverhältnisse entsprechend die passenden Bezeichnungen aufstellen. Zuerst wollen wir die Figur 9 näher betrachten, welche auf beiden Seiten die Verhältnisse illustriert.

Die Figur zeigt auf beiden Seiten die Ansa Galeni, welche dann als Ramus trachealis n. laryng. sup. vom Stamme des Recurrens sich trennt und weiter unten sich wieder mit ihm vereinigt. Es ist auf beiden Seiten eine Schlinge vorhanden, aus welcher Aeste zur Trachea und zum Oesophagus ziehen. Zwischen der Ansa Galeni und dieser Schlinge entspringen aus dem Recurrensstamm einzelne Fäden zur Trachea. Auf der linken Seite ist nur eine Schlinge vorhanden, unterhalb dieser Schlinge giebt der Recurrensstamm mehrere Zweige zur Luftröhre und zur Speiseröhre; der linke Recurrens entspringt mit drei Wurzeln aus dem Vagus und nach seinem Ursprung giebt er zwei Zweige zum unteren Theil der Luftröhre, die anderen Trachealzweige entstammen vom Vagus. Auf der rechten Seite sind ausser der erwähnten Schlinge noch zwei vorhanden, aus jeder entspringen Aestchen zur Trachea und zum Oesophagus. Der Recurrens selbst steht mit zwei Fäden mit dem unteren Halsganglion in Verbindung, nahe seinem Ursprunge giebt er einen stärkeren Trachealzweig zum unteren Theil der Trachea, die anderen Zweige kommen

[1] HENLE, Nervenlehre. 1879.

vom Vagus. Die linksseitige Schlinge entspricht den Zeichnungen von KOKIN und RÉTHY, während das rechtsseitige Bild mit der dreifachen Schlinge von allen mitgetheilten Figuren abweicht. Unsere Untersuchungen haben die von ELLENBERGER und BAUM beschriebenen Verhältnisse nicht constatieren können, wir betrachten sie deshalb für eine Varietät. Weiterhin konnten wir uns nicht davon überzeugen, dass die von ihnen beschriebenen Nerven mit einander und mit jenen der entgegengesetzten Seite zusammenhängen, und dass der dorsale und ventrale Endast des Recurrens mit einander durch einige Fäden verbunden sind. Zur Orientierung der Beschreibung und Auffassung von ELLENBERGER und BAUM erwähnen wir die Beschreibung des wichtigsten Recurrensastes: „Der dorsale Zweig stellt wesentlich einen Ramus communicans zum Nerv. lar. sup. dar." Dieser Ast giebt Zweige für den M. cricoarytaenoideus posticus und den M. arytaenoideus transversus. Wir haben gefunden, dass die Verhältnisse, wie sie in den Abbildungen von KOKIN und RÉTHY wiedergegeben sind, häufig vorkommen, aber schon KANDARAZKY hat sie als Varietät erwähnt. Ebenso kommt häufig jener Verlauf vor, den die Abbildungen von KANDARAZKY und von mir illustrieren, d. h. das Vorkommen des Ramus trachealis N. lar. sup. KANDARAZKY hat aber diesen Zweig als die directe Fortsetzung des oberen Kehlkopfnerven betrachtet und die Verbindung der Ansa Galeni mit dem Recurrens nur als eine scheinbare. Dagegen fanden wir, dass die Ansa Galeni mit dem grössten Theil ihrer Fasern in die Bahn des Ramus trachealis N. lar. sup. tritt, ein kleiner Theil der Fasern aber mit dem Recurrens in Zusammenhang steht. Die bisherigen Ansichten vereinigen sich darin, dass die Nerven der Luftröhre von den oberen und den unteren Kehlkopfnerven stammen. Wie wir gesehen haben, sind nur die morphologischen Erscheinungen verschieden und deshalb bezeichnen wir den Thatsachen entsprechend den zum grössten Theile vom Laryngeus superior herrührende Fasern enthaltenden Ast als Ramus trachealis n. laryngei superioris und die unteren vom Recurrens entspringenden Zweige als Rami tracheales n. laryngei inferioris. Sowohl der obere wie die unteren Trachealzweige können selbständig verlaufen. Von den letzteren ist es gewöhnlich ein Trachealzweig (zuweilen zwei),

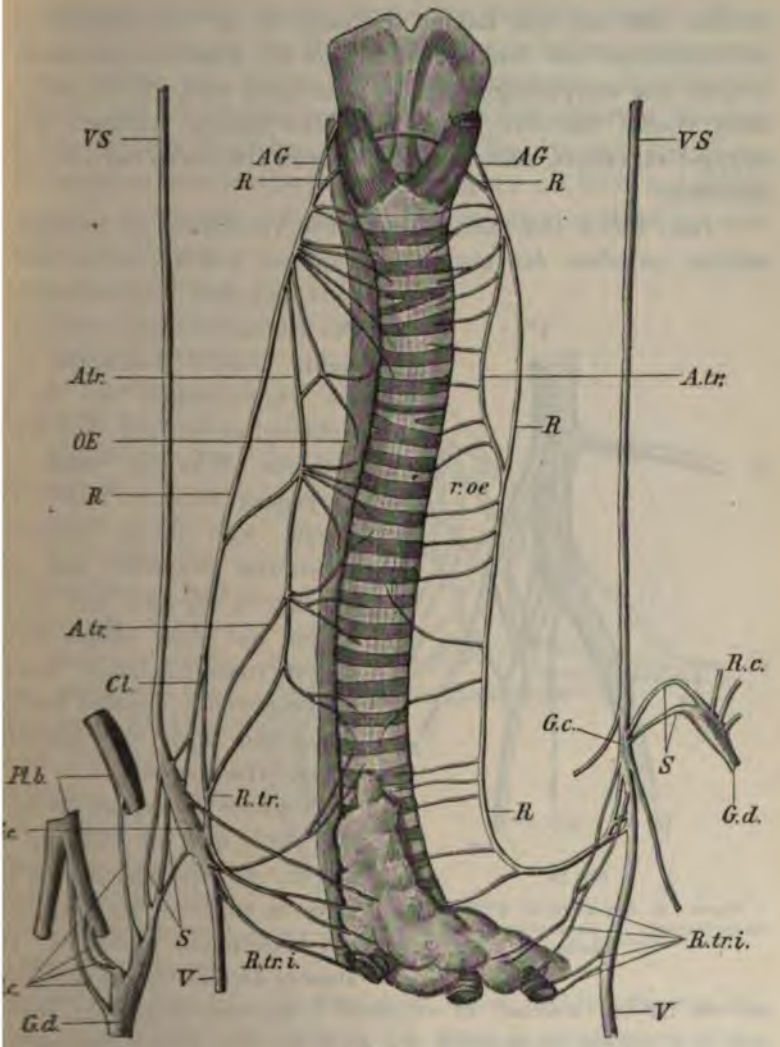


Fig. 9.

...ad. Die Nerven der Trachea sind bis zu den Bronchien, welche mit Fett und Bindegewebe bedeckt sind, verfolgt. *VS* Vagosympathicus. *G.c.* Ganglion cervicale inf. *G.d.* Ganglion ...ale prim. *R.c.* Rami communicantes zum Plexus brachialis. *S* Sympathischer Grenzstrang zwischen beiden Ganglien. *V* Vagus. *R.tr.* Rami tracheales inf. *R* Nervus laryngeus ... *Pl.b.* Plexus brachialis. *Cl* Verbindung zwischen Recurrens und Ganglion cervicale inf. ... Ramus trachealis nervi l. inf., welcher zur Bildung der Ansa trachealis bestimmt ist. ... Ansa trachealis. *Oe.* Oesophagus. *r.oe.* Rami oesophagei. *AG* Ansa Galeni. Sowohl Recurrens wie die Ansa trachealis geben zahlreiche Fäden zur Trachea und einige zum Oesophagus.

welcher sich mit dem Ramus trachealis n. lar. inf. verbindet und mit demselben eine Schlinge bildet, die wir Ansa trachealis nennen wollen. Die morphologischen Erscheinungen also, die wir häufiger beim Hunde antreffen, sind folgende: Ramus trachealis nervi laryngei superioris, Ansa trachealis, Rami tracheales nervi laryngei inferioris.

Jetzt bleibt uns noch übrig, jenes Verhältniss zu beleuchten, welches zwischen den oberen und unteren Kehlkopfnerven einerseits und dem Sympathicus und den Herznerven andererseits besteht. Zuerst betrachten wir die Verbindungen des oberen Kehlkopfnerven mit dem Sympathicus. Was den Stamm des Laryngeus superior betrifft, so finden wir wenig Angaben. RÜDINGER erwähnt, dass der Laryngeus superior mit einem Faden mit dem oberen Halsknoten zusammenhängt. HOLLSTEIN erwähnt dieselbe Verbindung und noch eine mit dem oberen Herznerven.

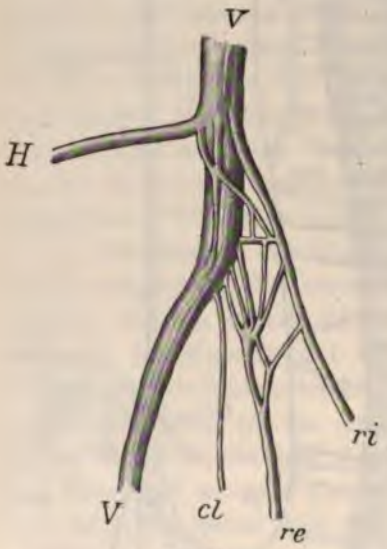


Fig. 10.

V Vagus. *H* Hypoglossus. *cl* Ram. cardiacus laryngei. *re* Ram. externus. *ri* Ram. internus.

Professor THANHOFFER hatte die Güte, mir ein Präparat zu zeigen, wo ein Faden den Laryngeus superior mit dem unteren Halsknoten verbindet. Der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven ist es, welcher in engerem Zusammenhang steht sowohl mit dem oberen Halsknoten wie auch mit den oberen Herznerven. Wir halten diese letztere Verbindung für wichtig, weil wir auch auf Grund unserer früheren Untersuchungen[1] beim Menschen den Nervus depressor ganz analog halten dem Herzzweig des äusseren Astes des oberen Kehlkopfnerven, welcher selbständig oder in

[1] Archiv f. Anat. 1880.

Verbindung mit den oberen Herznerven verlaufen kann. Bevor wir die Verbindungen des Ramus externus n. lar. sup. zusammenfassen, wollen wir einige Anomalien erwähnen, die sich auf Ursprung und Verbindungen des oberen Kehlkopfnerven beziehen. So habe ich beim Menschen ein Geflecht (Fig. 10) zwischen Vagus und Laryngeus superior beobachtet, welches 1 cm breit und 2,5 cm lang war. Der innere Ast des Laryngeus superior stand mit dem Geflecht in Verbindung und entsprang oberhalb desselben vom Vagus, der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven hatte sich aus dem Geflecht zusammengesetzt und der Ramus cardiacus kam vom Vagus. Eine Geflechtbildung, aus welcher der Stamm des Nervus laryngeus superior entstand, habe ich beim Pferd (Fig. 11) beobachtet. In einem Falle sah ich beim Menschen, dass der äussere Ast des oberen Kehlkopfnerven mit zwei Wurzeln entsprungen ist (Fig. 12), die eine vom oberen Kehlkopfnerven, die andere vom Vagus; der äussere Ast stand je durch einen Faden mit dem oberen Halsknoten und mit dem oberen Herznerven in Verbindung. In einem anderen Falle, ebenfalls beim Menschen, habe ich beobachtet, dass der äussere und der innere Ast des oberen Kehlkopfnerven isoliert ihren Ursprung nahmen vom Vagusstamme; ausserdem war der innere Ast mit dem Vagusstamme noch verbunden, ferner gab der innere Ast einen Ramus cardiacus,

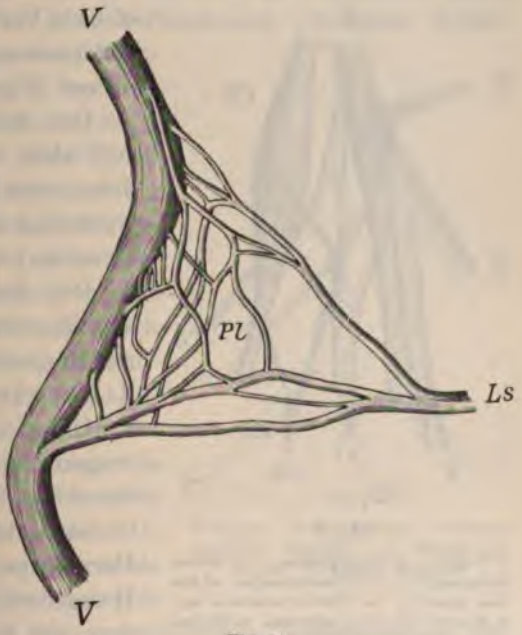


Fig. 11.

V Vagus. *Ls* Laryngeus sup. *Pl* Geflechtbildung.

der sich auch mit dem äusseren Aste verband (Fig. 13). In einem Falle sah ich beim Menschen den Laryngeus superior mit zwei Wurzeln seinen Ursprung nehmen vom Vagusstamme, von der äusseren Wurzel ging ein Zweigchen zum Vagusstamm, ferner ein Ramus cardiacus (Fig. 14).

Der Ramus externus n. lar. sup. giebt direct einen Herznerven (HENLE, HENLE-MERKEL, ÓNODI).

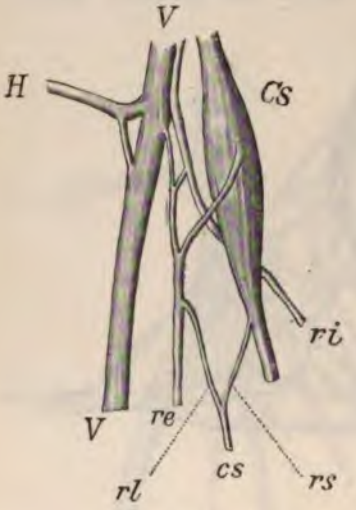


Fig. 12.

V Vagus. *H* Hypoglossus. *Cs* Oberes Halsganglion. *ri* Ramus internus. *re* Ramus externus. *cs* Nervus cardiacus sup. *rl* Wurzel vom Ram. externus. *rs* Wurzel vom oberen Halsganglion.

Der Ramus externus n. lar. sup. steht in Verbindung mit dem oberen Halsknoten und mit dem oberen Herznerven (Fig. 12, KRAUSE, SAPPEY).

Der Ramus externus n. lar. sup. steht in Zusammenhang mit dem oberen Halsknoten (SCHWALBE, GEGENBAUR, HARTMANN, HENLE, LUSCHKA).

Der Ramus externus n. lar. sup. anastomosiert mit dem oberen Herznerven (QUAIN-HOFFMANN, ALPIGER, DROBNIK, ZUCKERKANDL).

Diese verschiedenen Beobachtungen zeigen, dass die Verbindung des oberen Kehlkopfnerven mit dem oberen Halsknoten und dem oberen Herznerven wie auch mit dem Herzgeflechte constant existiert und dass sich nur die morphologischen Erscheinungen ändern.

An dieser Stelle erwähnen wir noch den von den französischen Anatomen mit Vorliebe behaltenen Plexus laryngeus. Nach HIRSCHFELD bilden den Plexus laryngeus Fäden vom Ramus externus n. lar. sup., vom oberen Halsknoten und vom Plexus pharyngeus. Nach SAPPEY setzt sich der Plexus laryngeus aus Fäden vom Ramus externus n. lar. sup. und vom oberen Halsknoten zusammen. Nach TESTUT und DEBIERRE wird der Plexus laryngeus von sympathischen Zweigen und von Fäden des Ramus externus n. lar. sup. gebildet.

Die deutschen Anatomen erwähnen diesen Plexus laryngeus nicht mehr. Nach unseren Erfahrungen können wir sagen, dass es richtiger ist, diese Bezeichnung Plexus laryngeus fallen zu lassen, denn er kann als normale constante morphologische Erscheinung nicht betrachtet werden und giebt daher nur Anlass zur Verwirrung. Thatsache ist, dass sympathische Zweige der Art. thyreoidea sup. entlang ein Geflecht bilden können, welches zuweilen einen Faden vom Ramus externus n. lar. sup. aufnehmen kann.

Und nun wollen wir jene Verbindungen erwähnen, welche zwischen dem Laryngeus sup., Sympathicus und Laryngeus inf. beschrieben worden sind. SOEMMERING[1] sagt: „Der Cardiacus superior zieht Fäden aus dem oberen und dem unteren Kehlkopfnerven". Nach LAUTH[2] verbindet sich der Ramus ext. n. lar. sup. mit dem oberen Herznerven, welcher dann zum Laryng. inf. zieht. ALPIGER schreibt: „Richtig ist, dass vom Sympathicus bisweilen Nerven vom Volumen eines Cardiacus sup. zum Recurrens gehen". ALPIGER illustriert in einer Figur diese Verbindung. DROBNIK betrachtet die Verbindung des Recurrens mit dem Halssympathicus als eine constante. „Der Faseraustausch zwischen dem Halstheil des sympathischen Nervensystems und dem N. recurrens vagi ist constant und vollzieht sich durch die Vermittelung von Nervenästen, die hauptsächlich vom Ram. card. sup. zum N. recurrens vagi selbst oder zu seinen Zweigen ziehen." Die Verbindungszweige kommen vom oberen Halsknoten, hängen mit dem Ramus communicans des Ramus ext. n. lar. sup. zusammen und verbinden sich vor der Verästelung der Art. thyreoidea inf. mit dem unteren Kehlkopfnerven. Die Figur zeigt zwei Fäden, welche vom oberen Halsknoten kommend direct zum

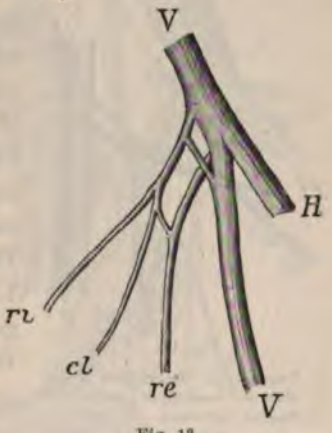


Fig. 13.

V Vagus *H* Hypoglossus. *cl* Ramus cardiacus laryngei. *re* Ramus externus. *ri* Ramus internus.

[1] SOEMMERING, Vom Baue des menschl. Körpers. 1791.

[2] LAUTH, Neues Handbuch der pr. Anat. 1836.

Stamme des unteren Kehlkopfnerven unterhalb der Schilddrüse gehen. Manchmal ist die Anastomose zwischen den Sympathicuszweigen und dem Recurrens in Form eines Geflechtes vorhanden.

Das enge Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus demonstriert die hochinteressante Anomalie, die Prof. LENHOSSÉK[1] beim Menschen beobachtet hat. Wegen seiner Wichtigkeit geben wir die Beschreibung mit der Abbildung (Fig. 15). „Der Recurrens entspringt nicht vom Vagus wie gewöhnlich, sondern von einem Ganglion, welches wir Ganglion laryngeum nennen. Dieses Ganglion ist länglich, halbmondförmig, 1,5 cm lang, 0,6 cm dick. Eine schwache Einschnürung theilt es in einen vorderen und hinteren Theil. Der normal starke (2,5 cm) Recurrens scheint aus diesen beiden Theilen mit zwei Wurzeln zu entspringen. Mit dem Ganglion sind mehrere Nervenfäden verbunden; ein Theil geht zum Ganglion, der andere Theil verlässt es. Zur ersten Gruppe gehören: vom Vagus nimmt es eine Wurzel auf (a), diese entspringt wie unter normalen Verhältnissen der Recurrens, ist 0,5 cm stark und geht zum vorderen Ende des Ganglion. Die anderen Wurzeln erhält das Ganglion vom Sympathicus. Zum vorderen Theil kommt ein Nervenfaden (b), welcher von der Ansa Vieusseni und vom unteren Halsknoten entspringt. Stärkere Aeste nimmt das Ganglion am hinteren Ende auf: ein starker Zweig (c), welcher vom ersten Brustknoten entspringt und mit zwei Aestchen zum Ganglion geht. Die peripheren Aeste des Ganglions sind Folgende: Ein Zweig zum Vagus (d), ein Zweig zur Aorta (e), ein anderer Zweig (f) zur Trachea, wo er in mehrere Aestchen zerfällt und zuletzt ein Zweig (g), welcher zum Herzgeflecht zieht." „Was den Ursprung des unteren Kehlkopfnerven betrifft, beweist unser Fall, dass seine Fasern grösstentheils von jenem

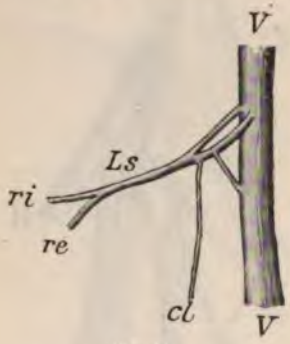


Fig. 14.

V Vagus. *Ls* Laryngeus sup. *cl* Ramus cardiacus laryngei. *re* Ramus externus. *ri* Ramus internus.

[1] LENHOSSÉK, Természettudományi Közlöny. 1889.

Theile des Sympathicus stammen, welcher sich vom unteren Halsknoten bis zum ersten Brustknoten erstreckt." Dieser Fall ist die einzige Beobachtung beim Menschen, welche das innige Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus in so auffallender Weise beleuchtet.

Unsere Untersuchungen[1], welche sich auf die isolierten Nervenbündel des Recurrens beziehen, haben beim Pferde zwei Thatsachen erzielt. Es ist uns gelungen, beim Pferd die isolierten respiratorischen und phonatorischen Nervenbündel in der Länge von 88 cm in den Stämmen des Recurrens und des Vagus zu verfolgen. Beim Menschen und beim Hunde ist uns die Isolierung am Hals gelungen, hingegen war dieselbe beim Rind wegen der ausgedehnten Geflechtbildung nicht ausführbar. Die zweite erkannte Thatsache war die enge Verbindung des isolierten respiratorischen Bündels mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci. Das isolierte phonatorische Bündel hängt mit einem Faden theils mit der Ansa Vieusseni, theils mit dem Ramus cardiacus zusammen. Auffallend ist aber das enge Verhältniss des respiratorischen Bündels mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci. Acht Verbindungsfäden waren in verschiedenen Richtungen zu sehen. Auf diese Thatsachen kommen wir noch zurück. In den anatomischen Lehrbüchern wird allgemein erwähnt, dass der Recurrens an seiner Ursprungsstelle die Rami cardiaci, in seinem weiteren Verlaufe die Rami tracheales und oesophagei entsendet. Die Verbindung des Recurrensstammes mit den unteren Halsknoten erwähnen: Henle, Schwalbe, Rauber, Henle-Merkel, van Gehuchten. Nach Krause soll ausserdem noch ein Verbindungszweig zum unteren Halsknoten gehen.

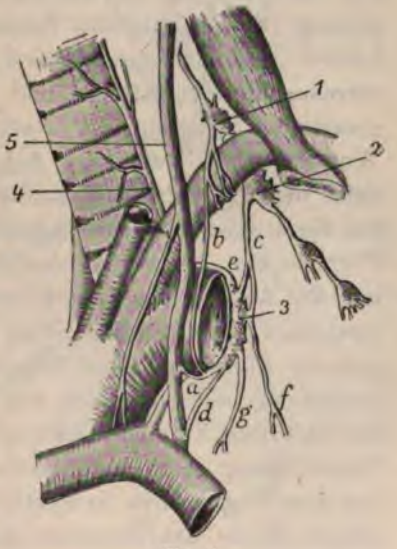


Fig. 15.

[1] Ónodi, Archiv f. Laryngologie. 1898. Bd. 7.

Den Zusammenhang des Recurrens mit den aus den mittleren und unteren Halsknoten kommenden Herznerven beschreibt HYRTL, HARTMANN, SAPPEY. Nach QUAIN-HOFFMANN hängt der Recurrens mit dem oberen Herznerven zusammen. Sonst werden bei der Beschreibung des unteren Kehlkopfnerven einfach erwähnt die Rami cardiaci, welche an der Bildung des Plexus cardiacus theilnehmen und nahe seines Ursprunges entstehen.

Bei unseren Untersuchungen haben wir besonderes Gewicht auf den Ursprung der Herznerven gelegt. Wir geben eine Abbildung (Fig. 16) unseres Präparates, welche sich auf das Pferd bezieht und klar demonstriert, theils das Verhältniss des Recurrens zum Sympathicus und zu den Rami cardiaci, theils die gesammten Wurzeln der Nervi cardiaci. Man sieht gut jene Wurzeln der Herznerven, welche vom Vagusstamme kommen, unter denen die erste, d. h. die oberste, von der Ursprungsstelle des Recurrens aus dem Vagusstamme; man überblickt auch jene Wurzeln der Herznerven, welche dem vom unteren Halsknoten und der Ansa Vieusseni kommenden sympathischen Nervenstrang entspringen. Ausserdem ist zu sehen, dass der Recurrens durch mehrere Fäden mit dem Sympathicus zusammenhängt und dass sowohl aus dem centralen wie auch aus dem peripheren Theile des Recurrens Verbindungszweige zu den Herznerven gehen. Diese Untersuchung zeigt uns, dass die Wurzeln der Herznerven sich aus dem Vagus, dem Sympathicus, dem centralen und dem peripheren Theile des Recurrens zusammensetzen. Wenn wir diese Thatsachen mit den anatomischen Verhältnissen der isolierten phonatorischen und respiratorischen Nervenbündel des Recurrens in Zusammenhang bringen, so können wir sagen, dass die mitgetheilten Verbindungen des Recurrens mit dem Sympathicus und mit den Nervi cardiaci zum grössten Theil mit dem im Stamme des Recurrens isoliert verlaufenden respiratorischen Nervenbündel zusammenhängen. Somit haben wir unsere Untersuchungen mit bisher bekannten Angaben erörtert und unsererseits die anatomische Forschung der Kehlkopfnerven beendigt. Die Kenntniss der feineren anatomischen Verhältnisse zeigt deutlich jene Richtung, welche die physiologische und experimentelle Forschung einzuschlagen hat. Es häufen sich viele offene Fragen, deren Lösung

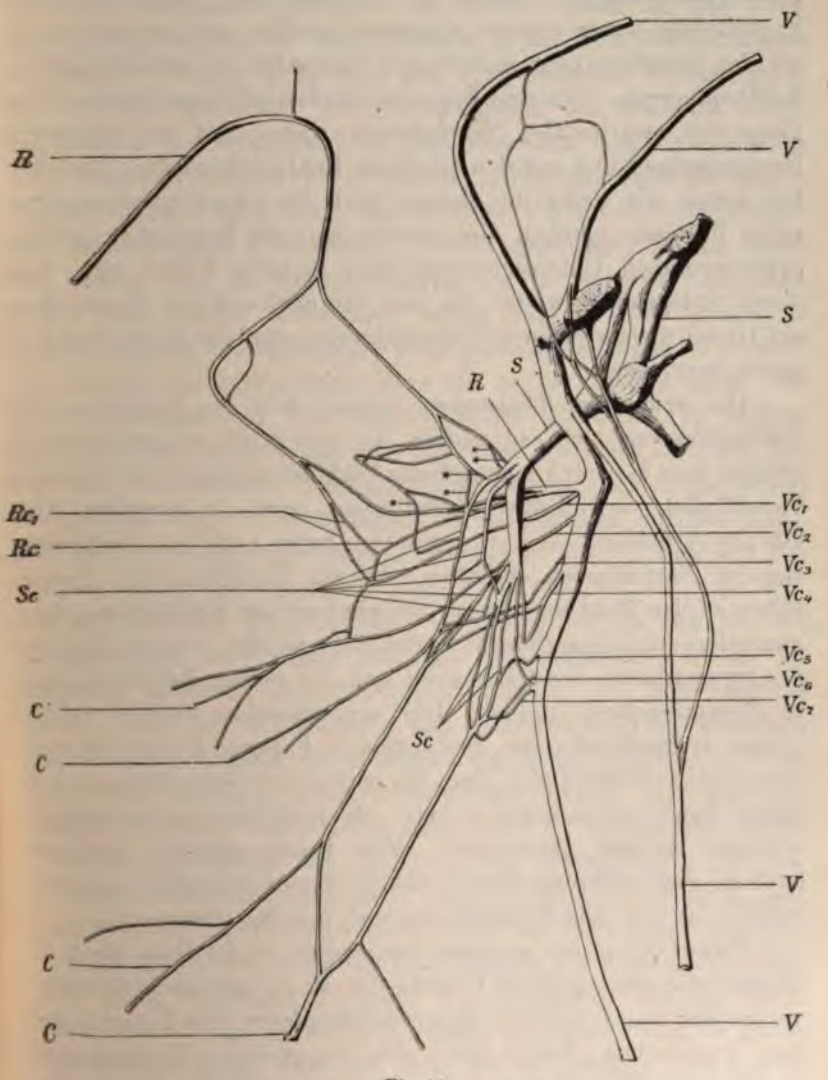


Fig. 16.

Pferd. Es sind die Verbindungen des Recurrens mit dem Sympathicus und den Rami cardiaci sowie die einzelnen Wurzeln der Rami cardiaci zu überblicken. *V* Vagus. *R* Nervus laryngeus inferior. *C* Rami cardiaci. *S* Ansa Vieusseni, von welcher ein Strang die sympathischen Wurzeln *Sc* zu den Rami cardiaci entsendet, ferner mehrfache Verbindungen mit dem Recurrens eingeht. Vc_1—Vc_7 Wurzeln der Rami cardiaci aus dem Vagus, unter ihnen stammt der erste Vc_1 aus der Ursprungsstelle des Recurrens. *Rc* Verbindung des Ramus cardiacus mit dem peripheren Theile des Recurrens.

von experimentellen Studien zu erwarten ist. Die bisherigen Experimente waren zumeist allgemein gehalten und bewegten sich um den sensiblen oder motorischen Charakter der entsprechenden Kehlkopfnerven. Einzelne Experimente beschäftigten sich mit der Frage der centripetalen Nervenfasern, andere mit den isolierten Nervenzweigen und mit den einzelnen Kehlkopfmuskeln. Absichtlich haben wir weder die eigenen noch die bekannten experimentellen Resultate berührt, dies behalte ich nach Beendigung meiner experimentellen Untersuchungen einer anderen Arbeit vor. Bei dieser Gelegenheit wollte ich nur die anatomischen Thatsachen auf Grund meiner eigenen Untersuchungen und der bekannten Angaben besprechen.

Die erwähnten Thatsachen zeigen, dass die Anatomie der Kehlkopfnerven nicht so einfach ist, wie es im Allgemeinen erscheint, dass die durch mannigfache Verbindungen und verschiedene Faserbündel verwickelten Verhältnisse noch so mancher Aufklärung bedürfen. Wie wir gesehen haben, sind im Recurrensstamme Nervenfasern enthalten, die zur Luftröhre, zur Speiseröhre, zu den Muskeln und zur Schleimhaut des Kehlkopfes gehen, ausserdem sind Faserbündel vorhanden, welche mit den Bahnen des Sympathicus, der Herznerven und des oberen Kehlkopfnerven in Zusammenhang stehen. Die sympathischen Bündel führen ebenso sympathische wie cerebrospinale Fasern. Ueber die cerebrospinalen Faserbündel des sympathischen Grenzstranges und seiner Rami communicantes habe ich ausführlich in meinem erwähnten Aufsatz gesprochen. Wir haben gesehen, dass das isolierte respiratorische Bündel des Recurrens besonders innig verbunden ist mit dem Sympathicus und mit den Herznerven.

Ferner haben wir gesehen, dass sowohl in der Bahn der Ansa Galeni, wie besonders im Gebiete des Musc. arytaenoideus transversus der obere und der untere Kehlkopfnerv ihre Fasern mehrfach austauschen. Theils durch die sympathischen Verbindungen, theils durch die mehrfachen Anastomosen des oberen und unteren Kehlkopfnerven ist die morphologische Grundlage zum Austausch der Nervenfasern verschiedenen Ursprunges und Verlaufes gegeben. Diese Untersuchungen zeigen die Richtung, die verschiedenen Fragen, die ihrer Lösung harren. Wir müssen die Bedeutung

der verschiedenen Faserbündel feststellen, welche in der Bahn des Laryngeus superior und besonders in der Bahn des Recurrens verlaufen. Welche Rolle fällt den sympathischen Verbindungen zu, welche Bedeutung den Verbindungen des isolierten respiratorischen Nervenbündels im Recurrens mit dem Sympathicus und den Nervi cardiaci? Wir müssen die Bestimmungen der centrifugalen Bahnen bezeichnen, den weiteren Verlauf und das Schicksal der einzelnen Faserbündel, welche gegenseitig in die Bahn des oberen oder des unteren Kehlkopfnerven eintreten. Ich habe somit jene Fragen bezeichnet, welche experimentell untersucht werden müssen und unsererseits auch planmässig bearbeitet werden. Ich möchte noch erwähnen, dass ich es für wichtig halte, die Aufmerksamkeit auf die experimentellen Methoden zu lenken. Ich empfehle das Studium der isolierten Nervenbündel mit den von mir und RUSSEL angegebenen Methoden. Ich selbst werde die sympathischen Verbindungen, im Allgemeinen mit den Kehlkopfnerven zusammenhängenden Nervenäste untersuchen, den Recurrens selbst theilweise mit meiner älteren Methode, die anatomisch isolierten Muskelzweige, theilweise mit der von RUSSEL beschriebenen und seither von mir angewendeten Methode die künstlich isolierten Recurrensbündel prüfen. Ich lege Gewicht darauf, dass bei der Reizung und Untersuchung der einzelnen ganzen oder durchschnittenen Bündel der Zusammenhang zwischen Vagus und Kehlkopf nicht unterbrochen werde. Bei dem bisherigen Verfahren wurde der Kehlkopfnerv im Ganzen oder durchschnitten untersucht, bei den von mir angegebenen und angewandten Methoden kann jedes einzelne Bündel im Ganzen oder durchschnitten untersucht werden, ohne dass der Contact zwischen den Nervenstämmen, Peripherie und Centrum gänzlich unterbrochen wird. Nach Beendigung unserer experimentellen Studien werde ich an dieser Stelle meine Erfahrungen mittheilen. Es ist meine feste Ueberzeugung, dass wir ohne die vollständige anatomische und physiologische Kenntniss der Kehlkopfnerven die zahlreichen Streitfragen nicht lösen werden, welche seit vielen Jahren noch immer in der Pathologie der nervösen Kehlkopferkrankungen auf der Tagesordnung stehen.

5.

DAS SUBCEREBRALE PHONATIONSCENTRUM.

Vorgetragen in der ungarischen Academie der Wissenschaften
am 13. Februar 1899.

Von Dr. A. ÓNODI, Prof. an der Universität Budapest.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö" (Math. und Naturwiss. Anzeiger) Bd. XVII, pag. 467—480.

Meine auf diesen Gegenstand bezüglichen experimentellen Untersuchungen sind ausführlich in meinen veröffentlichten Arbeiten* beschrieben. Das Resultat dieser Untersuchungen ist, dass beim Hunde am Boden des vierten Gehirnventrikels zwischen dem Vagusgebiete und den hinteren Vierhügeln ein zweites Phonationscentrum existiert, welches die Stimmbildung aufrecht erhält auch dann, wenn das Gehirn zwischen den vorderen und hinteren Vierhügeln von dem verlängertem Marke total abgetrennt wird; andererseits aber wird die Stimmbildung aufgehoben und nur die Athmung bleibt erhalten, wenn das verlängerte Mark oberhalb des Vagusgebietes, also unterhalb des subcerebralen Phonationscentrums total durchschnitten wird. Bei dieser Gelegenheit befasse ich mich nicht mit den diese Frage betreffenden bekräftigenden oder widersprechenden Aufsätzen, ich erwähne nur die bekräftigende Arbeit des Professor BECHTEREW**, ferner die Aufsätze von KLEMPERER*** und GRABOWER†. Auf diese letzteren habe ich meine

---

* Die Phonation im Gehirn. Berl. klin. Wochenschr. 1894. Die Innervation des Kehlkopfes. Wien 1895.

** BECHTEREW, Neurologisches Centralbl. 1895.

*** Archiv f. Laryngologie. 1895.

† Archiv f. Laryngologie. 1897.

Bemerkungen in zwei Notizen* und in einer Arbeit** gemacht und halte ich dieselben auch aufrecht.

In dieser letzterwähnten Arbeit habe ich jene Richtung bezeichnet, welche ich zur Lösung der Frage eingeschlagen habe. Ich habe meine experimentellen Resultate mit meinen Untersuchungen der phonierenden perforierten Neugeborenen und Missgeburten verglichen und in Einklang gebracht. Ich habe die Leiter der Kliniken Prof. Th. KEZMARSZKY und W. TAUFFER ersucht, mir jene perforierten Neugeborenen und Missgeburten, welche während ihrer Lebensdauer phonierten, gütigst zur Verfügung zu stellen.

Während zwei Jahre kamen zwei phonierende perforierte Neugeborene und zwei phonierende Missgeburten zur Beobachtung. Diese Untersuchungen beschreibe ich bei dieser Gelegenheit, welche gleichfalls den physiologischen Experimenten entsprechen und dabei sich auf den Menschen beziehen und bei der Frage des subcerebralen Phonationscentrums von Wichtigkeit sind.

Die diesbezüglichen präcisen Beobachtungen und Untersuchungen sind leider so selten, dass man kaum ein, zwei Beobachtungen verwerthen kann. Die Publicationen erwähnen nur im Allgemeinen, dass die Missgeburten während ihrer Lebensdauer Laute gegeben haben, aber die vorhandenen Gehirntheile wurden weder anatomisch noch histologisch untersucht. Es sind die histologischen Untersuchungen des Rückenmarkes und des verlängerten Markes veröffentlicht worden, aber von den Lebenserscheinungen der Missgeburten ist nichts erwähnt. Dabei muss in Betracht gezogen werden, dass viele Missgeburten todt geboren werden und dass die Mehrzahl der Untersuchungen an dem in den Sammlungen aufbewahrten Material vorgenommen wurde. Was die perforierten Neugeborenen betrifft, so sind wir in derselben Lage. Ein Theil der operierten Neugeborenen ist todt, der andere Theil wird wegen Schonung der Mutter und der Umgebung, unmittelbar nach der Operation ins Wasser getaucht.

* Archiv f. Laryngologie. 1895, 1897.

** Zur Pathologie der Phonationscentren. Monatsschr. f. Ohren-, Kehlkopfkrankh. etc. 1898. Pathologie des centres de la phonation. Revue hebdomadaire de Laryngologie. 1898.

Es bleiben somit jene perforierten Neugeborene zurück, welche während ihrer kurzen Lebensdauer auch phonierten. Diese Fälle sind einfach erwähnt, aber keine einzige Untersuchung ist mitgetheilt, welche sich auf die zerstörten und intact gebliebenen Gehirntheile der phonierenden perforierten Neugeborenen beziehen würde. In neuerer Zeit macht die conservative Richtung der Geburtshilfe die Perforation der Neugeborenen noch seltener.

Ich werde die einzelnen diesbezüglichen Mittheilungen erwähnen, ferner unsere Untersuchungen, mit deren experimentellen Resultaten in Einklang bringen. Unsere Beobachtungen beziehen sich auf fünf Fälle. Ein Anencephalon, welcher todt zur Welt kam, konnte meinerseits nicht ausgenutzt werden. Ein zweiter Anencephalon lebte drei Tage und gab Laute. Zwei perforierte Neugeborene phonierten während ihrer Lebensdauer. Eine Missgeburt, Hämato-meningoencephalocele, lebte einen Tag und gab Laute.

Fig. 1.
Mensch. Perforierter Neugeborener. Abtrennung des Grosshirnes in der Gegend der vorderen Vierhügel.

Was die perforierten phonierenden Neugeborenen betrifft, so habe ich in der Literatur FAVRE's Fall* gefunden, wo aber eine präcise anatomische Untersuchung fehlt. Bei einem perforierten Neugeborenen, welcher schrie, räumte FAVRE mit seinem Zeigefinger die Gehirnmassen aus, angeblich blieb nur die Medulla und das Kind schrie weiter; dann wurde das Kind durch Zerstörung der Medulla getödtet. Bei diesem Vorgehen fiel eine präcise anatomische Untersuchung der Gehirntheile weg, und es konnten nach der Ausräumung mit dem Zeigefinger, das blutige Gebiet, die Gehirntheile, nur durch die Kopfwunde beurtheilt werden, und daher kann von einer Verwerthung gar keine Rede sein.

Einen perforierten phonierenden Neugeborenen übergab mir gütigst Professor W. TAUFFER. Der perforierte Neugeborene

* VIRCHOW's Archiv. 1895. Bd. 139.

gab nach der Operation Laute und athmete. Ich behandelte den ganzen Kopf mit dem Gehirne mit Formalin und untersuchte das so in seiner Lage gehärtete Gehirn. Die Untersuchung hat neben den Läsionen der Hemisphären gezeigt, dass das Gehirn der vorderen Quadrigemina von der Medulla durchtrennt ist. Die hinteren Quadrigemina und die Pons Varoli sind vollkommen intact, der proximale Theil der vorderen Quadrigemina und die Pedunculi cerebri sind zerstört. Die Zerstörung des rechten Pedunculus reicht bis zur durchsichtigen, kaum 1 mm dicken äusseren Fläche desselben. Aber $^1/_2$ cm oberhalb dieser äusserst dünnen Verbindung vertieft sich nach aussen in den Sehhügel eine 2 cm tiefe Läsion, so dass die Durchtrennung als fast vollkommen betrachtet werden muss. Die Figur 1 bezieht sich auf dieses Präparat, welches aber bei den mehrfachen Demonstrationen litt, die beschriebene äusserst feine Verbindung des rechten Pedunculus ist abgerissen und daher in der Figur nicht wiedergegeben. Den *zweiten* perforierten phonierenden Neugeborenen hatte die Güte mir Professor Th. KEZMARSZKY zu überlassen. Dieser Neugeborene athmete und phonierte ebenfalls nach der Operation. Das perforierende Instrument ging durch die rechte mittlere Schädelgrube und trennte mit einer theilweisen Zerstörung der rechten Temporal- und Occipitallappen und der rechten Kleinhirnhemisphäre, das Gehirn von der Medulla vollkommen ab, an jener Stelle, wo die Pedunculi mit dem Gehirne zusammenhängen. Die Figur 2 illustriert dieses Präparat. Diesen beiden Figuren füge ich zwei Abbildungen hinzu, welche sich auf zwei entsprechende Experimente beziehen und die aufbewahrten Präparate illustrieren, und in vollkommenem Einklang stehen mit jenen bei den perforierten phonierenden Neugeborenen gefundenen Verhältnissen. Die Figur 3 entspricht der Figur 1 und zeigt die Medulla eines Hundes, bei welchem das Gehirn in der Höhe der vorderen Quadrigemina vollständig durchtrennt wurde und die Phonation nicht gelitten hat. Die Figur 4 entspricht der Figur 2 und zeigt das Gehirn eines Hundes mit der

Fig. 3.

Hund. Totale Abtrennung des Grosshirns in der Höhe der vorderen Vierhügel.

vollständigen Durchtrennung des Gehirnstammes, bei welchem die Phonation ungestört blieb.

Was die hemi- und anencephal phonierenden Missgeburten betrifft, so finden wir in der Litteratur nur ARNOLD's* Beobachtung. SCHÜRHOFF** hat zwar in 8 Fällen das centrale Nervensystem hemicephaler Missgeburten untersucht, aber er macht keine Mittheilungen weder von den Lebenserscheinungen noch von der Phonation. ARNOLD's hemicephale Missgeburt lebte drei Tage. Der Stimmbildung wird nur mit wenigen Worten Erwähnung gethan. Das Kind schrie selten, sonst stöhnte es viel. Beim Auslösen der Reflexe durch Nadelstiche schrie das Kind nicht. Die Reizung der Hirntheile mit dem faradischen Strome bewirkte Contraction der Muskeln des Augenlides, des Nackens, des Gesichtes und der Muskeln der linken Extremitäten. Unter diesen, während der Reizungen angestellten Beobachtungen sind keine auf die Stimmbildung bezugnehmenden Daten enthalten. Die Untersuchung zeigte, dass Rudimente des Kleinhirnes vorhanden und die Corpora quadrigemina von einer Lamelle gebildet werden, von den Hirnnerven fehlt der N. olfactorius; der N. opticus nimmt seinen Ursprung von der vor der erwähnten Lamelle der Corpora quadrigemina gelegenen Lamelle. Das Gehirn besteht aus cystischen Hohlräumen.

Fig. 2.

Mensch. Perforierter Neugeborener. Totale Durchtrennung des Gehirnstammes, Läsion der rechten Temporal- und Occipitallappen.

---

* ZIEGLER, Beiträge zur Pathologie. II.

** Bibliotheca medica. 1894.

Ein Anencephalon, welches todt geboren war, wurde von uns nicht weiter untersucht. Ein zweites Anencephalon, welches fast drei Tage lebte, überliess mir gütigst Prof. Th. KEZMARSZKY zur Untersuchung. Eine 20jährige Frau hatte diese Missgeburt geboren, in ihrer Familie sind schon mehrere Anencephalon-Geburten vorgekommen. Die Missgeburt lebte 61 Stunden und während dieser Zeit gab sie Laute von sich und weinte.

Die gut entwickelte Missgeburt zeigt am Kopfdache zwei dunkelbläulichrothe Wülste, welche in die behaarte Kopfhaut übergehen, an seiner Stelle ist ein Defect des knöchernen Schädeldaches vorhanden. Diese Wülste stehen mit dem verlängerten Marke in Verbindung. Vom centralen Nervensystem ist das Rückenmark gut ausgebildet, das verlängerte Mark und die Varolsbrücke ist entwickelt, an Stelle des Kleinhirn ist eine transparente Lamelle vorhanden, sonst ist überall ein röthliches gallertiges Gebilde bis zu den erwähnten Wülsten zu sehen.

Fig. 4.
Hund. Totale Durchtrennung des Gehirnstammes.

Die Fig. 5 zeigt von hinten das centrale Nervensystem des Anencephalon, dem Sitze des Kleinhirns entsprechend ist nur eine flache bräunlich gallertartige Substanz zu sehen, welche sich nach oben stärker ausbreitet. Von vorne zeigt die Fig. 6 das centrale Nervensystem, man erkennt in Fortsetzung des Rückenmarks das verlängerte Mark und die Brücke.

Das ganze Präparat, von dem mit der Haut verbundenen Wulst bis zum Rückenmark ist mikroskopisch von Herrn Dr. VEREBÉLYI, Assistenten am pathologischen Institute, untersucht worden. Wir geben die wesentlichen Daten dieser Untersuchung, die genaue ausführliche pathologische Studie wird von ihm später veröffentlicht werden.

Am Uebergange des Rückenmarkes in das verlängerte Mark ist der geschlossene Canalis australis mit hohem Epithel zu finden, die graue Substanz ist gut entwickelt, ebenso die vorderen

Hörner, aus welchen die Wurzeln des Accessorius und der obersten Halsnerven ausgehen. Aufwärts ist der Kern des Hypoglossus, ferner des Vagus mit stark entwickelten Ganglienzellen und Wurzelfasern zu sehen. Es sind zu verfolgen die Kerne des Hypoglossus, Vagus und Glossopharyngeus und ihre Wurzelfasern, ferner die Kerne des Acusticus, Facialis und ihre Wurzelfasern. Das Dach des vierten Ventrikels wird von hohem Cylinderepithel bedeckt, welches mit einem papillären gallertartigen Gewebe verwachsen und zum Theil in der Mittellinie gespalten ist. Der Lage des Kleinhirns entsprechend ist dieses letztgenannte Gewebe zu finden. Das Corpus restiforme ist zu rudimentären kleinen Theilchen des Kleinhirnes zu verfolgen. Die Kerne des Abducens, des Trigeminus und des Oculomotorius sind zu finden.

Fig. 5.

Mensch. Anencephalon. Das centrale Nervensystem vom Rückenmark bis zur Kopfhaut mit dem Wulste von hinten betrachtet.

Aufwärts sind in den erwähnten papillären gallertartigen Geweben solche Gebilde zu finden, welche ihrer Structur und ihrer anatomischen Lage entsprechend die rudimentären Theile der Corpora quadrigemina, der Thalami optici und Tracti optici zeigen. Es sind zwei aus Gliagewebe bestehende blasenartige Gebilde vorhanden, der Lage des Grosshirns entsprechend, welche von den papillären Wucherungen der weichen Hülle vielfach comprimiert und deformiert erscheinen. Der beschriebene und makroskopisch in den Figuren 5 und 6 sichtbare Wulst ist eine embryologische Aberration des die weichen Hüllen bedeckenden Fettgewebes und enthält kein Gliagewebe.

Der von ARNOLD beschriebene Fall und der von uns beobachtete Fall stellt solche Missgeburten vor, bei welchen während ihrer Lebensdauer eine entschiedene Phonation vorhanden war, und, wie die Untersuchung zeigte, der Boden des vierten Gehirnventrikels bis zu den Corpora quadrigemina ausgebildet

war. Diese zwei phonierenden Missgeburten stehen in vollem Einklang mit den von uns beschriebenen zwei phonierenden perforierten Neugeborenen, ebenso einzeln wie insgesammt entsprechen sie auch vollkommen jenen Resultaten unserer experimentellen Untersuchungen, nach welchen die Phonation möglich ist bei vollständigem Mangel des Gehirns, wenn die Gehirntheile vom Vagusgebiete bis zu den Corpora quadrigemina vorhanden sind, d. h. das von uns festgestellte Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums intact ist.

Prof. Th. KEZMARSZKY hatte die Güte mir eine Missgeburt zu überlassen, bei welcher eine Hämatomeningo-encephalocene vorhanden war. Die Missgeburt lebte einen Tag und gab Laute von sich. In dem mit Blut gefüllten Meningealsack war ein grosser Theil des Gehirns zu finden, das Kleinhirn fehlte und der vierte Gehirnventrikel war ganz offen zu sehen. Am occipitalen Theile des Schädels befindliche fluctierende Geschwulst entleert bei der Eröffnung 530 ccm blutige Flüssigkeit. In dem eröffneten Sack ist ein Theil des Grosshirnlappens zu sehen, ferner der Boden des vierten Ventrikels, welcher in Folge des vollständigen Fehlens des Kleinhirns im Sacke offen ist und mit demselben durch eine blutreiche meningeale Lamelle zusammenhängt. Am proximalen Ende des Bodens des vierten Ventrikels erscheinen zwei Höcker, zwischen welchen der Sulcus longitudinalis des vierten Ventrikels sich fortsetzt. Die Figur 7 zeigt diesen Abschnitt des Präparates. Man sieht den offen liegenden Boden des vierten Ventrikels mit den zwei proximalen Höckern, welche den Corpora quadrigemina zu entsprechen scheinen und den offen gebliebenen Aquaeductus Sylvii begrenzen. Die patho-histologische Untersuchung, welche Herr Dr. VEREBÉLYI ausführt, wird die pathologischen Veränderungen in dem Aufbau des Gehirnes näher aufklären. Für uns hat dieser Fall einer Haemato-meningo-

Fig. 6.

Mensch. Anencephalon. Das centrale Nervensystem vom Rückenmark bis zur Kopfhaut mit dem Wulste von vorne betrachtet.

encephalocele schon jetzt das Interesse, dass das Kleinhirn vollständig fehlte und bei dem beschriebenen Befund die Missgeburt phonierte.

Von zwei Mittheilungen habe ich Kenntniss, welche neben den Beobachtungen der Lebenserscheinungen präcise histologische Untersuchungen enthalten; in einem Falle war es ein Anencephalon, im zweiten Fall ein perforiertes Neugeborenes, welche alle beide während ihrer Lebensdauer keine Laute gaben. DARVAS* hat den vorhandenen Gehirntheil eines Anencephalon zum Gegenstande gründlicher histologischer Untersuchung gemacht. Das verlängerte Mark war bis zur gemeinschaftlichen Austrittsstelle des neunten und zehnten Hirnnervenpaares erhalten. Die Missgeburt lebte drei Tage, während dieser Zeit war jedoch nicht die geringste Spur einer Stimmbildung zu beobachten. Der zweite Fall bezieht sich auf einen perforierten Neugeborenen, an welchem KEHRER** in Bezug auf das Respirationscentrum experimentierte. Er perforierte das lebende Kind, nach Eröffnung des Schädeldaches mit einem Trepan zertrümmerte er das Gehirn und entleerte es theils durch Ausspülung, theils mit dem Kranioklasten. Der perforierte Neugeborene gab keine Laute, nahm in der Minute sechs Athemzüge, durch mechanische Reize der Handfläche und der Sohle konnten reflectorische Bewegungen der entsprechenden Extremitäten hervorgerufen werden, dagegen rief die Reizung der Haut keine Reflexe hervor. Ich habe auch brieflich die Bestätigung des Herrn Prof. KEHRER erhalten, dass keine Stimmbildung vorhanden war. Nach zehn Minuten wurde der Neugeborene zu einem physiologischen Experiment benutzt. Es fehlte „das ganze Gross- und Mittelhirn und der grösste Theil des Kleinhirns, von letzterem waren nur noch Fetzen mit den Kleinhirnschenkeln und die Varolsbrücke übrig. Dagegen war das ganze verlängerte Mark erhalten." Es wurde mit einer Scheere in der Mitte des Calamus scriptorius ein Querschnitt durch die Oblongata geführt, ohne Effect, fünf Minuten später hörte die Athmung durch einen tieferen Schnitt sofort auf. Seine eigenen Worte lauten: „Dass die

---

* ÓNODI, Adatok a gége beidegzéséhez. 1894.

** KEHRER, Zeitschr. f. Biologie. 1894. XXVIII Bd.

Durchschneidung der Medulla oblongata 1 cm oberhalb der Spitze des Calamus scriptorius weder die regelmässige rhythmische Brustathmung, noch die Hand- und Fussreflexe unterbricht, ja nicht einmal beide Bewegungsarten verändert. Wohl aber zeigt das

Fig. 7.

Mensch. Haemato-meningo-encephalocele. Der rhomboideale Boden des vierten Gehirnventrikels liegt offen, oberhalb desselben die vom geöffneten Sacke bedeckten Grosshirnhemisphären.

Ergebnis des zweiten gerade unter der Spitze des Calamus scriptorius gelegten Querschnitts, wonach die Athmung und die Extremitätenreflexe sofort aufhörten, dass in dem durch die beiden Schnitte isolierten unteren Endstück der Medulla oblongata entweder die classischen Athmungscentren oder doch die Wurzeln der wesentlich bei der Athmung betheiligten sensiblen oder motorischen Athmungsnerven enthalten sind. Man muss daraus folgern, dass auch beim Menschen die hauptsächlichen Athmungs-

centren an denselben Stellen liegen, wie bei den zu den Versuchen benutzten Säugethieren."

IHLBERG hat das verlängerte Mark histologisch untersucht. Der erwähnte obere Schnitt ging knapp unter jener Linie, wo die Pyramiden und die Oliven die Varolsbrücke berühren. Die ersten 30 Schnitte treffen nur mehr oder weniger die linke Hälfte. In derselben erblickt man den linken dorsalen Acusticuskern und die untersten Partien des linken Facialiskernes. Nach und nach erreichen die Schnitte auch die beiden gemeinschaftlichen sensorischen Kerne der Vagi und Glossopharyngei und die Oliven, welche Gebilde sich bis zum 172. Schnitt hinunter verfolgen lassen, wo zunächst die hinteren Theile des Querschnittes durch die zweite Operation fortfallen. Der 60. Schnitt zeigt rechts und links den obersten Theil des vorderen oder motorischen Vagus- und Glossopharyngeuskernes. Dieselben sind nach unten klar bis zum 109. Schnitt zu verfolgen; — bemerkt man vom 46. bis zum 144. Schnitte die gemeinsamen aufsteigenden Vagus- und Glossopharyngeuswurzel, GIRKE's Respirationsbündel."

Diese äusserst wichtige Beobachtung KEHRER's zeigt unzweifelhaft, dass der oberhalb des Vagusgebietes durchgeführte Schnitt des verlängerten Markes die Phonation unmöglich macht und nur die Athmung bestehen kann. Das beim Hunde von uns angegebene Phonationsgebiet war schon zum grossen Theile zerstört und wurde durch den angegebenen Schnitt vollständig eliminiert, so dass während des Experimentes und während der ganzen Lebensdauer die Phonation und ihre Möglichkeit ausgeschlossen war.

Sowohl der Fall von DARVAS wie der Fall von KEHRER stehen in vollem Einklange mit den Resultaten unserer experimentellen Untersuchungen und erklären den Ausfall der Phonation. Unsere Experimente haben gezeigt, dass die totale Durschschneidung des verlängerten Markes oberhalb des Vagusgebietes die Phonation ganz aufhebt und nur die Athmung ermöglicht. Die Figur 8 stellt das Präparat eines Hundes dar, an welchem das verlängerte Mark oberhalb des Vagusgebietes total durchschnitten wurde, worauf die Phonation aufhörte, die Athmung fortbestand, die Stimmbänder konnten sich nach innen nicht bewegen und

nur einzelne den tieferen Inspirationen entsprechende excessive abductorische Bewegungen waren zu beobachten. Unsere an Hunden ausgeführten Experimente, die in den erwähnten Arbeiten ausführlich beschrieben sind, haben zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die Zerstörung der Phonationscentren in der Gehirnrinde haben keinen Einfluss auf die Phonation.

2. Die Zerstörung der grossen Gehirnganglien, Thalamus opticus, Corpus striatum, Nucleus lentiformis beeinflusst nicht die Phonation.

3. Die totale Abtrennung des Gehirnes in der Höhe der vorderen Corpora quadrigemina stört nicht die Phonation.

4. Die Läsionen des Kleinhirns üben keinen Einfluss auf die Phonation aus.

5. Die totale Durchtrennung des verlängerten Markes oberhalb des Vagusgebietes hebt sofort die Phonation auf und ermöglicht nur die Athmung.

Fig. 8.
Hund. Totale Durchtrennung der Medulla oblongata oberhalb des Vagusgebietes.

Auf Grund dieser experimentellen Resultate habe ich das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums festgestellt, welches nach den Messungen der ausgeführten Experimente, jenen Theil des verlängerten Markes, des Bodens des vierten Gehirnventrikels einnimmt, welcher sich 12 mm von den hinteren Corpora quadrigemina zu dem Vagusgebiet erstreckt. Das Intactbleiben dieses subcerebralen Phonationsgebietes bei vollständiger Ausschaltung des Gehirnes ermöglicht die Phonation, während die Ausschaltung dieses Phonationsgebietes durch einen Schnitt oberhalb des Vagusgebietes die Phonation aufhebt und nur die Athmung ermöglicht und einige den tieferen Inspirationen entsprechende excessive abductorische Bewegungen der Stimmbänder.

Diese experimentellen Resultate stehen in vollkommenem Einklang mit den bei den perforierten Neugeborenen und den Missgeburten gefundenen Verhältnissen.

Bei den phonierenden perforierten Neugeborenen und bei den phonierenden hemicephalen und anencephalen Missgeburten be-

stand die Phonation neben dem Mangel des Gehirnes, weil das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums intact geblieben war. Diese Fälle entsprechen jenen Thierexperimenten, wo wir das Gehirn in der Höhe der vorderen Corpora quadrigemina von dem verlängerten Marke total abgetrennt hatten.

Bei den nur athmenden und nicht phonierenden perforierten Neugeborenen und anencephalen Missgeburten war bei Mangel des Gehirnes keine Phonation vorhanden, weil auch das Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums fehlte. Diese Fälle entsprechen jenen Thierexperimenten, wo wir das Gehirn oberhalb des Vagusgebietes und unterhalb des subcerebralen Phonationsgebietes von dem verlängerten Marke total durchschnitten haben.

Ferner haben wir gesehen, dass bei den einzelnen Thierexperimenten die Läsionen des Kleinhirnes die Phonation nicht stören; dieser Thatsache entsprechen jene Fälle der erwähnten perforierten Neugeborenen und der Missgeburten, wo das Kleinhirn entweder verletzt wurde oder ganz fehlte.

Da sich unsere experimentellen Resultate in vollem Einklange befinden mit unseren auf die perforierten Neugeborenen und Missgeburten beziehenden Untersuchungen, so stellen wir den Satz auf, dass *das beim Hunde von uns festgestellte Gebiet des subcerebralen Phonationscentrums, auch beim Menschen existiert und zwar in ähnlicher Weise zwischen den hinteren Corpora quadrigemina und dem Vagusgebiete.*

6.

UEBER DIE RICHTIGE UNTERSCHEIDUNG DER COLLECTIVEN UND DISPANSIVEN OPTISCHEN SYSTEME.

Von ALOIS SCHULLER,
o. ö. Prof. am kön. Josefs-Polytechnicum zu Budapest.

Vorgetragen in der Sitzung des math. phys. Vereins am 22. März 1900.

Aus „Mathematikai és Physikai Lapok" (Math. u. Physik. Blätter). Bd. IX, pp. 153—164.

1. Man beurtheilt den Charakter eines centrierten optischen Systemes kugelförmiger brechender Flächen aus dem Vorzeichen der zweiten Brennweite; je nachdem das Vorzeichen positiv oder negativ ist, schliesst man auf collective oder dispansive Eigenschaft. Diese Folgerung ist aber sowohl bei einer sehr dicken Linse, als auch bei manchen Linsensystemen unrichtig, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Die zweite Brennweite (f') eines aus zwei Theilen (1. und 2.) zusammengesetzten centrierten Systemes ist bekanntlich

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{d + f_2 - f_1'}$$

wo f_1' die zweite Brennweite des, vom einfallenden Lichte getroffenen, ersten Theiles (1.), f_2 und f_2' die erste resp. zweite Brennweite des zweiten Theiles (2.) und d die Entfernung des ersten Hauptpunktes (P_2) des zweiten Theiles vom zweiten Hauptpunkte (P_1') des ersten Theiles bedeutet, wie in Fig. 1 angedeutet ist.

Bei einer einzigen Linse bedeutet d die Dicke der Linse in der Achse, und ist stets positiv.

Eine einzelne brechende Kugelfläche, sowie eine dünne Linse ist collectiv oder dispansiv, je nachdem die zweite Brennweite das positive oder negative Vorzeichen hat.

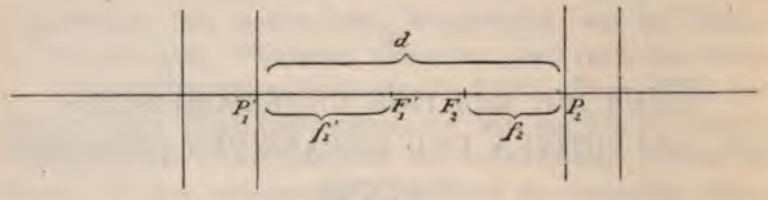


Fig. 1.

Um das Augenmerk nicht auf zweierlei Brennweiten richten zu müssen, empfiehlt es sich, f_2 aus dem bekannten Zusammenhange

$$\frac{f_2}{f_2'} = -\frac{N}{N'}$$

zu entnehmen, wodurch

$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{d - \frac{N}{N'} f_2' - f_1'} = \frac{f_1' f_2'}{\frac{N}{N'} f_2' + f_1' - d}$$

wird, wobei N und N' die absoluten Brechungscoëfficienten des ersten und letzten Mediums bedeuten.

Wenn man sich einprägt, dass in der Formel nur die zweiten Brennweiten vorkommen, so kann man die Striche der f weglassen und einfach schreiben:

$$f = \frac{f_1 f_2}{\frac{N}{N'} f_2 + f_1 - d} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I.)}$$

Ist der zweite Theil des Systemes (2) von Luft umgeben, so ist $N' = N$, daher

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_2 + f_1 - d} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II.)}$$

Biconvexe Linse.

2. Betrachten wir vorerst eine einzige Linse mit zwei convexen Flächen, bei der bekanntlich beide Flächen collectiv sind.

Es ist dann f_1 sowohl, als auch f_2 positiv, Gleichung I findet daher unverändert Anwendung. Es ist also bei der Biconvex-Linse

$$f \gtreqless \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix}, \text{ je nachdem } \frac{N}{N'} f_2 + f_1 \gtreqless d.$$

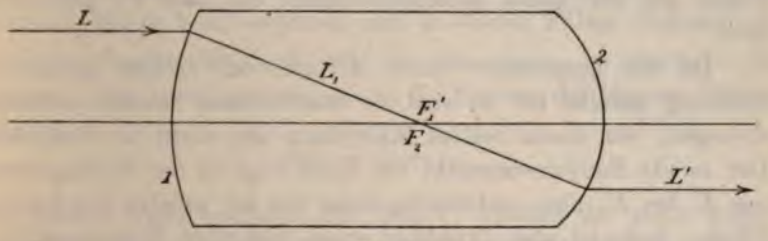


Fig. 2.

Nach der bisher üblichen Auffassung wäre also die Linse im ersten Falle eine Sammellinse, im letzten eine Zerstreuungslinse, was aber bei einer sehr dicken Linse nicht zutrifft.

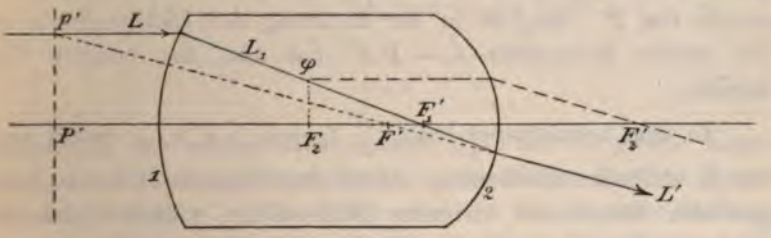


Fig. 3.

Geht man nämlich von der teleskopischen Einstellung aus

$$f = \infty \qquad d = \frac{N}{N'} f_2 + f_1,$$

bei welcher die im Inneren gelegenen Hauptbrennpunkte, (F_1' der ersten und F_2 der zweiten Fläche) zusammenfallen (Fig. 2) und nähert man die erste brechende Fläche der zweiten, ohne dass F_1' die zweite brechende Fläche erreicht, so sollte, nach dem Vorzeichen zu urtheilen, eine Sammellinse entstehen, während man thatsächlich eine Zerstreuungslinse erhält. Denn der in Fig. 3 mit y bezeichnete Gegenstand (das von der ersten Fläche ent-

worfene reelle Bild des in unendlicher Entfernung gedachten Gegenstandes) liegt jetzt innerhalb der Brennweite der zweiten Kugelfläche, diese entwirft daher ein virtuelles Bild.

Zur Bestimmung der Richtung des austretenden Strahles L'' betrachten wir den Punkt φ der Brennebene (Fig. 3) und verfolgen den der Achse parallelen Strahl, der nach F_2' gebrochen wird.

Da der austretende Strahl L' mit der soeben gezogenen Richtung parallel ist, so sind die austretenden Strahlen offenbar divergent, von einem reellen Bilde kann also nicht die Rede sein. Der zweite Hauptbrennpunkt der Linse liegt in der Verlängerung von L' bei F'', also nothwendig links von der zweiten brechenden Fläche, bedeutet also unbedingt einen virtuellen Brennpunkt. — Dessen ungeachtet hat die Brennweite das positive Vorzeichen. Man rechnet nämlich die zweite Brennweite f des Systems vom zweiten Hauptpunkte. Einen Punkt p' der Hauptebene liefert der Schnitt von L mit L', wodurch die Lage des zweiten Hauptpunktes P' bestimmt ist. Wie aus Fig. 3 ersichtlich ist, liegt F'' rechts von P' (nämlich in der Richtung der Lichtausbreitung), die zweite Brennweite $f = P'F''$ hat also das positive Vorzeichen.

In dem betrachteten Falle $(\frac{N}{N'} f_2 + f_1 > d > f_1)$ liefert auch ein in endlicher Endfernung befindlicher Gegenstand bis zu einer gewissen Grenze ein virtuelles Bild. Denn während sich der Gegenstand aus unendlicher Entfernung nähert, rückt das von der ersten Kugelfläche hervorgebrachte Bild y immer näher an die zweite Kugelfläche heran. Das resultierende Bild bleibt virtuell, so lange y in das Innere der Linse fällt, es kann als reell bezeichnet werden von dem Augenblicke an, in welchem y in der zweiten brechenden Fläche erscheint, und behält diese Eigenschaft während sich der ursprüngliche Gegenstand bis zur ersten Brennebene der Linse nähert.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass der Uebertritt vom virtuellen Bilde in ein gleich gerichtetes reelles nicht über die unendliche Bildweite erfolgt, wie bei einer einfachen brechenden Fläche, sondern mit dem Verschwinden eines Schnittpunktes des

gebrochenen Strahles L_1 mit der Achse *im Inneren des Systemes* verknüpft ist.

Es ergiebt sich also aus dem soeben Gesagten, dass, obwohl in dem betrachteten Falle die zweite Brennweite positiv ist, der zweite Brennpunkt dennoch virtuell ist, und dass das Bild eines aus unendlicher Entfernung genäherten Gegenstandes anfangs virtuell, später reell erscheint, und in beiden Fällen verkehrt ist.

3. Wenden wir uns jetzt zu dem Falle, in welchem die Dicke d der Linse grösser ist als die Summe der inneren Brennweiten

$$d > \frac{N}{N'} f_2 + f_1$$

In diesem Falle erscheint das Bild y, welches die erste Kugelfläche von einem unendlich entfernten Gegenstande entwirft,

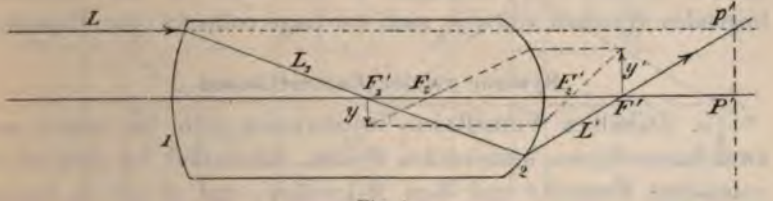


Fig. 4.

ausserhalb des ersten Brennpunktes F_2. Da die zweite Kugelfläche als collectives System wirkt, so entsteht im äusseren Raume ein reelles Bild y'. Dieses Bild erscheint in aufrechter Stellung, denn das Bild y ist verkehrt, und die zweite Kugelfläche kehrt das Bild noch einmal um. (In Fig. 4 ist der Ort des Bildes mit Hilfe der unterbrochenen Linien construiert.)

Trotzdem nun die parallel einfallenden Strahlen ein reelles Bild F', den zweiten Brennpunkt des Systems, liefern, ist die Brennweite dennoch negativ. Denn verfolgt man den Strahl L, der im Inneren der Linse durch den Punkt F_1' und ausserhalb der Linse durch F' geht, bis er die Verlängerung von L schneidet, so überzeugt man sich, dass der zweite Hauptbrennpunkt F' des Systems vom zweiten Hauptpunkt P' links bleibt, dass also die Brennweite f negativ ist.

Die negative Brennweite bei aufrechtem Bilde hängt wieder

mit dem Umstande zusammen, dass die Strahlen die Achse im Innern des Systems schneiden, dass also ein reelles Bild entsteht.

In Betreff der Bilder eines Gegenstandes, der sich dem System aus unendlicher Entfernung nähert, gelten im Wesentlichen dieselben Bemerkungen, wie im vorigen Falle.

4. Tritt das Licht von der entgegengesetzten Seite in die Linse und sind die Krümmungen der beiden Kugelflächen ungleich, so ist das Verhalten der Linse im Allgemeinen verschieden; eine Sammellinse in der einen Lage kann in verkehrter Lage als Zerstreuungslinse wirken. Die Linse giebt von einem Objecte in nnendlicher Entfernung in beiden Lagen ein verkehrtes reelles Bild, solange die Dicke d kleiner ist, als die kleinere der inneren Brennweiten; ebenso ist das Bild stets aufrecht und reell, solange die Dicke grösser ist, als die Summe der absoluten Werthe der inneren Brennweiten; hingegen ist die Linse bei den zwischen liegenden Werthen von d je nach der Lage collectiv oder dispansiv.

System zweier Sammellinsen.

5. Dieselben Verhältnisse wiederholen sich bei einem aus zwei Sammellinsen bestehenden System, namentlich bei dem astronomischen Fernrohr und dem Mikroskop, und es ist in diesem Falle leichter, die Folgerungen experimentell zur Anschauung zu bringen, als bei einer einzigen sehr dicken Linse.

Rücken wir die beiden Linsen vorerst ganz aneinander, und entfernen wir sie dann stetig, so beobachtet man folgende Reihenfolge der Bilder.

Das Bild ist so lange reell und verkehrt, bis es in die äussere Fläche der zweiten Linse gelangt. Von da ab ist das Bild verkehrt und virtuell, bis die teleskopische Einstellung erreicht ist. Darüber hinaus ist das Bild des unendlich entfernten Gegenstandes stets reell und aufrecht stehend.

Im Gegensatze zu diesem Verlaufe ergiebt Formel II eine positive Brennweite, solange die teleskopische Einstellung nicht überschritten ist, das System sollte also collectiv sein; nach dem Ueberschreiten der teleskopischen Einstellung ergiebt die Formel eine negative Brennweite, das System sollte also dispansiv sein; wie gezeigt wurde, sind beide Folgerungen unrichtig.

System dreier Sammellinsen.

6. Wie schon erwähnt, entscheidet das Vorzeichen nicht, ob das System collectiv oder dispansiv ist, da es wechselt, je nachdem das Bild aufrecht oder verkehrt erscheint. Um dies in einem allgemeineren Falle zu zeigen, betrachten wir ein System von lauter Sammellinsen, welches derart zusammengestellt ist, dass jede folgende Linse das vom vorhergehenden Theile herstammende reelle Bild umkehrt, wobei jedesmal ein *reelles* Bild resultiert.

In Fig. 5 sind drei Linsen durch ihre Hauptebene angedeutet.

Verfolgen wir den Verlauf eines parallel der Achse einfallenden Strahles L. Die erste Linse giebt in der Brennebene (F')

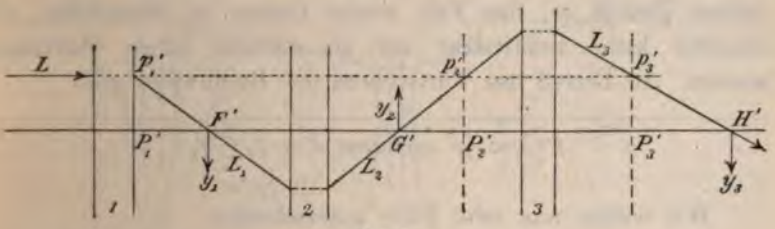


Fig. 5.

ein verkehrtes reelles Bild y_1 des unendlich entfernten Gegenstandes. Die zweite Hauptebene dieses Theiles geht durch den Schnittpunkt p_1' von L und L_1 und die Brennweite desselben $(P_1' F'')$ ist positiv. — Die beiden ersten Linsen als ein System betrachtet, geben ein aufrechtes Bild y_2 in der zweiten Brennebene (G'), die zweite Hauptebene geht durch den Schnittpunkt p_2' von L mit L_2 und die Brennweite $G' P_2'$ ist negativ. — Nimmt man die dritte Linse hinzu, so kehrt sich das Bild abermals um, die Hauptebene geht dann durch p_3' und die Brennweite $P_3' H'$ erscheint wieder positiv u. s. f. Man erkennt, dass die Brennweite bei verkehrtem Bilde stets positiv, bei aufrechtem Bilde negativ ist. Da der Annahme gemäss sämmtliche Bilder reell sind, so ist klar, dass die negative Brennweite kein Kennzeichen des virtuellen Bildes und der zerstreuenden Wirkung des Systems bildet.

Convex-concave Linse.

7. Wir betrachten nun die convex-concave Linse, bei der die convexe Fläche collectiv, die concave dispansiv wirkt. Wir können diesen Fall zusammenfassen mit dem Falle, in welchem das System aus einer Sammellinse und einer Zerstreuungslinse besteht, wie bei der achromatischen Linse und dem Galilei'schen Fernrohr.

Ist der collective Theil nach vorne gerichtet, so muss man in den Formeln I und II das Vorzeichen von f_2 in das negative verwandeln, wodurch

$$f = \frac{f_1 f_2}{d + \frac{N}{N'} f_2 - f_1} \quad \text{resp.} \quad f = \frac{f_1 f_2}{d + f_2 - f_1}$$

wird. Zur Entscheidung des collectiven oder dispansiven Charakters genügt es, den Fall zweier Linsen zu betrachten, das Resultat kann unmittelbar auf die einfache Linse übertragen werden. In Betreff des Vorzeichens der Brennweite gilt:

$$f \gtreqless \begin{matrix} 0 \\ \infty \\ 0 \end{matrix} \text{ je nachdem } d + f_2 \gtreqless f_1.$$

Wir wollen nun zwei Fälle unterscheiden.

a) Im ersten Falle sei $f_2 > f_1$, was bei einem achromatischen Linsenpaar (Sammellinse) und bei einer einfachen Linse zutrifft, die in der Mitte dicker ist, als an den Rändern. Von einem sehr entfernten Gegenstande erhält man dann die folgenden Bilder.

Sind die beiden Linsen dicht neben einander, so überwiegt die Sammellinse, das System ist daher collectiv.

Entfernt man nun die Linsen von einander, so bleibt das verkehrte Bild anfangs reell, bis es die hintere Fläche der zweiten Linse erreicht. Entfernt man die Linsen noch weiter, so zeigt sich stets ein virtuelles Bild, da die Zerstreuungslinse das von der ersten Linse stammende reelle Bild stets in ein virtuelles verwandelt. — In verkehrter Lage ist das Bild immer reell. Denn das von der Zerstreuungslinse herrührende virtuelle Bild liegt schon im Falle $d = 0$ ausserhalb des Brennpunktes der Sammellinse, was umso mehr zutrifft, wenn d von Null verschieden ist.

Obige Formel liefert bei jeder Entfernung der Linsen eine positive Brennweite, man sieht also auch hier, dass das Vorzeichen der Brennweite den Charakter des Bildes nicht wiedergiebt.

b) Im zweiten Falle sei $f_1 > f_2$, was dem Galilei'schen Fernrohr sowie einer einfachen Linse entspricht, die an den Rändern dicker ist als in der Mitte.

Während die Linsen dicht an einander liegen, überwiegt die Zerstreuung. Entfernt man die Linsen von einander, so wird bei parallel einfallendem Lichte die Divergenz der austretenden Strahlen immer geringer, bis bei $d = f_1 - f_2$ die teleskopische Einstellung erfolgt. Sobald man diese überschreitet, werden die austretenden Strahlen convergent, es erscheint also ein reelles

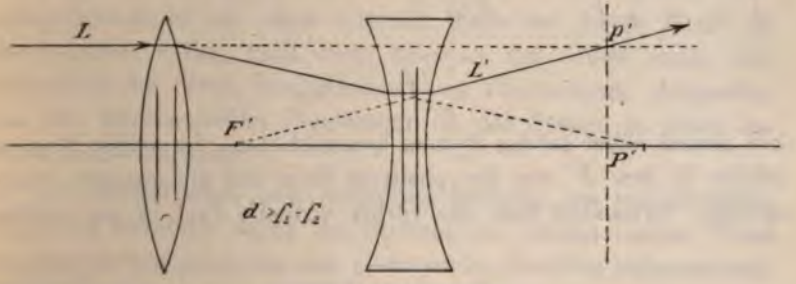


Fig. 6.

Bild. Entfernt man die Linsen noch weiter von einander, so rückt das Bild immer näher an die Zerstreuungslinse, bis es die hintere Fläche erreicht und verwandelt sich dann wieder in ein virtuelles.

In verkehrter Lage des Systems zeigt sich dieses anfangs ebenfalls als dispansiv, wird bei wachsendem d teleskopisch, und darüber hinaus beständig collectiv.

Der Unterschied, der bei der Umkehrung des Systems zur Geltung kommt, rührt von der unsymmetrischen, einseitigen Lage der Hauptebenen her, sowie auch die soeben besprochenen Veränderungen der Bilder mit dem Wandern der Hauptebenen zusammenhängen. Diesbezüglich ist in den Fig. 6 und 7 die Lage des zweiten Hauptpunktes P' und des zweiten Haupt-Brennpunktes F' angedeutet.

Indem man nebenstehende Figuren zu Rathe zieht, übersieht man leicht die folgende Veränderung. Während d von Null bis $f_1 - f_2$ wächst, liegt der zweite Hauptpunkt P' stets rechts vom System; anfangs in der Nähe des Systems gelegen, entfernt er sich bis $+\infty$. Während d den Werth $f_1 - f_2$ überschreitet, springt P' von $+\infty$ in $-\infty$, um nun von der negativen Seite

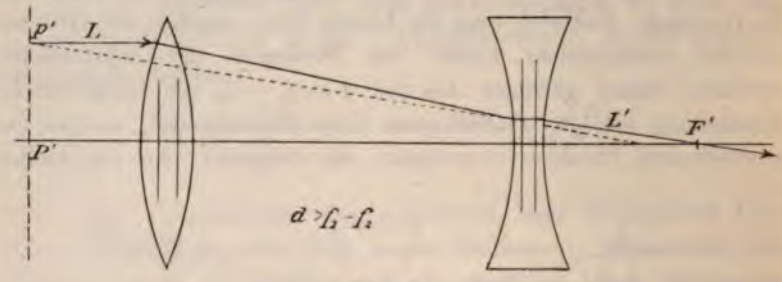


Fig. 7.

her immer näher an das System heranzutreten. Im selben Augenblicke, in dem P' von der positiven Seite auf die negative überspringt, verwandelt sich das vorher virtuelle Bild in ein reelles.

Biconcave Linse.

8. Wesentlich einfacher ist der Fall zweier Zerstreuungslinsen, sowie auch einer einzelnen Biconcav-Linse, bei der beide Flächen zerstreuend wirken. Da die einzelnen Theile von realen Gegenständen nur virtuelle Bilder geben, so kann das System ebenfalls nur dispansiv sein.

Allgemeine Regel.

9. Aus dem vorhergehenden ergiebt sich, dass die Frage, ob ein zusammengesetztes System collectiv oder dispansiv ist, nicht so einfach beantwortet werden kann, wie man bisher meinte, dass nämlich der Charakter eines Systems nicht nur von der Lage der Haupt- und Brennebenen abhängt, sondern auch von der Lage der Grenzflächen und von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes.

Es dürfte nicht leicht sein, eine die collective oder dispansive Eigenschaft bestimmende allgemeine Regel aufzustellen; einige Orientierung gewähren die folgenden Sätze.

a) Solange im Inneren des Systems nirgends ein reelles Bild entsteht, d. i. solange parallel der Achse einfallende Strahlen die Achse im Inneren des Systemes nicht schneiden, ist das System collectiv oder dispansiv, je nachdem die Brennweite positiv oder negativ ist, genau wie bei einer einzelnen brechenden Fläche.

b) Wenn hingegen im Inneren des Systemes reelle Bilder entstehen, so hängt der Charakter des Systems von demjenigen „letzten Theile" desselben ab, welcher auf das letzte jener Bilder folgt, gleichgiltig in welchem Medium dieses Bild entsteht. Das ganze System ist nur dann collectiv, wenn der „letzte Theil" als Sammellinse wirkt, und wenn überdies das letzte reelle Bild ausserhalb der ersten Brennebene dieses Theiles liegt. Abgesehen von der teleskopischen Einstellung ist das System in jedem anderen Falle dispansiv.

c) Die aufrechte oder verkehrte Stellung des resultierenden Bildes ist ebenfalls durch die Stellung des letzten reellen Bildes im Inneren bestimmt; das den austretenden Strahlen entsprechende Bild ist dem letzten reellen Bilde gleichgerichtet, wenn das ganze System zerstreuend wirkt, und es ist entgegengesetzt, wenn man es mit einem sammelnden Systeme zu thun hat.

Bemerkung in Betreff der experimentellen Demonstration.

10. Zur Herstellung von möglichst intensiven parallelen Lichtstrahlen befestigt man ein Diaphragma mit enger Oeffnung in der Nähe (3—4 cm) der negativen Kohle des Lichtbogens und verwandelt das divergente Strahlenbüschel mittelst einer Sammellinse in ein paralleles. Beobachtet man bloss in der horizontalen Ebene, so verwendet man anstatt einer kreisrunden Oeffnung einen horizontalen Spalt (0,5 bis 1 mm breit), wodurch die Lichtintensität bedeutend gesteigert wird, ohne die Schärfe der Erscheinung zu beeinträchtigen. Die aufrechte oder verkehrte Stellung der Bilder kann man dadurch zur Wahrnehmung bringen,

dass man am einen Ende des Spaltes noch eine kleine runde Oeffnung anbringt.

Das zu untersuchende System wird in die Bahn des so erhaltenen Strahlenbündels gestellt.

Man kann das Strahlenbündel dadurch sichtbar machen, dass man einen mittelgrossen Kochbecher mit einer ebenen Glasplatte lose bedeckt, durch die Ritzen ein wenig Rauch einbläst und den Becher in der Bahn der Lichtstrahlen bewegt.

7.

DESMISCHE SYSTEME.

Von L. KLUG in Klausenburg (Kolozsvár) (Ungarn).

Uebersetzt aus dem VIII. Jahrgange der „Mathematikai és Physikai Lapok" (Math. und Physik. Blätter).

Nach STEPHANOS bilden drei Tetraeder, dessen Kanten sich zu dreien in zwölf Punkten schneiden, ein desmisches Tetraedersystem, und die drei Tetraeder, dessen Eckpunkte jene zwölf Schnittpunkte sind, bilden ein zum ersten conjugiertes desmisches Tetraedersystem. Nach STEPHANOS lassen sich solche sechs Tetraeder in der Weise durch neun Tetraeder ergänzen, dass die fünfzehn Tetraeder sich in zehn Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme spalten, von welchen irgend ein Paar die übrigen in einerlei Weise bestimmt.* Fünfzehn Tetraeder in dieser Lage wollen wir ein *vollständiges* desmisches Tetraedersystem nennen.

Nach STEPHANOS bestimmt ein desmisches Tetraedersystem ein einschaliges Hyperboloid; die drei Tetraeder des desmischen Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes sind in Bezug auf das Hyperboloid Polartetraeder. Es werden also durch ein vollständiges desmisches Tetraedersystem zehn einschalige Hyperboloide bestimmt, die man ein *vollständiges* desmisches Hyperboloidensystem nennen kann.

Zwei beliebige Hyperboloide eines vollständigen desmischen Hyperboloidensystemes schneiden sich in einem Viereck und sind in vierfacher Weise centrisch-involutorisch. Es giebt ∞^2 Hyperboloide, welche jene zwei in je einem Viereck schneiden und also

* Sur les systèmes desmiques de trois tétraèder. Bulletin des sciences mathématiques. 1879.

zu einem *einfachen* desmischen Hyperboloidensystem ergänzen. Jedes Hyperboloid eines vollständigen desmischen Hyperboloidensystemes wird von den übrigen neun in Vierecken getroffen. Insgesammt treffen sich dieselben in fünfundvierzig Vierecken; die Seiten derselben sind die Kanten desjenigen vollständigen desmischen Tetraedersystemes, welches das Hyperboloidensystem bestimmt.

Die ebenen Schnitte des vollständigen desmischen Hyperboloiden- und Tetraedersystemes bilden ein *vollständiges* desmisches Kegelschnitt- bezw. Vierseitsystem. Das *einfache* desmische Vierseitsystem besteht aus drei Vierseiten, dessen Seiten sich zu dreien in sechzehn Punkten schneiden; das *einfache* desmische Kegelschnittsystem hingegen wird von solchen drei Kegelschnitten gebildet, von welchen je zwei den dritten Kegelschnitt in vier solchen Punktpaaren treffen, dass zwei Paar dieser Treffpunkte die übrigen zwei Paare harmonisch trennen.

Wie schon STEPHANOS bemerkte, kommen im ganzen Gebilde die dual entsprechenden Configurationen $(30_6, 60_3)$, $(60_3, 30_6)$ und $(320_3, 60_{16})$, $(60_{16}, 320_3)$ vor. Die erste Configuration besteht aus 30 Geraden und 60 Punkten, die zweite aus 60 Ebenen und 30 Geraden, die dritte aus 320 Geraden und 60 Punkten, die vierte aus 60 Ebenen und 320 Geraden.

Im Folgenden wollen wir eine neue, leicht übersichtliche und ausführliche Behandlung des erwähnten Gebildes geben.

1. Das vollständige desmische Tetraeder- und Vierseitsystem.

1. Wir bezeichnen die Eckpunkte der drei Tetraeder A, B, C eines desmischen Systemes R mit

$$A_1A_2A_3A_4, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad C_1C_2C_3C_4,$$

die Eckpunkte der drei Tetraeder T_2, T_3, T_4 des conjugierten desmischen Systemes R_1 mit

$$E_{12}F_{12}E_{34}F_{34}, \quad E_{13}F_{13}E_{42}F_{42}, \quad E_{14}F_{14}E_{23}F_{23}.$$

Das desmische Tetraedersystem, sowie auch das dazu conjugierte ist durch die vier Eckpunkte $A_1A_2A_3A_4$ des Tetraeders A und einen ausserhalb der Flächen desselben liegenden Eckpunkt B_1 des Tetraeders B bestimmt.

Die durch B_1 gehende und die Kante A_iA_j, sowie auch die gegenüberliegende Kante des Tetraeders A schneidende Gerade trifft A_iA_j in dem Punkte E_{ij}. Die E_{ij}, F_{ij} sind durch die Punkte A_i, A_j, die Punkte E_{1i}, E_{jk} durch die Punkte B_1, B_i, endlich die Punkte F_{1i}, F_{jk} durch die Punkte B_j, B_k harmonisch getrennt. Der Punkt C_i trennt den Punkt B_1 von dem Eckpunkte A_i und der gegenüberliegenden Seite α_i des Tetraeders harmonisch, also werden auch die Punkte E_{1i}, F_{jk} durch C_i, C_k, und die Punkte E_{jk}, F_{1i} durch C_1, C_i harmonisch getrennt. Es sind daher die folgenden Würfe

$$A_1E_{1i}A_iF_{1i}, \quad B_1E_{jk}B_iB_{1i}, \quad C_1F_{1i}C_iE_{jk}$$
$$A_jE_{jk}A_kF_{jk}, \quad B_jF_{1i}B_kF_{jk}, \quad C_jE_{1i}C_kF_{jk}$$

harmonisch.

Daraus folgt, da die Punkte A_i, B_i, C_i und die Punkte E_{1i} $F_{1i}E_{jk}F_{jk}$, als die Eckpunkte von Tetraedern, nicht in einer Ebene liegen, dass die Punktripel

$A_1B_1C_1$	$A_1B_2C_2$	$A_1B_3C_3$	$A_1B_4C_4$
$A_2B_1C_2$	$A_2B_2C_1$	$A_2B_3C_4$	$A_2B_4C_3$
$A_3B_1C_3$	$A_3B_2C_4$	$A_3B_3C_1$	$A_3B_4C_2$
$A_4B_1C_4$	$A_4B_2C_3$	$A_4B_3C_2$	$A_4B_4C_1$
$F_{34}F_{24}F_{23}$	$F_{34}E_{23}E_{24}$	$F_{24}E_{23}E_{34}$	$F_{23}E_{34}E_{24}$
$F_{34}F_{13}F_{14}$	$F_{34}E_{14}E_{13}$	$F_{13}E_{14}E_{34}$	$F_{14}E_{34}E_{13}$
$F_{12}F_{24}F_{14}$	$F_{12}E_{14}E_{24}$	$F_{21}E_{14}E_{12}$	$F_{14}E_{12}E_{24}$
$F_{12}F_{13}F_{23}$	$F_{12}E_{23}E_{13}$	$F_{13}E_{23}E_{12}$	$E_{23}E_{12}E_{13}$

in je einer Geraden liegen.

2. Die Punktpaare

$$A_1A_i \cdot E_{1i}F_{1i}; \quad A_jA_k \cdot E_{jk}F_{jk}$$
$$B_1B_i \cdot E_{1i}E_{jk}; \quad B_jB_k \cdot F_{1i}F_{jk}$$
$$C_1C_i \cdot F_{1i}E_{jk}; \quad C_jC_k \cdot E_{1i}F_{jk}$$

bestimmen auf den Gegenkanten A_1A_i, A_jA_k; B_1B_i, B_jB_k; C_1C_i, C_jC_k der Tetraeder A, B, C je eine Involution, deren Doppelpunkte $A_{1i}A_{i1}$, $A_{jk}A_{kj}$; $B_{1i}B_{i1}$, $B_{jk}B_{kj}$; $C_{1i}C_{i1}$, $C_{jk}C_{kj}$ conjugiert-imaginär sind.

Es seien nach STAUDT* die imaginären Punkte A_{1i}, B_{1i}, C_{1i}, A_{jk}, B_{jk}, C_{jk} durch die harmonischen Würfe

$$A_1E_{1i}A_iF_{1i}, \quad B_1E_{jk}B_iE_{1i}, \quad C_1F_{1i}C_iE_{jk}$$
$$A_jE_{jk}A_kF_{jk}, \quad B_jF_{1i}B_kF_{jk}, \quad C_jE_{1i}C_kF_{jk}$$

und also die zu diesen conjugierten Punkte durch die harmonischen Würfe

$$A_iE_{1i}A_1F_{1i}, \quad B_iE_{jk}B_1E_{1i} \text{ etc.}$$

dargestellt.

Da die drei Tetraeder $ABC \equiv R$ 18 Kanten haben, so ist die Anzahl der obigen imaginären Doppelpunkte 36. Wir wollen dieselben im Allgemeinen mit I, und die 24 reellen Eckpunkte der sechs Tetraeder R, R_i mit R benennen.

Jede Kante der Tetraeder R trägt ein Eckpunktpaar der Tetraeder R und R_i, sowie ein Punktpaar I, und jedes dieser drei Punktpaare trennt die übrigen zwei harmonisch. Sechs Punkte auf einer Geraden oder auf einem Kegelschnitt, welche sich in solche drei Punktpaare spalten, dass jedes desselben von den anderen harmonisch getrennt wird, bilden in sechsfacher Weise Involutionen. In solchen sechs Punkten PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 treffen z. B. die Seiten eines Polardreieckes in Bezug auf einen Kegelschnitt denselben; die conjugierten Punktpaare der Involutionen sind:

$$P_1P_2 \cdot Q_1Q_2 \cdot PQ \qquad P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 \cdot PQ$$
$$P_2P \cdot Q_2Q \cdot P_1Q_1 \qquad P_2Q \cdot PQ_2 \cdot P_1Q_1$$
$$PP_1 \cdot QQ_1 \cdot P_2Q_2 \qquad PQ_1 \cdot P_1Q \cdot P_2Q_2.$$

Je nachdem der Kegelschnitt reell oder imaginär ist, sind zwei oder sechs dieser Punkte imaginär.

3. Durch jeden der 24 Punkte R gehen sechs Paar conjugiert-imaginäre Geraden, welche je zwei Paar conjugiert-imaginäre Punkte I tragen. U. zw. gehen

durch den Punkt A_1 die Geraden $B_{1i}C_{i1}$, $B_{jk}C_{jk}$
„ „ „ B_1 „ „ $C_{1i}A_{i1}$, $C_{jk}A_{jk}$
„ „ „ C_1 „ „ $A_{1i}B_{i1}$, $A_{jk}B_{jk}$

* STAUDT, Beiträge zur Geometrie der Lage. Bd. I. Seite 76. §. 7: Imaginäre Elemente.

durch den Punkt A_i die Geraden $B_{1j}C_{ki}$, $B_{ik}C_{1j}$, $B_{1i}C_{1i}$, $B_{jk}C_{kj}$
„ „ „ B_i „ „ $C_{1j}A_{ki}$, $C_{ik}A_{1j}$, $C_{1i}A_{1i}$, $C_{jk}A_{kj}$
„ „ „ C_i „ „ $A_{1j}B_{ki}$, $A_{ik}B_{1j}$, $A_{1i}B_{1i}$, $A_{jk}B_{kj}$
„ „ „ E_{1i} „ „ $A_{1j}A_{ji}$, $B_{1j}B_{ji}$, $C_{1j}C_{k1}$, $C_{ji}C_{ik}$
„ „ „ E_{ij} „ „ $A_{1k}A_{kj}$, $A_{1i}A_{j1}$, $B_{1i}B_{ik}$, $C_{1i}C_{ki}$
„ „ „ F_{1i} „ „ $A_{1j}A_{ij}$, $B_{1j}B_{k1}$, $B_{ji}B_{ik}$, $C_{1j}C_{ji}$
„ „ „ F_{ij} „ „ $\begin{cases} A_{1i}A_{1j},\ B_{1i}B_{1j},\ C_{1i}C_{1j} \\ A_{ki}A_{kj},\ B_{ki}B_{kj},\ C_{ki}C_{kj} \end{cases}$

und die zu diesen conjugierten Geraden. So geht z. B. die Verbindungsgerade der Punkte

$$B_{1i} = B_1E_{jk}B_iE_{1i}, \quad C_{i1} = C_1E_{jk}C_iF_{1i}$$

und die Verbindungsgerade der zu diesen conjugierten Punkte durch den Schnittpunkt A_1 der reellen Geraden B_1C_1, B_iC_i, $E_{1i}F_{1i}$, und die Verbindungsgerade der Punkte

$$C_{ki} = C_kE_{1j}C_iF_{ki}, \quad C_{kj} = C_kE_{1i}C_jF_{kj},$$

sowie der zu diesen conjugierten Punkte geht durch den Schnittpunkt F_{ij} der reellen Geraden $E_{1j}E_{1i}$, C_iC_j, $F_{ki}F_{kj}$.

4. Die auf den Gegenkanten eines beliebigen der sechs Tetraeder R, R_t liegenden Punkte I sind die Eckpunkte eines imaginären Tetraeders. Im Ganzen giebt es 9 solche imaginäre Tetraeder I, deren Eckpunkte die 36 Punkte I sind. Diese 9 Tetraeder und ihre Eckpunkte sollen wie folgt bezeichnet werden:

$$I_2^a = A_{12}A_{21}A_{34}A_{43}, \quad I_2^b = B_{12}B_{21}B_{34}B_{43}, \quad I_2^c = C_{12}C_{21}C_{34}C_{43}$$
$$I_3^a = A_{13}A_{31}A_{42}A_{24}, \quad I_3^b = B_{13}B_{31}B_{42}B_{24}, \quad I_3^c = C_{13}C_{31}C_{42}C_{24}$$
$$I_4^a = A_{14}A_{41}A_{23}A_{32}, \quad I_4^b = B_{14}B_{41}B_{23}B_{32}, \quad I_4^c = C_{14}C_{41}C_{23}C_{32}.$$

Beliebige zwei der Tetraeder I bilden mit einem der sechs Tetraeder R, R_t ein einfaches desmisches Tetraedersystem. Insgesammt giebt es 20 solche einfache desmische Tetraedersysteme, die sich in 10 Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme spalten; dieselben sind

$$ABC \quad T_2T_3T_4;$$
$$AI_2^bI_2^c \quad T_2I_3^aI_4^a; \quad AI_3^bI_3^c \quad T_3I_4^aI_2^a; \quad AI_4^bI_4^c \quad T_4I_2^aI_3^a;$$
$$BI_2^cI_2^a \quad T_2I_3^bI_4^b; \quad BI_3^cI_3^a \quad T_3I_4^bI_2^b; \quad BI_4^cI_4^a \quad T_4I_2^bI_3^b;$$
$$CI_2^aI_2^b \quad T_2I_3^cI_4^c; \quad CI_3^aI_3^b \quad T_3I_4^cI_2^c; \quad CI_4^aI_4^b \quad T_4I_2^cI_3^c.$$

293693

Jedes der 15 Tetraeder R, R_i, I kommt in vier dieser 20 Systeme vor, und jedes System enthält drei Tetraeder ($4.15 = 3.20$).

Dass die 15 Tetraeder in obigen Gruppen desmische Tetraedersysteme bilden, erhellt daraus, dass die Verbindungsgerade zweier Eckpunkte beliebiger zwei jener Tetraeder durch einen Eckpunkt des dritten geht (3.). Wir haben daher nur zu beweisen, dass die angegebenen desmischen Systeme conjugiert sind.

Man erhält die Eckpunkte der Tetraeder des dem Systeme $A I_2^b I_2^c$ conjugierten Systemes, wenn man von einem Eckpunkt des Tetraeders I_2^b, z. B. vom Eckpunkt B_{12}, zu den Gegenkanten des Tetraeders A Transversalen zieht: die Schnittpunkte dieser Transversalen mit den Gegenkanten des Tetraeders A, sowie die Punkte, welche diese von den Eckpunkten auf den Kanten des Tetraeders A harmonisch trennen, sind die Eckpunkte der Tetraeder des conjugierten Systemes.

Die durch B_{12} gehende Transversale der Gegenkanten A_1A_2, A_3A_4 trifft diese in den Punkten $E_{12}E_{34}$: denn von B_{12} geht nur eine Transversale zu A_1A_2, A_3A_4, und die ist $B_{12}B_{21} = B_1B_2 = E_{12}E_{34}$. Also ist ein Tetraeder des conjugierten Systemes $T_2 = E_{12}F_{12}E_{34}F_{34}$.

Um diese Eigenschaft auch für das Tetraeder I_3^a nachzuweisen, schreiben wir folgende 16 Punkte in der Weise hin:

$$\begin{matrix} A_1 E_{12} A_2 F_{12} \\ E_{13} B_1 E_{24} B_2 \\ A_3 E_{34} A_4 F_{34} \\ F_{13} B_3 F_{24} B_4, \end{matrix}$$

wo sowohl in den Zeilen, als auch in den Reihen der erste und dritte Punkt vom zweiten und vierten harmonisch getrennt ist.

Die von den Punkten B_{12}, B_{21} der Geraden B_1B_2 der zweiten Reihe zu den Geraden A_1A_2, A_2A_4, B_3B_4 der ersten, dritten und vierten Reihe gezogenen Transversalen treffen diese bezw. in den Punkten $A_{13}A_{31}$, $A_{24}A_{42}$, $B_{43}B_{34}$, daher ist auch $I_3^a = A_{13}A_{31}A_{42}A_{24}$ ein Tetraeder des conjugierten Systemes.

Ebenso zeigt man, wenn man oben die Zeiger 3 mit 4 vertauscht, dass auch I_4^a ein Tetraeder des conjugierten Systemes ist.

6. Wir fanden soeben, dass die Punkte $A_{13}A_{21}B_{12}B_{43}$ und die Punkte $A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}$ je in einer Geraden liegen, und auf jeder derselben das erstere Punktpaar das letztere harmonisch trennt.

In Anbetracht der 16 Punkte

$$C_4 E_{12} C_3 F_{34}$$
$$E_{23} B_1 E_{14} B_4$$
$$C_1 E_{34} C_2 F_{12}$$
$$F_{14} B_2 E_{23} B_3,$$

welche dieselbe Lage haben wie die unter 5. in quadratischer Form angeschriebenen 16 Punkte, folgt, dass die Geraden $B_{12}B_{43}$, $B_{21}B_{34}$, welche die Punkte B_{12}, B_{43}, bezw. B_{21}, B_{34} der Geraden in der zweiten und vierten Reihe verbinden, durch die Punkte C_{14}, C_{34} und C_{41}, C_{23} der Geraden der ersten und dritten Reihe gehen.

Es liegen daher die Punkte

$$A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32}$$
$$A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23}$$

auf einem conjugiert-imaginären Geradepaar II. Art*, und auf jeder Geraden wird von den ersten, mittleren, und letzten Punktpaaren ein beliebiges durch die zwei anderen harmonisch getrennt.

Es giebt sechs solche conjugiert-imaginäre Geradenpaare II. Art i, welche je sechs Paare conjugiert-imaginäre Punkte I tragen, d. h. welche von den 18 Kanten der sechs Tetraeder R stets sechs schneiden.

Diese sind

$$i_1 \left| \begin{matrix} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{21}A_{43}B_{31}B_{24}C_{41}C_{32} \end{matrix} \right. \qquad i_2 \left| \begin{matrix} A_{12}A_{43}B_{14}B_{32}C_{13}C_{24} \\ A_{21}A_{34}B_{41}B_{23}C_{31}C_{42} \end{matrix} \right.$$

$$i_3 \left| \begin{matrix} A_{13}A_{42}B_{14}B_{23}C_{12}C_{34} \\ A_{31}A_{24}B_{41}B_{32}C_{21}C_{43} \end{matrix} \right. \qquad i_4 \left| \begin{matrix} A_{13}A_{24}B_{12}B_{43}C_{14}C_{32} \\ A_{31}A_{42}B_{21}B_{34}C_{41}C_{23} \end{matrix} \right.$$

$$i_5 \left| \begin{matrix} A_{14}A_{23}B_{12}B_{34}C_{13}C_{42} \\ A_{41}A_{32}B_{21}B_{43}C_{31}C_{24} \end{matrix} \right. \qquad i_6 \left| \begin{matrix} A_{14}A_{32}B_{13}B_{24}C_{12}C_{43} \\ A_{41}A_{23}B_{31}B_{42}C_{21}C_{34}. \end{matrix} \right.$$

* Staudt, Beiträge z. G. d. L. Bd. I. Seite 77.

Die 36 Punkte I sind daher auf den 12 Geraden i in der Weise vertheilt, dass durch jeden Punkt zwei Geraden gehen und auf jeder Geraden sechs Punkte liegen ($2.36 = 6.12$).

7. Jedes der Geradenpaare i trifft drei Geradenpaare i, u. zw. trifft von den Geradenpaaren

$$\begin{matrix} i_1 & i_3 & i_5 \\ i_2 & i_4 & i_6 \end{matrix}$$

jedes diejenigen, die sich mit ihr nicht in einer Zeile befinden.

Bezeichnen wir im Allgemeinen die Geradenpaare i einer Zeile mit i_i oder i_j, i_k, die der anderen Zeile mit i_l oder i_m, i_n.

Da jedes Geradenpaar i ein Gegenkantenpaar eines Tetraeders I ist, so sind die vier Schnittpunkte $i_i i_l$ der zwei Geradenpaare i_i, i_l die Eckpunkte eines Tetraeders I. Also treffen die drei Geradenpaare der ersten Zeile, die drei Geradenpaare der zweiten Zeile in den Eckpunkten der neun Tetraeder I, wie dies folgende Tafel anzeigt:

$$\begin{matrix} I_2^a = i_1 i_2 & I_2^b = i_5 i_4 & I_2^c = i_3 i_6 \\ I_3^a = i_3 i_4 & I_3^b = i_1 i_6 & I_3^c = i_5 i_2 \\ I_4^a = i_5 i_6 & I_4^b = i_3 i_2 & I_4^c = i_1 i_4. \end{matrix}$$

Aus dieser Tafel folgt, dass je zwei sich nicht schneidende Geradenpaare i_i, i_j; i_l, i_m die Kanten von vier Tetraedern I sind, nämlich von $i_i i_l$, $i_i i_m$, $i_j i_l$, $i_j i_m$. Die Tetraederpaare $i_i i_l$, $i_j i_m$ oder $i_i i_m$, $i_j i_l$ bilden mit demjenigen Tetraeder R oder R_t ein desmisches System, dessen Gegenkanten die reellen Kanten der Tetraederpaare $i_i i_m$, $i_j i_l$, bezw. $i_i i_l$, $i_j i_m$ sind; und alle sechs Tetraeder bilden ein conjugiertes desmisches System. Das dritte Gegenkantenpaar der Tetraeder R und R_t ist das reelle Kantenpaar der Tetraeder $i_k i_n$; d. h. die Gegenkanten der Tetraeder R oder R_t sind die reellen Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der Geradenpaare $i_i i_l$, $i_j i_m$, $i_k i_n$.

Nach diesen Auseinandersetzungen kann man leicht laut folgendem Schema die zehn Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme (unter 4) aufschreiben.

	i_1		i_3		i_5		i_1
i_2	I_2^a		I_4^b		I_3^c		I_4^a
		AT_4		BT_3		CT_2	
i_4	I_4^c		I_3^a		I_2^b		I_4^c
		CT_3		AT_2		BT_4	
i_6	I_3^b		I_2^c		I_4^a		I_3^b
		BT_2		CT_4		AT_3	
i_2	I_2^a		I_4^b		I_3^c		I_4^a

Wir bemerken noch, dass die Eckpunkte jedes der Tetraeder I die Schnittpunkte der damit in einer Reihe und Zeile befindlichen Geradenpaare i sind; ferner, dass vier Tetraeder I, welche in zwei Nachbarreihen und Nachbarzeilen sind, die von diesen Reihen und Zeilen eingeschlossenen Tetraeder R, R_t zu einem conjugierten desmischen System ergänzen.

8. Wir wollen die bisherigen Untersuchungen in folgenden Satz zusammenfassen:

Bezeichnet man die 18 Kanten der sechs reellen Tetraeder eines reellen conjugierten desmischen Tetraedersystemes mit r, die 24 Eckpunkte mit R, die 18 Paare conjugiert-imaginäre Punkte, welche die Eckpunktpaare dieser Tetraeder auf den einzelnen Kanten harmonisch trennen, mit I, so liegen diese 36 Punkte I je sechs auf sechs conjugiert-imaginären Geradenpaaren II. Art i, und es spalten sich sowohl auf den Geraden i, wie auch auf den Geraden r die sechs Punkte R, I in solche drei Paare, von welchen je zwei durch das dritte harmonisch getrennt sind, d. h. die sechs Punkte liegen stets sechsfach involutorisch. Die 30 Geraden (r, i) und die 60 Punkte (R, I) bilden daher eine Configuration $(30_6, 60_3)$.

Die 30 Geraden und 60 Punkte sind die Kanten und die Eckpunkte von 15 Tetraedern, nämlich von den sechs angenommenen reellen und von neun imaginären Tetraedern. Die 15 Tetraeder spalten sich in 10 Paar conjugierte desmische Tetraedersysteme, von diesen ist eines das Angenommene, dessen Tetraeder alle reell sind,

während die übrigen 18 Systeme aus je einem reellen und zwei imaginären Tetraedern bestehen, und jedes der Tetraeder in vier Systemen vorkommt.

Die 60 Punkte als Eckpunkte von 20 desmischen Tetraedersystemen liegen in der Weise zu dreien auf 32 reellen Geraden und 144 Paaren conjugiert-imaginären Geraden I. Art, dass durch jeden reellen Punkt 4 reelle und 12 imaginäre, und durch jeden imaginären Punkt 16 imaginäre Gerade gehen. Es bilden daher diese Gerade und Punkte eine Configuration $(320_3, 60_{16})$.

Vertauscht man in diesem Satze die Punkte mit Ebenen, so erhält man einen neuen Satz, welcher sich auf die Seiten und Kanten der 15 Tetraeder bezieht. Laut diesem Satz lässt sich das Gebilde, welches man erhält, wenn man das vollständige desmische Tetraedersystem durch eine Ebene schneidet, also charakterisieren:

Der ebene Schnitt eines vollständigen desmischen Tetraedersystemes ist ein vollständiges desmisches Vierseitsystem, welches aus 6 reellen und 9 imaginären Vierseiten besteht. Diese 15 Vierseite haben 18 reelle und 6 Paar conjugiert-imaginäre, also nur 30 Eckpunkte, ferner 24 reelle und 16 Paar conjugiert-imaginäre Seiten. Durch jeden Eckpunkt gehen drei Seitenpaare, von welchen je zwei durch das dritte harmonisch getrennt sind, so dass das Gebilde eine Configuration $(60_3, 30_6)$ *ist.*

Die 15 Vierseite spalten sich 20mal zu dreien in Vierseite, deren 12 Seiten sich zu dreien in 16 Punkten schneiden, und die man als ein einfaches desmisches Vierseitensystem bezeichnen kann. Zu jedem der einfachen desmischen Vierseitsysteme ist ein anderes conjugiert, dessen Vierseite nämlich mit dem ersteren dieselben 12 Eckpunkte gemeinsam haben. Von den zehn Paar (einfachen) conjugierten desmischen Vierseitsystemen besteht eines aus sechs reellen Vierseiten, während in den übrigen neun zwei Vierseite reell die übrigen vier imaginär sind.

Die 60 Seiten der 10 Paar conjugierten desmischen Vierseitsysteme, und die 320 Punkte, in welche dieselben sich zu dreien schneiden, bilden eine Configuration: $(60_{16}, 320_3)$.

2. Das vollständige desmische Hyperboloiden- und Kegelschnittsystem.

9. Die Kanten des Tetraeders A sind die Seiten von drei Vierecken

$$A_1A_4A_2A_3, \quad A_1A_2A_3A_4, \quad A_1A_3A_4A_2.$$

Durch die Seiten dieser Vierecke und durch den Punkt B_1 gehen bezw. drei Hyperboloide c_2, c_3, c_4. Je zwei dieser Hyperboloide schneiden sich in einem Gegenkantenpaar des Tetraeders A, und haben also noch zwei gemeinsame Geraden, welche die Gegenkanten B_1B_i, B_jB_k des Tetraeders B sind. Es gehen daher jene Hyperboloide auch durch die Seiten der Vierecke

$$B_1B_4B_2B_3, \quad B_1B_2B_3B_4, \quad B_1B_3B_4B_2.$$

In ähnlicher Weise kann man schliessen, dass die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} B_1B_4B_2B_3 & C_1C_4C_2C_3 \\ B_1B_2B_3B_4 & C_1C_2C_3C_4 \\ B_1B_3B_4B_2 & C_1C_3C_4C_2 \end{array}$$

auf den Hyperboloiden a_2, a_3, a_4 und die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} C_1C_4C_2C_3 & A_1A_4A_2A_3 \\ C_1C_2C_3C_4 & A_1A_2A_3A_4 \\ C_1C_3C_4C_2 & A_1A_3A_4A_2 \end{array}$$

auf den Hyperboloiden b_2, b_3, b_4 liegen.

Nachdem die Kanten der Tetraeder $R \equiv ABC$ zugleich die Kanten der Tetraeder $R_t \equiv T_2T_3T_4$ sind, so gehen jene Hyperboloide auch durch die Seiten jener Vierecke, welche aus den Kanten von je zwei dieser Tetraeder gebildet werden können.

So gehen z. B. die Hyperboloide a_2, b_2, c_2 bezw. durch die Seiten der Vierecke

$$\begin{array}{ll} E_{13}E_{24}F_{13}F_{24} & E_{14}E_{23}F_{14}F_{23} \\ E_{13}F_{24}E_{24}F_{13} & E_{14}F_{23}E_{23}F_{14} \\ E_{13}F_{13}F_{24}E_{24} & E_{14}F_{14}F_{23}E_{23}. \end{array}$$

Von drei Hyperboloiden, welche durch je vier Gegenkanten, also insgesammt durch alle Kanten von zwei Tetraedern gehen, wollen wir sagen, dass sie ein *einfaches desmisches Hyperboloidensystem bilden.*

Die in den Zeilen und Reihen der Tafel

(h)	T_3T_4	T_1T_2	T_2T_3
BC	a_2	a_3	a_4
CA	b_2	b_3	b_4
AB	c_2	c_3	c_4

befindlichen Hyperboloide bilden nach dem Obigen einfache desmische Systeme.

10. Aus den angeschriebenen Vierecken des früheren (9.) Punktes ist ersichtlich, dass

die Gegenkanten A_1A_2, A_3A_4 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare b_3c_4 sind,

„ „ B_1B_3, B_4B_2 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare c_4a_2 sind,

„ „ C_1C_4, C_2C_3 gemeinsame Erzeugende der Hyperboloidenpaare a_2b_3 sind.

Diese Hyperboloidenpaare haben aber noch ein gemeinsames Geradenpaar, nämlich:

$$i_1 \mid \begin{matrix} A_{12}\,A_{34}\,B_{13}\,B_{42}\,C_{14}\,C_{23} \\ A_{21}\,A_{43}\,B_{31}\,B_{24}\,C_{41}\,C_{32} \end{matrix}$$

In ähnlicher Weise schliesst man, dass

i_1 ein gemeinsames Geradenpaar der Hyperboloide $a_2b_3c_4$ ist,

i_2 „ „ „ „ „ $a_2b_4c_3$ „

i_3 „ „ „ „ „ $a_3b_4c_2$ „

i_4 „ „ „ „ „ $a_3b_2c_4$ „

i_5 „ „ „ „ „ $a_4b_2c_3$ „

i_6 „ „ „ „ „ $a_4b_3c_2$ „.

Die Geradenpaare $i_1 \ldots . i_6$ liegen selbst auch auf einem Hyperboloid h, da $i_1i_3i_5$ von $i_2i_4i_6$ geschnitten werden.

Durch die vier Schnittpunkte der Geradenpaare i_1i_2, i_3i_4, i_5i_6 gehen noch bezw. die Geradenpaare A_1A_2, A_3A_4; A_1A_3, A_4A_2; A_1A_4, A_2A_3; diese sind daher reciproke Polaren und daher das Tetraeder A ein Polartetraeder in Bezug auf das Hyperboloid h.

In ähnlicher Weise folgt, dass B, C, T_2, T_3, T_4 Polartetraeder

sind in Bezug auf h, da z. B. die Gegenkanten der Tetraeder B, T_2 durch die Schnittpunkte der Geradenpaare

$$i_1 i_6,\ i_3 i_2,\ i_5 i_4, \text{ bezw. } i_1 i_2,\ i_3 i_6,\ i_5 i_4$$

gehen.

Die sechs Tetraeder des angenommenen conjugierten desmischen Tetraedersystemes sind daher Polartetraeder in Bezug auf das Hyperboloid h.

11. Bestimmen wir jetzt die Hyperboloide, welche durch die Gegenkantenpaare der Tetraeder der übrigen neun conjugierten desmischen Systeme des vollständigen desmischen Tetraedersystemes gehen. Zu dem Ende wollen wir übersichtlich aufschreiben, in welcher Weise die 30 Geraden (r, i) zu zweimal-sechs auf den zehn Hyperboloiden a_2, $a_3 \ldots c_4$, h liegen. Dies ist aus umstehender Tafel ersichtlich. (S. folg. Seite.)

In den zehn Quadraten dieser Tafel sind die Punkte in der Weise geordnet, dass sowohl die in den Zeilen wie auch die in den Reihen befindlichen auf je einer Erzeugenden des oberhalb des Quadrats geschriebenen Hyperboloids liegen.

Aus dieser Tafel kann man leicht die folgende aufschreiben, die anzeigt, welche der zehn Hyperboloide $a_2 a_3 \ldots h$ zu vieren gemeinsame Geradenpaare haben. Es gehen nämlich

die	Hyperboloide	$b_3 c_3 b_4 c_4$	durch	das	Geradenpaar	$A_1 A_2,\ A_3 A_4$
„	„	$b_4 c_4 b_2 c_2$	„	„	„	$A_1 A_3,\ A_4 A_2$
„	„	$b_2 c_2 b_3 c_3$	„	„	„	$A_1 A_4,\ A_2 A_3$
„	„	$c_3 a_3 c_4 a_4$	„	„	„	$B_1 B_2,\ B_3 B_4$
„	„	$c_4 a_4 c_2 a_2$	„	„	„	$B_1 B_3,\ B_4 B_2$
„	„	$c_2 a_2 c_3 a_3$	„	„	„	$B_1 B_4,\ B_2 B_3$
„	„	$a_3 b_3 a_4 b_4$	„	„	„	$C_1 C_2,\ C_3 C_4$
„	„	$a_4 b_4 a_2 b_2$	„	„	„	$C_1 C_3,\ C_4 C_2$
„	„	$a_2 b_2 a_3 b_3$	„	„	„	$C_1 C_4,\ C_2 C_3$
„	„	$h\ a_2 b_3 c_4$	„	„	„	i_1
„	„	$h\ a_2 b_4 c_3$	„	„	„	i_2
„	„	$h\ a_3 b_4 c_2$	„	„	„	i_3
„	„	$h\ a_3 b_2 c_4$	„	„	„	i_4
„	„	$h\ a_4 b_2 c_3$	„	„	„	i_5
„	„	$h\ a_4 b_3 c_2$	„	„	„	i_6.

$$h$$

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\phantom{A_{12}A_{34}}}^{i_2}\ \overbrace{\phantom{B_{13}B_{42}}}^{i_6}\ \overbrace{\phantom{C_{14}C_{23}}}^{i_4} \\ i_1 \left\{ \begin{array}{l} A_{12}A_{34}B_{13}B_{42}C_{14}C_{23} \\ A_{43}A_{21}B_{24}B_{31}C_{32}C_{41} \end{array} \right. \\ i_3 \left\{ \begin{array}{l} B_{14}B_{32}C_{12}C_{34}A_{13}A_{42} \\ B_{32}B_{41}C_{43}C_{21}A_{24}A_{13} \end{array} \right. \\ i_5 \left\{ \begin{array}{l} C_{13}C_{42}A_{14}A_{23}B_{12}B_{34} \\ C_{24}C_{31}A_{32}A_{41}B_{43}B_{24} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_2 & a_3 & a_4 \\ B_1\ E_{14}B_4\ E_{23}B_{14}B_{41} & B_1\ E_{12}B_2\ E_{34}B_{12}B_{21} & B_1\ E_{13}B_3\ E_{24}B_{13}B_{31} \\ E_{24}C_3\ F_{13}C_1\ C_{13}C_{31} & E_{23}C_4\ F_{14}C_1\ C_{14}C_{41} & E_{34}C_2\ F_{12}C_1\ C_{12}C_{21} \\ B_3\ F_{23}B_2\ F_{14}B_{32}B_{23} & B_4\ F_{34}B_3\ F_{12}B_{43}B_{34} & B_2\ F_{24}B_4\ F_{13}B_{24}B_{42} \\ E_{13}C_2\ F_{24}C_4\ C_{24}C_{42} & E_{14}C_3\ F_{23}C_2\ C_{32}C_{23} & E_{12}C_4\ F_{34}C_3\ C_{43}C_{34} \\ B_{13}C_{23}B_{42}C_{14}A_{12}A_{34} & B_{14}C_{34}B_{23}C_{12}A_{13}A_{42} & B_{12}C_{42}B_{34}C_{13}A_{14}A_{23} \\ B_{31}C_{32}B_{24}C_{41}A_{43}A_{21} & B_{41}C_{43}B_{32}C_{21}A_{24}A_{13} & B_{21}C_{24}B_{43}C_{31}A_{32}A_{41} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} b_2 & b_3 & b_4 \\ C_2\ E_{23}C_4\ F_{14}C_{14}C_{41} & C_1\ E_{34}C_2\ F_{12}C_{12}C_{21} & C_1\ E_{24}C_3\ F_{13}C_{13}C_{31} \\ F_{13}A_3\ E_{13}A_1\ A_{13}A_{31} & F_{14}A_4\ F_{14}A_1\ A_{14}A_{41} & F_{12}A_2\ E_{14}A_1\ A_{12}A_{21} \\ C_3\ F_{23}C_2\ E_{14}C_{32}C_{23} & C_4\ F_{34}C_3\ E_{12}C_{43}C_{34} & C_2\ F_{24}C_2\ E_{13}C_{42}C_{24} \\ E_{24}A_2\ F_{24}A_4\ A_{24}A_{42} & E_{23}A_3\ F_{23}A_2\ A_{32}A_{23} & E_{34}A_4\ F_{34}A_3\ A_{43}A_{34} \\ C_{13}A_{23}C_{42}A_{14}B_{12}B_{34} & C_{14}A_{34}C_{23}A_{12}B_{13}B_{42} & C_{12}A_{42}C_{34}A_{13}B_{14}B_{23} \\ C_{31}A_{32}C_{24}A_{41}B_{43}B_{21} & C_{41}A_{43}C_{32}A_{21}B_{24}B_{31} & C_{21}A_{24}C_{43}A_{31}B_{32}B_{41} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} c_2 & c_3 & c_4 \\ A_1\ F_{14}A_4\ E_{14}A_{14}A_{41} & A_1\ F_{12}A_2\ E_{14}A_{12}A_{21} & A_1\ F_{13}A_3\ E_{13}A_{13}A_{31} \\ E_{13}B_3\ E_{24}B_1\ B_{13}B_{31} & E_{14}B_4\ E_{23}B_1\ B_{14}B_{41} & E_{12}B_2\ E_{34}B_1\ B_{12}B_{21} \\ A_3\ F_{23}A_2\ E_{23}A_{32}A_{23} & A_4\ E_{34}A_3\ F_{34}A_{43}A_{34} & A_2\ F_{24}A_4\ E_{24}A_{42}A_{24} \\ F_{13}B_2\ F_{24}B_4\ B_{24}B_{42} & F_{14}B_3\ F_{23}B_2\ B_{32}B_{23} & F_{12}B_4\ F_{34}B_3\ B_{43}B_{34} \\ A_{13}B_{23}A_{42}B_{14}C_{12}C_{34} & A_{14}B_{34}A_{23}B_{12}C_{13}C_{42} & A_{12}B_{42}A_{34}B_{13}C_{14}C_{23} \\ A_{31}B_{32}A_{24}B_{41}C_{43}C_{21} & A_{41}B_{42}A_{32}B_{21}C_{24}C_{31} & A_{21}B_{24}A_{43}B_{31}C_{32}C_{41} \end{array}$$

Aus dem Umstande, dass sich die 15 Geradenpaare (r, i) in Hinsicht der 10 Hyperboloide $a_2 a_3 \ldots h$ in gleicher Weise verhalten, kann man wie oben (9.) schliessen, dass die sechs Tetraeder des 1., 2., ... 10. conjugierten desmischen Systemes (unter 4) Polartetraeder sind in Bezug auf die Hyperboloide $h a_2 a_3 a_4 b_2 b_3 b_4 c_2 c_3 c_4$.

Die neun zu den neuen desmischen Tetraedersystemen gehörigen Tafeln (wie unter 9.) sind die folgenden:

(a_2)	$I_3^a I_4^a$	$I_4^a T_2$	$I_3^a T_2$
$A I_2^b$	b_2	c_3	c_4
$A I_2^c$	c_2	b_3	b_4
$I_2^b I_2^c$	h	a_4	a_3

(a_3)	$I_4^a I_2^a$	$I_5^a T_3$	$I_4^a T_3$
$A I_3^b$	b_3	c_4	c_2
$A I_3^c$	c_3	b_4	b_2
$I_3^b I_3^c$	h	a_2	a_4

(a_4)	$I_2^a I_3^a$	$I_3^a T_4$	$I_2^a T_4$
$A I_4^b$	b_4	c_2	c_3
$A I_4^b$	c_4	b_2	b_3
$I_4^b I_4^c$	h	a_3	a_2

(b_2)	$I_3^b I_4^b$	$I_4^b T_2$	$I_3^b T_2$
$B I_2^c$	c_2	a_3	a_4
$B I_2^a$	a_2	c_3	b_4
$I_2^c I_2^a$	h	b_4	b_3

(b_3)	$I_4^b I_2^b$	$I_2^b T_3$	$I_4^b T_3$
$B I_3^c$	c_3	a_4	a_2
$B I_3^a$	a_3	c_4	c_2
$I_3^c I_3^a$	h	b_2	b_4

(b_4)	$I_2^b I_3^b$	$I_3^b T_4$	$I_2^b T_4$
$B I_4^c$	c_4	a_2	a_3
$B I_4^a$	a_4	c_2	c_3
$I_4^c I_4^a$	h	b_3	b_2

(c_2)	$I_3^c I_4^c$	$I_4^c T_2$	$I_3^c T_2$
$C I_2^a$	a_2	b_3	b_4
$C I_2^b$	b_2	a_3	a_4
$I_2^a I_2^b$	h	c_4	c_3

(c_3)	$I_4^c I_2^c$	$I_2^c T_3$	$I_5^c T_3$
$C I_3^a$	a_3	b_4	b_2
$C I_3^b$	b_3	a_4	a_2
$I_3^a I_3^b$	h	c_2	c_4

(c_4)	$I_2^c I_3^c$	$I_3^c T_4$	$I_2^c T_4$
$C I_4^a$	a_4	b_2	b_3
$C I_4^b$	b_4	a_2	a_3
$I_4^a I_4^b$	h	c_2	c_2

In jeder Tafel sind die in der ersten Zeile befindlichen Hyperboloide diejenigen, in Bezug auf welche die Tetraeder der nämlichen Tafel Polartetraeder sind.

Diese sechs Tetraeder einer Tafel bilden ein conjugiertes desmisches Tetraedersystem, zu welchem dieses Hyperboloid *zugeordnet* genannt werden soll.

12. Bevor wir noch die Resultate dieser Untersuchungen in einem Satz zusammenfassen, wollen wir noch zwei Fragen beantworten. Die erste wäre, ob die Fläche h reell oder imaginär ist?

Da sämmtliche Gegenkanten der Polartetraeder R und R_i in Bezug auf h, h in conjugiert-imaginären Punkten treffen, so ist h

eine imaginäre Fläche II. Ordnung. Während also das dem reellen desmischen Tetraedersysteme zugeordnete Hyperboloid imaginär ist, sind die den imaginären desmischen Tetraedersystemen zugeordneten Hyperboloide reell.

13. Die zweite der zu beantwortenden Fragen ist: ob im Allgemeinen zwei Hyperboloide, die sich in einem Viereck schneiden, einem einfachen desmischen Hyperboloidensysteme angehören können?

Wir nehmen ein Hyperboloid b_2' an, welches c_2 in dem Viereck $A_1A_4A_2A_3$ schneidet. Die zwei Hyperboloide b_2', c_2 sind in vierfacher Weise centrisch-collinear; die Collineationscentren sind die Eckpunkte des Viereckes, und die Collineationsebenen gehen durch die übrigen drei Eckpunkte desselben. Es haben nämlich die Hyperboloide b_2', c_2 im Eckpunkte A_i eine gemeinsame Tangentialebene, die durch zwei Seiten des Viereckes geht; die Ebene durch die übrigen zwei Seiten des Viereckes sei α_i. Ist C_i' ein beliebiger Punkt des Hyperboloids b_2', so fällt das Hyperboloid b_2^*, welches durch C_i' gehend mit c_2 in Bezug auf den Punkt A_i und die Ebene α_i centrisch-collinear ist, mit b_2 zusammen. Daraus folgt, dass die durch den Punkt A_i gezogenen Geraden die Hyperboloide b_2', c_2 und die Ebene α_i in projectiven Punktwürfen treffen.

Es treffe nun eine durch den Punkt A_1 gezogene Gerade die Hyperboloide b_2', c_2 in den Punkten C_1', B_1, und es seien die durch diese Punkte gehenden Erzeugenden $C_1'C_4'$, $C_1'C_3'$; B_1B_4, B_1B_3; ferner bezeichnen wir mit $C_2'C_3'$, $C_2'C_4'$; B_2B_3, B_2B_4 diejenigen Erzeugenden der Hyperboloide, welche jene von den Gegenseiten des Viereckes $A_1A_4A_3A_2$ harmonisch trennen.

Die Schnittpunkte der Seiten der Vierecke $C_1'C_4'C_2'C_3'$, $B_1B_4B_2B_3$ mit den Seiten des Viereckes $A_1A_4A_2A_3$ sind wie allhier ersichtlich

$$\begin{array}{cc} A_1\ E_{14}'A_4\ F_{14}' & A_1\ E_{14}A_4\ F_{14} \\ F_{13}'C_3'\ E_{24}'C_1' & F_{13}B_4\ F_{24}B_2 \\ A_4\ F_{23}'A_2\ E_{23}' & A_3\ E_{23}A_2\ F_{23} \\ E_{13}'C_2'\ F_{24}'C_4' & E_{13}B_1\ E_{24}B_3, \end{array}$$

wo die Punkte in den Zeilen und Reihen harmonische Würfe bilden.

Mit Rücksicht auf die Hyperboloide b_2', c_2 ist

$$A_2A_3(A_1B_1A_4C_1') \barwedge A_1A_4(A_1E_{14}A_4F_{14}'),$$

woraus in Hinblick auf jene Schnittpunkte folgt, dass die Punkte E_{ij}', F_{ij}' nur dann mit den Punkten E_{ij}, F_{ij} coincidieren, wenn der Ebenewurf $A_2A_3(A_1B_1A_4C_4')$ harmonisch ist, d. h. wenn die Hyperboloide b_2', c_2 centrisch-involutorisch liegen. Nachdem in diesem Falle die Punkte

$$\begin{array}{cccc} B_1 & E_{14} & B_4 & E_{23} \\ E_{24} & C_3' & F_{13} & C_1' \\ B_3 & F_{23} & B_2 & F_{14} \\ E_{13} & C_2' & F_{24} & C_4' \end{array}$$

in den Zeilen und Reihen harmonische Würfe bilden: so liegen auch die Vierecke $B_1B_4B_2B_3$, $C_1'C_4'C_2'C_3'$ auf einem Hyperboloid a_2', und die Hyperboloide a_2', b_2', c_2 bilden ein desmisches System.

Daraus folgt, dass man zwei, sich in einem Viereck schneidende Hyperboloide, im Allgemeinen durch kein Hyperboloid zu einem desmischen Systeme ergänzen kann, d. h. es giebt kein Hyperboloid, welches jene in Vierecken schneidet. Liegen aber die zwei angenommenen Hyperboloide in vierfacher Weise centrisch-involutorisch, dann kann man dieselben durch ∞^2 Hyperboloide zu desmischen Systeme ergänzen.

14. Die Resultate der bisherigen Untersuchungen sind:

Durch die sich in acht Punkten schneidenden Gegenkanten der Tetraederpaare eines einfachen desmischen Tetraedersystemes gehen drei Hyperboloide, welche ein einfaches desmisches System bilden. Je zwei dieser Hyperboloide sind in Bezug auf die Eckpunkte und die Ebenen durch die anderen Eckpunkte ihres gemeinsamen Viereckes centrisch-involutorisch. Das einfache desmische Tetraedersystem bestimmt in dieser Weise neun Hyperboloide, die sich in sechs desmische Systeme spalten, und ausser diesen noch ein Hyperboloid, in Bezug auf welches sowohl die drei Tetraeder des Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes Polartetraeder sind, und welches Hyperboloid als dem conjugierten desmischen Tetraedersysteme zugeordnet bezeichnet werden soll.

Diese zehn Hyperboloide, von welchen neun reell und eines imaginär ist, haben folgende Eigenschaften:

1. Jedes derselben trifft die übrigen neun in Vierecken;

2. einzeln sind sie denjenigen zehn conjugierten desmischen Tetraedersystemen zugeordnet, welche das angenommene einfache Tetraedersystem zu einem vollständigen desmischen Systeme ergänzen,

3. sie spalten sich in 60-erlei Weise in einfache desmische Hyperboloidensysteme; jedes Hyperboloid kommt in 18 Systemen vor,

4. sie haben 15-mal zu vieren zwei gemeinsame Erzeugende.

15. Wenn wir das vollständige desmische Tetraedersystem sowie das zugeordnete Hyperboloidensystem mit einer Ebene schneiden, so besteht die Schnittfigur aus 15 Vierseiten und 10 Kegelschnitten. Die Vierseite bilden ein vollständiges desmisches Vierseitsystem, die Kegelschnitte ein *vollständisches desmisches Kegelschnittsystem*, und es ergiebt sich (aus 14) folgender Satz:

Durch je acht auf acht Geraden liegende Eckpunkte der Vierseitpaare eines einfachen desmischen Vierseitsystems gehen drei Kegelschnitte, welche ein einfaches desmisches System bilden. Jeder dieser Kegelschnitte wird von den zwei anderen in acht Punkten getroffen, welche zwei harmonische Punktwürfe bilden.

Das einfache desmische Vierseitsystem bestimmt in dieser Weise neun Kegelschnitte, die sich in sechs desmische Systeme spalten, und ausser diesen noch einen Kegelschnitt, in Bezug auf welchen sowohl die drei Vierseite des Systemes, wie auch die des conjugierten Systemes Polarvierseite sind, und welcher Kegelschnitt, als dem conjugierten desmischen Vierseitsysteme zugeordnet genannt werden soll.

Diese zehn Kegelschnitte, von welchen neun reell und einer imaginär ist, haben folgende Eigenschaften:

1. Dieselben sind denjenigen zehn conjugierten desmischen Vierseitsystemen zugeordnet, welche das angenommene einfache Vierseitsystem zu einem vollständigen desmischen Vierseitsystem ergänzen.

2. Sie spalten sich in 60-erlei Weise in einfache desmische Kegelschnittsysteme; jeder Kegelschnitt kommt in 18 Systemen vor.

3. Sie gehen 15mal zu vieren durch zwei gemeinsame Punkte.

8.

DIE VERTHEILUNG DES NIEDERSCHLAGES NACH TAGESZEITEN.

Von J. HEGYFOKY,
kath. Pfarrer in Turkeve (Ungarn).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 13. März 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítő" (Math. u. Naturw. Anzeiger) Bd. XVII pp. 490—509.

Die tägliche Periode des Niederschlages ist noch nicht gehörig aufgeklärt. Dass man es hier mit einem sehr verwickelten Phänomen zu thun hat, geht schon aus den Daten hervor, welche die Lehrbücher von SPRUNG und BEBBER aufweisen. Die tägliche Periode lässt zwei, drei, ja sogar vier Maxima und ebenso viele Minima erkennen, die aber auch noch jahreszeitliche Verschiedenheiten darthun.

Die publicierten Daten über stündliche Niederschlagsmengen sind nicht nur von geringer Anzahl, sondern auch meistens von kurzer Dauer. Das kann aber auch nicht Wunder nehmen; sind doch die registrierenden Instrumente erst neueren Datums und ist die Bearbeitung der Autogramme eine sehr lästige Beschäftigung. Eben deshalb verfügen wir bis zur Zeit auch über keine Zusammenstellung der Ergebnisse stündlicher Regenaufzeichnungen. HELLMANN sammelte zwar dies bezügliche Daten und schickte sich (1889) an, dieselben zu publicieren, jedoch, wie er vom 23. Jan. 1899 schreibt, ist seine Abhandlung noch immer nicht gedruckt.

Über die tägliche Periode des Niederschlages in Ungarn ist bis jetzt nichts bekannt gemacht, weil selbstregistrierende Regenmesser erst zu Ende des Jahres 1899 an einigen Stationen aufgestellt wurden. Unbekannt ist uns auch die tageszeitliche Vertheilung; wir wissen nicht einmal, ob mehr Niederschlag Vormittag, Nachmittag oder in der Nacht fällt. Zu Ó-Gyalla und Budapest wird zwar an den drei Terminstunden auch der Niederschlag gemessen, weil aber die Daten von kurzer Dauer und theils unpubliziert sind, so werde ich mich bloss an jene Angaben halten, welche meinen Aufzeichnungen entstammen, die ich in *Tardos*, $13^1/_2$ Monate (December 1887—15. Jan. 1889), in *Bánhorváth* $32^1/_2$ Monate (Febr. 1889—15. Oct. 1891), und in *Turkeve* 86 Monate (Nov. 1891—1898) hindurch sammelte. Meine 11jährigen (132 Monate) Beobachtungen wurden theils in der Mitte der grossen Tiefebene (Turkeve), theils am nördlichen Saume derselben (Tardos), theils unweit derselben zwischen Bergen (Bánhorváth) angestellt. Der Niederschlag wurde um 7a., 2p. und 9p. gemessen.

Die folgende Tabelle I macht uns mit der Summe des Niederschlages Vormittags (7a.—2p.), Nachmittags (2p.—9p.) und Nachts (9p.—7a.) bekannt. Ausser der jahreszeitlichen Menge theile ich auch jene für den Frühling und Sommer, für den Herbst und Winter separat mit, weil je zwei Jahreszeiten gemeinsame Züge aufweisen.

Die Daten der Tabelle I können nur bezüglich der zwei Tageszeiten 7a.—2p., 2p.—9p. verglichen werden. Wie zu sehen, ist die Menge des Niederschlages im Herbst und Winter zu diesen zwei Tageszeiten bei allen drei Stationen ziemlich gleich gross; nicht so im Frühling und Sommer, wo Nachmittag viel mehr Niederschlag fällt, als Vormittag. Die Jahressumme weist auch eine grössere Menge Nachmittag, als Vormittag auf. *Im Herbst und Winter vertheilt sich der Niederschlag Vormittag und Nachmittag ziemlich gleichförmig, im Frühling und Sommer aber sehr ungleichförmig. Nachmittags fällt fast noch einmal soviel Regen, als am Vormittag.*

Damit man auch den Niederschlag während der Nacht (9p.—7a.) mit dem der zwei anderen Tageszeiten vergleichen

Tabelle I.

Niederschlagssumme in Mm.

	Tardos Dec. 1887—15. Jan. 1889				Bánhorváth Febr. 1889—15. Oct. 1891				Turkeve 1892—1898				Alle drei Stationen 11 Jahre*			
	Stunde				Stunde				Stunde				Stunde			
	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7	7—7
Winter	58.9	62.0	75.1	196.0	39.9	38.7	57.0	135.6	237.3	208.3	267.8	713.4	344.5	318.8	404.2	1067.5
Frühling	25.6	67.5	35.1	128.2	129.3	202.4	162.6	494.3	289.6	550.8	466.5	1306.9	444.5	820.7	664.2	1929.4
Sommer	63.4	75.5	117.5	256.4	131.6	262.6	234.4	628.6	283.3	558.6	427.6	1269.5	487.3	896.7	779.5	2154.5
Herbst	30.4	37.8	48.0	116.2	88.0	78.9	152.6	319.5	290.4	294.1	408.1	992.6	425.3	432.7	628.4	1486.4
Frühling / Sommer	89.0	143.0	152.6	384.6	260.9	465.0	397.0	1122.9	572.9	1109.4	894.1	2576.4	922.8	1717.4	1443.7	4083.9
Herbst / Winter	89.3	99.8	123.1	312.2	127.9	117.6	209.6	455.1	527.7	502.1	675.9	1706.0	769.8	751.5	1032.6	2553.9
Jahr	178.3	242.8	275.7	696.8	388.8	582.6	606.6	1578.0	1100.6	1611.8	1570.0	4282.4	1692.6	2468.9	2476.3	6637.8

* Hier sind die Mengen für Turkeve aus 1891, Nov., Dec. beigezählt.

könne, drücken wir denselben in Percenten der Summe aus. Bei gleichförmiger Vertheilung müsste der Vormittag (7a.—2p.) und Nachmittag (2p.—9p.) **29**, die Nacht (9p.—7a.) **42** % der Menge aufweisen. Die folgende Tabelle II giebt zu erkennen, ob eine Tageszeit mehr (+) oder weniger (—) aufweist, als sie bei gleichförmiger Vertheilung aufweisen sollte.

Tabelle II.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Tardos 13½ Monat			Bánhorváth 32½ Monat			Turkeve 84 Monate (7 Jahre)			Alle 3 Stationen 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7
Winter	1	3	— 4	0	0	0	4	0	— 4	3	1	— 4
Frühling	— 9	24	— 15	— 3	12	— 9	— 7	13	— 6	— 6	14	— 8
Sommer	— 5	1	4	— 8	13	— 5	— 7	15	— 8	— 7	13	— 6
Herbst	— 3	4	— 1	— 2	— 4	6	0	1	— 1	0	0	0
Frühling | Sommer	— 6	8	— 2	— 6	13	— 7	— 7	14	— 7	— 6	13	— 7
Herbst | Winter	0	3	— 3	— 1	— 3	4	2	0	— 2	1	0	1
Jahr	— 4	6	— 2	— 4	8	— 4	— 3	8	— 5	— 3	8	— 5

Wie Tabelle II zu erkennen giebt, fiel an den 3 Stationen im Jahre *um 8 % mehr* Regen Nachmittag (2p.—9p.), als laut gleichförmiger Vertheilung fallen sollte.

Dass die tageszeitliche Vertheilung sich so gestaltet, daran sind die wärmeren Monate Schuld. *Im Frühling und Sommer fällt Nachmittag um 13 % mehr Regen, als bei gleichförmiger Vertheilung fallen würde.* Im Herbst und Winter ist die Vertheilung an allen drei Tageszeiten sozusagen fast ganz gleichförmig.

Laut den 7jährigen Beobachtungen zu Turkeve kann als wahrscheinlich angenommen werden, *dass der Niederschlag im Herbst über den ganzen Tag fast vollkommen gleichmässig vertheilt ist; im Winter fällt etwas mehr Vormittags, als Nachts; im Frühling und Sommer erreicht die Menge Nachmittags das Dreifache jener Vormittags und Nachts.* Die anderen zwei Stationen geben

wegen der kürzeren Beobachtungszeit noch kein so bestimmtes Resultat.

Niederschläge bringen meistens barometrische Depressionen. Weil aber die Vertheilung derselben im Frühling und Sommer eine andere ist, als im Herbst und Winter, müssen auch noch andere Ursachen wirken, welche in den erstgenannten zwei Jahreszeiten Nachmittags eine Vermehrung der Regenmenge herbeiführen. *Die Hauptursache davon muss in dem aufsteigenden Luftstrom gesucht werden, welcher sich in den wärmeren Monaten Nachmittags am kräftigsten entwickelt.* Aufsteigend erkaltet derselbe und scheidet Wasser aus, verursacht also den Regen.

Am Nachmittag entstehen die meisten Gewitter. Auch bei dieser Erscheinung spielt der aufsteigende Luftstrom die Hauptrolle. Gewitter und Niederschlag gehen Hand in Hand. Sehen wir nun, wieviel Regen wir zur Zeit der Gewitter bekommen. Als Gewitterregen bezeichne ich jene Menge, welche zu jener Tageszeit fiel, in welcher Donner oder wenigstens Wetterleuchten wahrzunehmen war. Die Menge wurde in % ausgedrückt und auf die gleichförmige Vertheilung per Tageszeit (29, resp. 42 %) bezogen.

Tabelle III.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Ohne Gewitter						Mit Gewitter (⛈, ↯)					
	Turkeve 86 Monate			Alle 3 Stationen 11 Jahre			Turkeve 86 Monate			Alle 3 Stationen 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7–2	2–9	9–7	7–2	2–9	9–7	7–2	2–9	9–7	7–2	2–9	9–7
Winter	4	0	— 4	3	1	— 4	—	—	—	—	—	—
Frühling	— 1	1	0	— 2	3	— 1	— 19	38	— 19	— 14	35	— 21
Sommer	4	— 2	— 2	0	— 4	4	— 16	30	— 14	— 13	27	— 14
Herbst	4	— 6	2	3	— 4	1	— 27	45	— 18	— 25	30	— 5
Jahr	3	— 2	— 1	1	— 1	0	— 18	34	— 16	— 15	30	— 15

Die tageszeitliche Vertheilung des Niederschlages ist zur Zeit ohne Gewitter so ziemlich gleichförmig nicht nur im Winter, sondern auch in den übrigen Jahreszeiten. *Treten aber Gewitter*

auf, dann fällt Nachmittags (2p.—9p.) 27—45 % mehr Regen, als bei gleichförmiger Vertheilung fallen sollte. Das nachmittägige Regenmaximum ist also mit dem Maximum der Gewitterfrequenz enge verknüpft.

Nachdem wir mit der Vertheilung der Niederschlagsmenge nach den drei Tageszeiten uns bekannt gemacht haben, betrachten wir nun auch die *Häufigkeit* derselben und untersuchen, ob es Vormittags, Nachmittags oder in der Nacht häufiger regnete.

In Tabelle IV werden nicht die Fälle selbst, sondern die Abweichung derselben von den auf die drei Tageszeiten entfallenden Percenten (29, 29, 42 %) angeführt. Bemerkt sei, dass in der Spalte aller drei Stationen auch die Beobachtungen zu Turkeve im Monate Nov. und Dec. 1891 inbegriffen sind.

Im Frühling und Sommer regnete es am häufigsten Nachmittags (2p.—9p.); im Herbst und Winter weisen die drei Tageszeiten keine so namhafte Differenzen auf. Laut dem Mittel der drei Stationen regnete es im Frühling und Sommer Nachmittags unter 100 in 6 Fällen häufiger, als es hätte regnen sollen; in der Nacht und Vormittag aber ebensoviel seltener. *Nicht nur mehr, sondern auch häufiger fällt Regen in der wärmeren Jahreszeit Nachmittags, als in den übrigen Tagesstunden.*

Tabelle III belehrt uns darüber, dass an Gewittertagen Nachmittags besonders viel Regen fällt, und Tabelle IV giebt zu erkennen, dass es zu jener Zeit auch sehr häufig regnet. *Mit dem Nachmittagsmaximum der Gewitter stellt sich auch das Maximum der Regenmenge und Regenhäufigkeit ein.*

Die Niederschlagsdichtigkeit einer Tageszeit stellt sich folgendermaassen heraus:

	Stunde		
	7—2	2—9	9—7
Im Allgemeinen . . . Mm.	2.53	3.11	2.42
An Gewittertagen . . . „	3.55	5.47	4.63
Verhältniss . . . . . „	1.40	1.76	1.91

Die Dichtigkeit ist verhältnissmässig am grössten in Gewitternächten.

Tabelle IV.

Abweichung der Niederschlagshäufigkeit von der gleichförmigen Vertheilung in %.

	Tardos Dec. 1887 bis 15. Jan. 1889			Bánhorváth Febr. 1889 bis 15. Oct. 1891			Turkeve 1892—1898			Alle 3 Stationen 11 Jahre			Alle 3 Stationen an Gewittertagen ([ζ, ζ); 11 Jahre		
	Stunde			Stunde			Stunde			Stunde			Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7	7—2	2—9	9—7
Winter	—	—	—	2	4	— 6	2	— 1	— 1	0	0	0	—	—	—
Frühling	—	—	—	— 2	7	— 5	— 5	4	1	— 4	5	1	— 8	23	— 15
Sommer	—	—	—	— 1	6	— 5	0	6	— 6	0	6	— 6	— 7	22	— 15
Herbst	—	—	—	— 2	2	0	— 5	0	5	— 5	1	4	— 23	28	— 5
Frühling / Sommer	2	7	— 9	— 2	6	— 4	— 3	5	— 2	— 2	6	— 4	—	—	—
Herbst / Winter	2	— 1	— 1	— 1	3	— 2	— 1	— 1	2	— 2	0	2	—	—	—
Jahr	2	3	— 5	— 1	5	— 4	— 2	2	0	— 2	3	— 1	— 9	23	— 14

Zum Vergleich meiner Beobachtungen sei es gestattet, jene von Berlin aus der deutschen Ebene anzuführen. (Meteor. Zeitschr. 1897, p. 211.)

Tabelle V.

Niederschlag in Berlin (1885—1896).

	Summe in Mm.				Abweichung von der gleichförmigen Vertheilung in %		
	Stunde				Stunde		
	7—2	2—9	9—7	7—7	7—2	2—9	9—7
Winter . . .	199.1	196.1	318.9	714.1	— 1	— 2	3
Frühling . . .	254.1	440.7	446.6	1141.4	— 7	10	— 3
Somme . . .	498.2	871.8	599.0	1969.0	— 4	15	— 11
Herbst . . .	339.2	427.3	569.6	1336.1	— 4	3	1
Frühling Sommer . .	752.3	1312.5	1045.6	3110.4	— 5	13	— 8
Herbst Winter . . .	538.3	623.4	888.5	2050.2	— 3	2	1
Jahr	1290.6	1935.9	1934.1	5160.6	— 4	9	— 5

Wie auf der ungarischen, fällt auch auf der deutschen Ebene im Frühling und Sommer der meiste Regen Nachmittags, in den anderen zwei Jahreszeiten ist die Vertheilung des Niederschlages zu allen drei Tageszeiten ziemlich gleichförmig. Die Wirkung des aufsteigenden Luftstromes ist hier wie dort die gleiche.

Im Anschluss an die mitgetheilten Daten mag ein Versuch gemacht werden, eine Zusammenstellung einiger mir zugänglichen, stündlichen Aufzeichnungen zu geben. Jedoch nicht die stündliche Regenmenge selbst soll dargethan werden, weil auch eine 22jährige, ausgeglichene Serie von New York die tägliche Periode noch nicht ganz regelmässig darstellt, sondern jene 6—6stündlicher Intervalle. Wie vordem, soll auch jetzt die Abweichung eines 6stündigen Intervalles von der gleichförmigen (25 %) Vertheilung in Percenten angegeben werden; ebenso die eines 12stündigen von 50 %. Nach Thunlichkeit sind die Intervalle so gewählt, dass das nachmittägige der Tageszeit 2p.—9p. möglichst nahe zu stehen kommt. Tabelle VI enthält die so berechneten Daten.

In der Spalte „Anmerkung" bedeutet M. Z. den Jahrgang und die Seite der Meteorologischen Zeitschrift.

Tabelle VI.

Abweichung der Niederschlagsmenge von der gleichförmigen Vertheilung in %.

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	Anmerkung
1. Zechen . . .	1857/71	Dec.—Febr.	15	109	0	+ 2	— 1	— 1	+ 1	— 1	M. Z. 1876, p. 23.
		März—Mai		118	— 4	— 4	+ 7	+ 1	+ 3	— 3	
		Juni—Aug.		222	— 5	— 3	+ 9	— 1	+ 6	— 6	
		Sept.—Nov.		103	+ 1	— 2	+ 1	0	— 1	+ 1	
		Jahr		551	— 3	— 2	+ 5	0	+ 3	— 3	
2. Berlin	1885/96	Dec.—Febr.	12	60	+ 4	— 2	— 2	0	— 4	+ 4	M. Z. 1897, p. 211.
		März—Mai		95	— 2	— 6	+ 9	— 1	+ 3	— 3	
		Juni—Aug.		164	— 8	— 2	+ 16	— 6	+ 14	— 14	
		Sept.—Nov.		111	0	— 3	+ 2	+ 1	— 1	+ 1	
		Jahr		430	— 3	— 3	+ 8	— 2	+ 5	— 5	
3. Prag	1850/69	Dec.—Febr.	20	59	— 1	+ 1	+ 3	— 3	+ 4	— 4	M. Z. 1882, p. 246.
		März—Mai		97	— 6	— 2	+ 9	— 1	+ 7	— 7	
		Juni—Aug.		173	— 8	— 3	+ 10	+ 1	+ 7	— 7	
		Sept.—Nov.		18	— 2	+ 3	— 1	0	+ 2	— 2	
		Jahr		409	— 5	— 1	+ 6	0	+ 5	— 5	
4. Hohenheim .	1883/93	Apr.—Sept.	10	—	— 5	— 4	+ 8	+ 1	+ 4	— 4	M. Z. 1894, p. 391.
		Jahr		—	— 4	— 4	+ 8	0	+ 4	— 4	
5. Wien	1853/56	Apr.—Oct.	4	283	— 5	— 1	+ 8	— 2	+ 7	— 7	M. Z. 1876, p. 23. Hann. Tüg. Gang. e. m. Elem., p. 17.
6. Klagenfurt .	1886/88	Mai—Sept.	3	556	— 1	— 2	+ 2	+ 1	0	0	M. Z. 1889, p. 229.
7. Basel	1888/93	Jahr	6	541	0	— 2	+ 2	0	0	0	M. Z. 1894, p. 419.
8. Modena . . .	?	Jahr	?	—	0	0	+ 4	— 4	+ 4	— 4	M. Z. 1882, p. 54.
9. Pawlowsk .	1878/79	Apr.—Sept.	2	256	+ 2	— 2	+ 4	— 4	+ 2	— 2	M. Z. 1882, p. 54.

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	Anmerkung
10. New-York .	1870/76	Oct.—März	7	505	+ 1	+ 2	0	− 3	+ 2	− 2	M. Z. 1882, p. 236.
		Apr.—Sept.		619	− 1	− 2	+ 4	− 1	+ 2	− 2	
		Jahr		1124	0	− 1	+ 2	− 1	+ 1	− 1	
	1870/91	Jahr	22	1097	0	− 1	+ 2	− 1	+ 1	− 1	M. Z. 1892, p. 480.
11. Washington	1874/78 1880 91	Jahr	18.7	947	− 2	0	+ 4	− 2	+ 4	− 4	M. Z. 1892, p. 480.
12. Calcutta . .	?	Nov.—Febr.	7	56	− 6	− 15	+ 22	− 1	+ 7	− 7	M. Z. 1889, p. 111.
		März—Mai		172	− 19	− 13	+ 26	+ 6	+ 13	− 13	
		Juni—Oct.		1116	− 2	+ 4	+ 9	− 11	+ 13	− 13	
		Jahr		1344	− 4	+ 1	+ 11	− 8	+ 12	− 12	
13. Simla . . .	1843/45	Nov.—Febr.	3	161	− 7	+ 23	− 4	− 12	+ 19	− 19	M. Z. 1889, p. 111.
		März—Mai		183	− 5	− 2	+ 18	− 11	+ 16	− 16	Die Stunden sind $2^1/_2$ a.—$8^1/_2$ a. und so weiter.
		Juni—Oct.		1893	+ 1	+ 2	+ 5	− 8	+ 7	− 7	
		Jahr		2237	0	+ 3	+ 6	− 9	+ 9	− 9	
14. Batavia . .	1866/82	Dec.—Febr	17	875	+ 1	− 3	− 1	+ 3	− 4	+ 4	M. Z. 1886, p. 146.
		März—Mai		391	− 13	− 4	+ 17	0	+ 13	− 13	
		Juni—Sept.		275	− 16	− 11	+ 25	+ 2	+ 14	− 14	
		Oct.—Nov.		208	− 18	− 3	+ 32	− 11	+ 29	− 29	
		Jahr		1749	− 7	− 4	+ 11	0	+ 7	− 7	
	1866/90	Jan.—Febr.	25	—	+ 5	− 5	− 4	+ 4	− 9	+ 9	M. Z. 1893, p. 356.
		Juni—Juli		—	− 15	− 13	+ 29	− 1	+ 16	− 16	
		Jahr		—	− 6	− 5	+ 11	0	+ 6	− 6	
15. Alexandria	1891	Jahr	1	555	− 1	0	+ 4	− 3	+ 4	− 4	M. Z. 1893, p. 40.
16. S. Paulo (RioJaneiro)	1893/96	Jahr	4	1223	− 10	− 7	+ 18	− 1	+ 11	− 11	M. Z. 1898, p. 70.
17. Botucatu (RioJaneiro)	1894/96	Jahr	3	1177	− 9	− 3	+ 14	− 2	+ 11	− 11	M. Z. 1898, p. 71.
18. Ben Nevis.	?	Dec.—Febr.	9	—	+ 15	− 2	− 12	+ 1	− 14	+ 16	M. Z. 1892, p. 470.
		März—Mai	8	—	+ 24	− 12	+ 15	− 28	+ 3	− 4	Abweichung vom Tagesmittel in %; nicht gleichbedeutend mit den anderen Daten der
		Juni—Aug.		—	− 1	0	+ 39	− 38	+ 39	− 39	
		Sept.—Nov.		—	− 9	+ 9	− 8	+ 10	− 1	− 1	

					8a.–8a.	8a.–8p.	8p.–8p.	8p.–8a.	8a.–8p.	8p.–8a.	
19. Perpignan .	1884/94	Jahr	11	—	— 1	0	+ 4	— 3	+ 4	— 4	M. Z. 1896, p. 26.
					8a.–2p.	2p.–10p.	10p.–8a.				
20. Utrecht . .	1849/88	Dec.—Febr.	40	155	— 2	+ 4	— 2	—	—	—	M. Z. 1890, (p. 17.)
		März—Mai		234	0	+ 4	— 4	—	—	—	Gleichm. Vertheil.:
		Juni—Aug.		249	0	+ 5	— 5	—	—	—	8 a. — 2 p. = 25 %
		Sept.—Nov.		194	— 1	+ 4	— 3	—	—	—	2 p. — 10 p. = 33 %
		Jahr		832	— 1	+ 4	— 3	—	—	—	10 p. — 8 a. = 42 %.
					7a.–2p.	2p.–7p.	7p.–7a				
21. Paramaribo	1833/34	Jahr	2	5136	— 6	+ 24	— 18	—	—	—	Sprung, Lehrb. d. Meteor., p. 358. Gleichm. Verth.: 7–2 = 29 %; 2-7=21 %; 7-7=50 %.
					7a.–2p.	2p.–9p.	9p.–7a.				
22. Vivia. Congo	?	Jahr	?	—	— 13	+ 14	— 1	—	—	—	Ibidem. Gleichm. Verth.: 7—2 = 29 %; 2-9=29 %; 9-7=42 %.
									Tag	Nacht	
23. Singapore .	1841/43	Dec.—Febr.	3	711	—	—	—	—	+ 33	— 33	M. Z. 1898, p. 476.
		März—Mai		567	—	—	—	—	+ 24	— 24	
		Juni—Aug.		480	—	—	—	—	+ 8	— 8	
		Sept.—Nov.		789	—	—	—	—	+ 11	— 11	
		Jahr		2547	—	—	—	—	+ 19	— 19	
					2a.–8a.	8a.–2p.	2p.–8p.	8p.–2a.	8a.–8p.	8p.–8a.	
24. Wien . . .	1881, 83/88	Apr.—Sept.	7	454	— 4	— 5	+ 4	+ 5	— 1	+ 1	M. Z. 1889, p. 221.
25. Bern	?	Jahr	8	—	— 0	— 4	— 1	+ 5	— 5	+ 5	M. Z. 1882, p. 54.
26. Aachen . .	1895/96	Oct.—März	2	529	— 6	— 1	+ 3	+ 4	+ 2	— 2	M. Z. 1897, p. 383.
		Apr.—Sept.		502	— 3	— 9	+ 4	+ 8	— 5	+ 5	
		Jahr		1031	— 4	— 6	+ 4	+ 6	— 2	+ 2	

Station	Zeitraum	Jahreszeit	Zahl der Jahre	Mm	2a.—8a.	8a.—2p.	2p.—8p.	8p.—2a.	8a.—8p.	8p.—8a.	Anmerkung
27. Triest . . .	Juni 1894 bis Juni 1897	Dec.—Febr.	3	186	− 3	− 4	+ 3	+ 4	− 1	+ 1	Mazelle. Tägl. Periode der Niederschl. in Triest, p. 3.
		März—Mai		268	+ 2	0	− 3	+ 1	− 3	+ 3	
		Juni—Aug.		289	− 2	− 10	− 3	+ 15	− 13	+ 13	
		Sept.—Nov.		277	− 3	+ 3	− 5	+ 5	− 2	+ 2	
		Jahr		1020	− 1	− 3	− 2	+ 6	− 5	+ 5	
28. Coimbra . .	1876/80	Oct.—März	5	689	+ 2	− 2	+ 2	− 2	− 0	0	M. Z. 1882, p. 54.
		Apr.—Sept.		385	+ 3	− 2	− 2	+ 1	− 4	+ 4	
		Jahr		1074	+ 2	− 2	0	0	− 2	+ 2	
29. Greenwich .	1861/66	Oct.—März	6	160	+ 2	0	− 1	− 1	− 1	+ 1	M. Z. 1892, p. 236.
		Apr.—Sept.		203	+ 4	− 6	+ 2	0	− 4	+ 4	
		Jahr		363	+ 3	− 3	− 1	− 1	− 2	+ 2	
30. Hongkong .	1884/88	Dec.—Febr.	5	178	+ 2	− 6	− 4	+ 8	− 10	+ 10	M. Z. 1889, p. 351.
		März—Mai		507	+ 1	+ 9	− 5	− 5	+ 4	− 4	
		Juni—Aug.		1189	+ 8	+ 4	− 6	− 6	− 2	+ 2	
		Sept.—Nov.		291	+ 1	− 1	+ 1	− 1	0	0	
		Jahr		2165	+ 5	+ 4	− 5	− 4	− 1	+ 1	
	1884/93	Nov.—Febr.	10	135	+ 5	− 5	− 6	+ 6	− 11	+ 11	M. Z. 1895, p. 192.
		(März, Sept.) (Apr., Oct.)		626	+ 4	+ 3	− 5	− 2	− 2	+ 2	
		Mai—Aug.		1566	+ 7	+ 8	− 7	− 8	+ 1	− 1	
		Jahr		2327	+ 6	+ 5	− 6	− 5	− 1	+ 1	
31. Mauritius .	1888/96	Je ein Monat	9	115	+ 3	0	− 2	− 1	− 2	+ 2	M. Z. 1898, p. 192.
32. Cordoba . . (Argentina)	1888/90	Oct.—März	2.4	1869	+ 9	− 6	− 4	+ 1	− 10	+ 10	M. Z. 1892, p. 34.
		Apr.—Sept.		208	+ 26	− 17	− 2	− 7	− 19	+ 19	
		Jahr		2077	+ 11	− 7	− 4	0	− 11	+ 11	
					2a.-6a.	6a.-10a.	10a.-2p.	2p.-6p.	6p.-10p.	10p.-2a.	6a.-6p.	6p.-6a.	
33. Lissabon . .	1856/65	Dec.—Febr.	10	292	+ 3	+ 4	− 1	− 2	− 2	− 2	+ 1	− 1	M. Z. 1888, p. 84. Bei gleichmässiger Vertheilung fallen auf je ein Intervall 17 %.
		März—Mai		203	+ 3	+ 1	− 4	+ 2	− 3	+ 1	− 1	+ 1	
		Juni—Aug.		33	+ 5	+ 5	− 5	− 5	+ 1	− 1	− 5	+ 5	
		Sept.—Nov.		292	+ 3	− 2	− 5	+ 2	0	+ 2	− 5	+ 5	
		Jahr		820	+ 4	+ 1	− 4	0	− 1	0	− 3	+ 3	
34. Neu Guinea	Meistens 2—2 Jahre			3010	Konstantinhafen, Fr. Wilhelmshafen, Erima, Stephansort (4 Stationen)						−34	+34	Hann. Klimatologie II., p. 250.

Die Niederschlagsmenge konnte auf Tabelle VI nicht überall für jede Station angeführt werden, weil dieselbe hier und da nicht mitgetheilt wurde. Man findet theils die Regenmenge in Pariser Zoll oder Mm. angegeben, theils aber nur die Percente der einzelnen Stunden; hier wird die Beobachtungszeit, dort nur die Zahl der Jahre bekannt gemacht, oder auch diese nicht. Die 2jährige Menge in Paramaribo ist sehr hoch; laut 26jährigen Aufzeichnungen beträgt dieselbe 2227 Mm.* Die Daten für Perpignan und Lissabon sind nicht stundenweise mitgetheilt, mithin konnten dieselben auch nicht so gruppiert werden, als das Material der anderen Stationen. Für Ben Nevis wurden die Abweichungen per Stunde vom Tagesmittel angegeben, mithin sind dieselben nicht gleichbedeutend mit den übrigen Daten der Tabelle VI.

Dass die Regenmenge nach 6-, resp. 12stündigen Intervallen in Form der Abweichung von 25, resp. 50 % angegeben wurde, sollte nur dazu dienen, den Überblick zu erleichtern. Zum Vergleich eignen sich die Zahlen der Tabelle VI viel besser, als wenn die 6-, resp. 12stündige Menge selbst in Mm. mitgetheilt würde.

Die tageszeitliche Vertheilung des Niederschlages lässt zwei Haupttypen erkennen, nämlich ein:

1) Tagesmaximum, und ein

2) Nachtmaximum.

Das Tagesmaximum fällt auf 2 p.—8 p., das Nachtmaximum zerspaltet sich, und fällt an einigen Stationen auf 8 p.—2 a., an anderen auf 2 a.—8 a.

Tagesmaximum zwischen 2 p.—8 p. weisen die Stationen Nr. 1—23 auf, Ben Nevis auch hierher gerechnet, weil dort im Sommer und Frühling das Maximum auch am Tage auftritt.

Nachtmaximum zwischen 8 p.—2 a. zeigen 4 Stationen, als: Triest, Bern, Wien, Aachen. Erwähnt muss werden, dass in Wien im Jahre 1853—1856 das Maximum analog Prag und den anderen deutschen Stationen auf den Nachmittag (2 p.—8 p.) fällt, hingegen in der Periode 1881—1888 auf die Nacht (8 p.—2 a.).

* Supan. Vertheilung des Niederschlages. p. 86.

MAZELLE vermuthet, die Ursache davon in der minder guten Aufstellung des Regenmessers in den Jahren 1853—1856 suchen zu müssen.

Der zweite Typus des Nachtmaximums zwischen 2 a.—8 a. zeigt sich in Greenwich, Coimbra, Lissabon, Hongkong, Mauritius, Neu-Guinea, also in der Nähe des Meeres. Cordoba in Argentina macht aber eine Ausnahme davon.

Die zwei Haupttypen sind nicht in allen Jahreszeiten constant. Im Winter und Herbst stellt sich das Maximum in der Nacht oder am Vormittag ein, wo es im Sommer und Frühling auf den Nachmittag (2 p.—8 p.) zu fallen pflegt; z. B. in Berlin, Zechen, Prag, New-York, Simla, Batavia und Ben Nevis.

In Hongkong zeigt sich in den Monaten Nov.—Febr. das Nachtmaximum früher (8 p.—2 a.) als in den übrigen Jahreszeiten, in welchen der meiste Regen Vormittags fällt.

Das Nachmittagsmaximum des Regens steht nicht nur in Ungarn, sondern auch an anderen Orten mit dem Maximum der Gewitterhäufigkeit in engem Zusammenhange. Wo in den Tropen das Regenmaximum auf die Nacht fällt, wie in Batavia, Cherrapunjee*, Neu-Guinea, Borneo, Kamerun, da stellt sich auch das Maximum der Gewitterfrequenz** zur Nacht ein.

Aus den wenigen Daten, die in Tabelle VI enthalten sind, geht hervor, *dass der meiste Regen theils Nachmittags (2 p.—8 p.), theils in der Frühe (2 a.—8 a.) fällt.* Ob der Barometerstand bei dieser Erscheinung eine Rolle spielt oder nicht, muss einstweilen dahingestellt bleiben. Mit dem Anhäufen der Daten der registrierenden Regenmesser wird sich mit der Zeit auch der causale Nexus des Phänomens herausstellen, auch wird aufgedeckt werden, ob der Wechsel der See- und Landwinde einen Einfluss dabei ausübe oder nicht.

---

* Meteorol. Zeitschrift 1882, p. 402.

** Hann. Klimatologie II, p. 35, 77, 222, 237, 250.

9.

UEBER DAS SPECTRUM DER HIMMELSKÖRPER.

Von R. von KÖVESLIGETHY,
corr. Mitglied der ungarischen Academie der Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der ungarischen Academie
12. December 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö" (Math. und Naturw. Anzeiger) Bd. XVII, pag. 112—156.

Die Aufgabe der Astrophysik ist die Untersuchung der von den Ortsveränderungen unabhängigen Eigenschaften der Himmelskörper. Zur vollen Beurtheilung des physikalischen Zustandes kommt daher neben den äusseren Kräften in erster Reihe die Temperatur in Betracht, oder mit andern Worten: der Himmel ist nicht mehr als ein Newtonsches System materieller Punkte, sondern als Häufung physikalischer Körper zu betrachten.

Die theoretische Grundlage der Untersuchung bildet die mechanische Wärmelehre, das praktische Hilfsmittel, die Beobachtungsdaten in eine der Theorie zugängliche Form zu bringen, liefert die Spectralanalyse. Jene entspricht in der Astronomie den mechanischen Principien, diese jenen Theorien, welche aus den geocentrischen Bewegungen die heliocentrischen erschliessen.

Blosse Beobachtung an sich führt weder hier, noch dort zum Ziele. Die Möglichkeit der Bahnbestimmung setzt die Kenntniss des Erdortes schon voraus, sei er nun, wie im Ptolemaeischen Systeme als ruhend, oder im Coppernikanischen Systeme als in einer Kepplerschen Ellipse fortbewegt gedacht. Aehnlicherweise müssen auch wir uns mit dem Zustande der Weltkörper befassen, noch ehe die Spectralanalyse hierüber endgiltigen Aufschluss gegeben, um das vielfach superponierte Spectrum der

Sterne in seine einfachen Bestandtheile zerlegen zu können. Die Gefahr des Kreisschlusses ist in beiden Wissenszweigen ausgeschlossen und die Analogie zwischen Schein und Wahrheit ist in beiden Fällen vollständig.

Unter Himmelskörpern verstehen wir zunächst in erster Reihe die Fixsterne, obwol kugelförmige Nebelflecken und Kometen, desgleichen die Atmosphären der Planeten nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Der Vortheil einer Beschränkung ist jedoch klar: zunächst ist die Untersuchung gasförmiger Kugelmassen in der That interessanter und wichtiger, und zweitens lassen uns die theoretischen Grundlagen fast ganz im Stiche, sobald es sich um flüssige oder feste Körper handelt. Ein Vorwurf, der natürlich weder die Astrophysik, noch die Spectralanalyse, sondern nur die Wärmetheorie betrifft.

Die beiden Hauptprobleme der Astrophysik und Astronomie sind von logischem Standpunkte aus vollkommen conform. Der Annahme des geo- oder heliocentrischen Systems entsprechen hier gewisse Voraussetzungen über den Zustand nnd das Gleichgewicht des Stoffes. Wir wollen den Zustand im Allgemeinen als indifferent oder isentrop annehmen, und von dem Stoffe voraussetzen, dass er dem Boyle-Gay-Lussacschen Gesetze strenge gehorche, obgleich Abweichungen möglich sind, die den Zustand bis zum isothermen treiben und dem Stoffe die Eigenschaften eines gesättigten Dampfes verleihen. Diese Abweichungen können jedoch später in Rechnung gebracht werden und entsprechen vollkommen der Störungsrechnung der Astronomen. Die unter Anderem durch die Axendrehung entstehende Abweichung vom isentropen Gleichgewichtszustande ist das Analogon der von dem Orte in der Bahn abhängigen Störungen, während die Einführung des Van der Waals'schen Gesetzes jene Ungleichheiten berücksichtigt, welche in der Bewegungslehre von der sphäroidischen Gestalt der Himmelskörper herrühren. Diese Abweichungen sind hier wie dort klein; die Rechnungsvorschriften daher im Allgemeinen dieselben. Hierzu kommt aber noch, dass die astrophysikalischen und besonders die spectralphotometrischen Methoden noch immer eine ausnehmend geringe Genauigkeit beanspruchen.

Das Superpositionsspectrum der Himmelskörper.

Wir denken uns einen aus idealem Gase bestehenden kugelförmigen Weltkörper, dessen Materie in concentrischen Schichten gehäuft ist. Der äussere Radius der Kugel betrage r, und Allgemeinheit halber werde ein innerer kugelförmiger Kern mit dem Radius r_0 angenommen, der fest, flüssig oder ganz leer sein möge. Wäre ein solcher Kern nicht vorhanden, so ist $r_0 = 0$, und alle mit dem Index o auf die Oberfläche dieses Kernes bezogenen Grössen gelten einfach für den Mittelpunkt der Kugel.

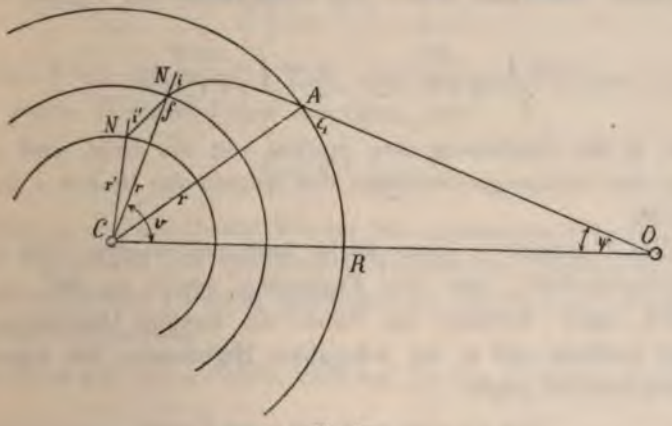


Fig. 1.
Gang eines Lichtstrahles im Innern der Gaskugel.

Es sei (Fig. 1.) C der Mittelpunkt der Kugel, O das Auge des Beobachters. Die Punkte N und N' liegen auf der Oberfläche einer Kugelschale mit den Radien r, r', innerhalb welcher Dichte und Brechungsindex des Gases merklich constant sind. Bedeutet n, n' in den besagten Punkten den absoluten Brechungsindex, i, i', f, f' Einfalls- und Brechungswinkel, so hat man

$$\frac{\sin i}{\sin f} = \frac{n'}{n},$$

und aus dem Dreiecke NCN′:

$$\frac{\sin f}{\sin i'} = \frac{r'}{r},$$

also durch Multiplication beider Gleichungen

$$nr \sin i = \gamma = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für jede Schichte und jeden Einfallswinkel.

Ist nun v der Winkel, den der Radiusvector eines Punktes des Lichtstrahls mit der Axe CO einschliesst, so bestehen noch die folgenden Gleichungen

$$r\frac{dv}{dr} = \text{tang}\, i, \quad \left(\frac{d\varsigma}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{dv}{dr}\right)^2,$$

wenn mit $d\varsigma$ das in der Entfernung r liegende Wegelement der Lichtkurve bezeichnet wird. Die Elimination von i giebt:

$$v = \int_R^r \frac{\gamma dr}{r\sqrt{n^2r^2 - \gamma^2}}, \quad \varsigma = \int_{r_1}^r \frac{nrdr}{\sqrt{n^2r^2 - \gamma^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wobei R die Entfernung des Sternes von der Erde, und ς die Länge des Lichtweges zwischen den Kugeln des Radius r und r_1 vorstellt.

Die Constante γ kann leicht bestimmt werden. Ist ε der Emanationswinkel, also die Ergänzung von i zu 90^0, ε_1 der Winkel, unter welchem der Strahl die äussere Oberfläche der Kugel verlässt, und ψ der scheinbare Halbmesser des Austrittspunktes, so ist wegen (1)

$$\gamma = rn \cos\varepsilon = r_1 \cos\varepsilon_1 = R \sin\psi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

insofern der Brechungsindex im leeren Raume und an der äussern Oberfläche des Weltkörpers 1 ist. Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass die irdische Strahlenbrechung im Punkte O besonders in Rechnung gezogen werde.

Dieselbe Gleichung ergiebt sich natürlich auch aus dem Dreiecke COA, und könnte zugleich mit (2) aus dem FERMAT'schen Satze abgeleitet werden. Die Dispersion ist überall vernachlässigt, so dass n eine reine Funktion der Dichte, also auch des Mittelpunktabstandes r wird.

Ein Kubikmeter eines Stoffes gebe bei der absoluten Temperatur θ' und der Dichte s' ein Spectrum mit der Intensität E', dessen Parameter μ' und Λ' (Wellenlänge des Intensitätsmaximums und Totalintensität) sein möge. Es werde angenommen, dass

durch vorhergegangene Laboratoriumsversuche diese zusammengehörigen Grössen bekannt seien. Demnach gilt:

$$E' = \frac{4}{\pi} \mu' A' \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu'^2)^2},$$

und in einem andern Zustande θ, s, dem die Parameter A, μ entsprechen:

$$E = \frac{4}{\pi} \mu A \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

wobei die Elemente A', μ' und A, μ mit einander durch die beiden Parametergleichungen verknüpft sind. Die erste lautet

$$\frac{\mu^3 \theta^4}{A} = \frac{\mu'^3 \theta'^4}{A'} = D,$$

wobei D die DRAPERsche Zahl, eine absolute Constante bedeutet. Ist weiter S die Entropie des Gases, also

$$S = c_v l \cdot \left(\frac{\theta}{s^{\varkappa - 1}}\right),$$

wobei c_v die specifische Wärme bei constantem Volumen und $\varkappa$ das Verhältniss der specifischen Wärmen bei constantem Drucke und constantem Volumen bezeichnet, so hat man laut der zweiten Parametergleichung

$$\log . S' = \log . [S] + 0{,}684\ 1922 \log . \frac{\mu'}{m'} + \varkappa_2 \left(\frac{\mu'}{m'}\right)^2 + \varkappa_4 \left(\frac{\mu'}{m'}\right)^4 + \cdots$$

$$\log . S = \log . [S] + 0{,}684\ 1922 \log . \frac{\mu}{m} + \varkappa_2 \left(\frac{\mu}{m}\right)^2 + \varkappa_4 \left(\frac{\mu}{m}\right)^4 + \cdots$$

aus welchen $[S]$ eliminiert werden kann. Insofern für $\mu = m$ die Grösse $[S]$ durch die Entropie des absolut schwarzen Körpers ausgedrückt werden kann, wird auch diese Grösse von der Stoffbeschaffenheit unabhängig und kann ein für allemal bestimmt werden. In allen diesen Gleichungen bedeutet m die Wellenlänge der Maximalintensität eines mit dem gegebenen Körper gleichtemperierten absolut schwarzen Körpers, das wegen der Beziehung

$$m \theta = K,$$

wobei K eine absolute Constante ist, mit der absoluten Temperatur zugleich gegeben ist.

Mit Hülfe der beiden Parametergleichungen kann aus dem Spectrum (A, μ) der Zustand (θ, s) der Lichtquelle berechnet werden,

und umgekehrt. Die nöthigen Zahlenwerthe, sowie die nöthige Umkehrung der betreffenden Gleichungen habe ich in einer früheren Abhandlung angegeben.*

Ist nun in dem Zustande (θ, s) statt eines Kubikmeters ein Prisma gegeben, dessen Basis f und dessen Höhe h ist, so ist die ausgestrahlte Intensität E_{fh} statt E, und es besteht die Gleichung

$$E_{fh} = Ef\frac{1-(1-\alpha)^h}{\alpha},$$

in welcher h eine einfache Länge bezeichnet, da ja die Absorption rein nur von der Anzahl der in den Lichtweg fallenden Theilchen abhängt. Bei gleicher Dichte fallen also auf einen h-mal grösseren Weg auch h-mal mehr Theilchen. Insofern die Absorption auch von der Dichte abhängt, ist sie vollauf dadurch berücksichtigt, dass in der Gleichung des Absorptionscoëfficienten

$$\alpha = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2$$

nicht mehr die dem Anfangszustande (μ', A') entsprechende Dichte vorkommt, sondern derjenige Werth, welcher zu den auch in E vorkommenden und die Dichteänderung schon enthaltenden Parametern μ und A gehört. Dies musste betont werden, da das Absorptionsgesetz in den meisten Fällen so gedeutet wird, als ob der Einfluss der Dichte rein in dem Exponenten berücksichtigt werden könnte. Dann sollte α die Absorption der Dichteeinheit vorstellen und der Exponent wäre einfach der Zahl der absorbierenden Theilchen, also dem Producte aus Dichte und Schichtendicke proportional. In dieser Form ist der Satz bekanntermaassen nicht richtig.

Aus dem Punkte M (Fig. 2.) der mit dem Radius r gezogenen Kugelschale erhebe sich unter dem Winkel $\varepsilon = 0$ der Strahl MAO, der das Auge unter dem Gesichtswinkel ψ treffe. Es wird sich später zeigen, dass die Figur richtig gezeichnet ist, insofern mit Ausnahme höchstens eines einzigen Strahles die Lichtwege im Innern der Kugel symmetrisch verlaufen und in

* Die beiden Parametergleichungen der Spectralanalyse. Diese Berichte XVI. Band pag. 1—49.

ihrem tiefsten Punkte je eine Kugelschale berühren. Ist die Intensität im Punkte M in der Mittelpunktsentfernung r per Volumeneinheit E, so ist die in einem um diesen Punkt gelegten Prisma von der Basis df und der in den Strahlengang fallenden Höhe $d\varsigma = NN'$ herrschende Intensität

$$i = df E \frac{1-(1-\alpha)^{d\varsigma}}{\alpha}; \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

hiebei braucht, da das Element $d\varsigma$ auf der Basis df, die in unserer Zeichnung MN zur Projektion hat, senkrecht steht, die etwaige Abhängigkeit vom Emanationswinkel gar nicht in Betracht gezogen zu werden. Diese Abhängigkeit fällt im vorliegenden Falle schon deshalb weg, weil man es mit einem Gase

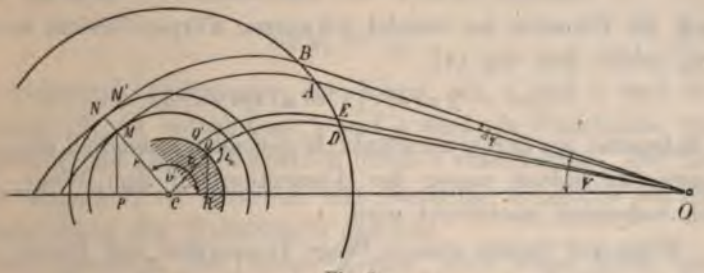


Fig. 2.
Elementarintensität einer glühenden Gaskugel.

zu thun hat, dessen jede einzelne Molekel als Lichtquelle aufgefasst werden kann. Bei festen Körpern müsste der Ausdruck allerdings noch mit $\Phi(\varepsilon) = \sin\varepsilon$ multipliciert werden, wenn ε den Winkel bezeichnet, unter welchem der Lichtstrahl die Kugelfläche verlässt.

Das Oberflächenelement df kann leicht bestimmt werden. Treffen in dem Auge O zwei unendlich nahe Strahlen unter dem Winkel ψ und $\psi + d\psi$ die Axe CO, so berührt der letztere eine um dr höher gelegene Kugelschichte im Punkte N. Nach (3) besteht nun, da in diesem Falle $\varepsilon = 0$ ist:

$$r n = R \sin\psi, \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

woraus dr als Funktion von $d\psi$ berechnet werden kann, wobei nur zu bedenken ist, dass r implicite auch in n vorkommt.

Beschreibt man nun mit dem Radius $MP = r \sin v$ einen auf die Axe CO senkrechten Kreis, so entsteht ein Kegelmantel mit der Oberfläche

$$df = 2\pi r \sin v \, dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

innerhalb deren die Intensität in jedem Punkte dieselbe ist und deren jedes Element dem Lichtstrahle gegenüber gleich gelegen ist. Hierin ist dr durch (5) in der Form

$$n dr + r \frac{dn}{dr} dr = R \cos \psi d\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

auszudrücken.

Unter Beibehaltung von unendlich kleinen Grössen erster Ordnung und da

$$\frac{E}{\alpha} = e$$

durch die Emission des absolut schwarzen Körpers ersetzt werden kann, erhält man aus (4):

$$i = -2\pi r e l \cdot (1 - \alpha) \sin v \, d\varsigma \, dr, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

als Intensität des durch den Punkt M gehenden unendlich schmalen Ringes, die jedoch wegen der Absorption auf dem Wege MA noch bedeutend modificiert wird.

Wäre auf diesem ganzen Wege Temperatur und Dichte constant, so wäre der ganze Ausdruck einfach mit $(1 - \alpha)^{\varsigma}$ zu multiplicieren, wenn ς die Länge des Bogens MA bedeutete. In jedem Punkte desselben ist jedoch der Absorptionscoëfficient ein anderer, und daher muss richtiger $(1 - A)^{\varsigma}$ geschrieben werden, wo A einen zwischen den Grenzen $\varsigma = 0$ und $\varsigma = \varsigma$ geeignet gewählten Mittelwerth darstellt. Laut des Schichtensatzes hat man hiefür

$$(1 - A)^{\varsigma} = (1 - \alpha_1)^{d\varsigma_1} (1 - \alpha_2)^{d\varsigma_2} \cdot \cdot (1 - \alpha_m)^{d\varsigma_m},$$

wenn $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ die auf den einzelnen Wegelementen $d\varsigma_1, d\varsigma_2 \ldots d\varsigma_m$ gültigen Absorptionscoëfficienten sind, und wenn, wie natürlich

$$\varsigma = d\varsigma_1 + d\varsigma_2 + \ldots + d\varsigma_m.$$

Stetige Aenderung angenommen ergiebt die Gleichung

$$l \cdot (1 - A)^{\varsigma} = \int_0^{\varsigma} l \cdot (1 - \alpha) \, d\varsigma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so dass die Intensität in M noch mit $e^{\int_0^{\varsigma} l \cdot (1-\alpha) d\varsigma}$ multipliciert werden muss, um die von dem besagten Ringe aus der Kugel thatsächlich austretende Lichtmenge zu liefern. Der Factor ist natürlich für jedes Element des durch M gehenden Elementarringes derselbe.

Die Intensität der ganzen Kugel wird nun

$$J = -2\pi \int_0^{\psi_1} \int_0^{\varsigma} r \sin v \cdot el \cdot (1-\alpha) e^{\int_0^{\varsigma} l \cdot (1-\alpha) d\varsigma} \, d\varsigma dr, \quad (10)$$

wobei die Integration nach ς über den ganzen im Innern der Kugel liegenden Lichtweg, nach r oder richtiger nach ψ von $\psi = 0$ bis $\psi = \psi_1$ auszudehnen ist. Hierbei bedeutet

$$\sin \psi_1 = \frac{r_1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

den scheinbaren Halbmesser der Kugel, sin v und ς sind der Gleichung (2) zu entnehmen; e und α sind als Funktionen von Temperatur und Dichte wesentlich durch r ausdrückbar. Die Art der Abhängigkeit ist natürlich erst durch die Kenntniss der Zustandsgleichung des Weltkörpers gegeben.

Das Spectrum des festen Kernes kann ohne Mühe hingeschrieben werden. Sollte es selbst von gasförmigem Kerne herrühren, so müsste dessen Druck bereits so gross sein, dass derselbe annäherungsweise mit dem absolut schwarzen Körper vertauscht werden darf. Man kann sich also jedenfalls vorstellen, dass die das Spectrum liefernde Lichtmenge aus einer verhältnissmässig dünnen Schichte von der Dicke h herrühre, deren Zustand durch θ', s', μ', A' gegeben ist.

Die beiden benachbarten Strahlen ODQ und OEQ' (Fig. 2) schneiden auf der Oberfläche des Kernes das Bogenelement $QQ' = r_0 dv$ ab, wofür, um die Abhängigkeit von ψ darzulegen, $r_0 \frac{dv}{d\psi} d\psi$ geschrieben werden kann. Die Drehung des Radius $QR = r_0 \sin v$ um die Axe CO liefert wieder einen Ring, dessen Lichtstärke und Neigung gegen den Lichtstrahl in jedem Punkte dieselbe ist, und der wegen der Gleichheit der Wegelängen QD dieselbe Absorption erleidet. Bedeutet ε_0 die Neigung des Licht-

strahles gegen die Oberfläche des Kerns, so muss die Intensität noch mit sin ε_0 multipliciert werden, und man hat für die aus der Kugel austretende Lichtmenge

$$J_0 = 2\pi r_0^2 e' (1 - (1-\alpha')^h) \int_0^{\psi_0} \sin v \sin \varepsilon_0 \frac{dv}{d\psi} e^{\int_s^0 l \cdot (1-\alpha) dz} d\psi, \qquad (12)$$

da r_0, e', α', h für den Kern constant bleiben. ψ_0 bedeutet den scheinbaren Halbmesser des Kernes, also wie früher

$$\sin \psi_0 = \frac{r_0}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und das Integral nach ς ist von der Oberfläche des festen Kernes bis zur äusseren Oberfläche der Kugel auszudehnen. Der Zusammenhang zwischen ε_0 und ψ ist durch (3) gegeben, insofern

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{R}{r_0 n_0} \sin \psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ist, wobei r_0, n_0 als für die Oberfläche des Kernes geltend, constant sind. v und ς kann durch ε_0 und ψ ausgedrückt werden, wenn man sich auf die Gleichungen (2) und (3) beruft.

Abgesehen von der Verminderung durch die Entfernung ist nun die in Θ sichtbare Lichtmenge $J + J_0$.

Die allgemeine Auswerthung der complicierten Integrale dürfte kaum möglich sein; im besten Falle lassen sich unendliche Reihen aufstellen, deren Coëfficienten von andern Grössen abgesehen noch Functionen der Wellenlänge sind, welche in α und e steckt. Die oben abgeleitete Intensität bezieht sich also nur auf homogenes Licht; die Intensität des Mischlichtes erhält man, wenn man die Ausdrücke (10) und (12) noch mit $d\lambda$ multipliciert und zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 integriert, falls das das Spectrum auffangende Agens zwischen den besagten Grenzen empfindlich ist.

Eine weitere Erschwerung des Problems kommt daher, dass das in v und ς auftretende Radical einer besonderen Untersuchung bedarf, je nachdem circulare Refraction möglich ist, oder nicht, dh. je nachdem der Wurzelausdruck in der ganzen Gaskugel reell ist, oder aber zonenweise imaginär werden kann. Im ersteren Falle gelangt ein jeder Strahl aus dem Innern der Kugel in den Welt-

raum; im letzteren Falle giebt es Strahlen, welche ganz im Innern der Kugel verbleiben.

Gegenstand der Beobachtung ist die Intensität $J + J_0$, welche mit Hülfe eines Spectralphotometers für jede Wellenlänge gesondert bestimmt wird, jedenfalls aber für so viele Stellen des Spectrums, als in dem Probleme Unbekannte vorkommen. Deren Zahl und Bedeutung zu bestimmen ist die Aufgabe der folgenden Abschnitte.

Die Zustandsgleichung gasförmiger Weltkörper.

Wir denken uns eine im Raume ruhende Gaskugel, die also weder mit Axendrehung, noch mit translatorischer Bewegung versehen sei, und in deren Innerem sich ein stationärer Zustand ausbildete. Erhebt sich daher in radialer Richtung eine Gasmasse, so wird der Gleichgewichtszustand nur in dem Falle nicht gestört, wenn die Masse jene Energie mit sich bringt, die sie an der Ankunftsstelle schon vorhanden findet. Das heisst aber, dass die Gasmasse von der Umgebung weder Wärme aufnimmt, noch ihr solche übergiebt, oder mit anderen Worten: die Gaskugel muss in isentropem Gleichgewichte sein.

Dieser Satz wurde schon von AUGUST RITTER mit Hülfe der kinetischen Gastheorie bewiesen; er kann aber ganz einfach rein auf Grund mechanischer Gesetze abgeleitet werden.

Der Zustand eines Gastheilchens in einer kugeligen, stationären Gasmasse ist nur eine Function des Mittelpunktabstandes. Radial wirkt das Gewicht des Theilchens, dh. die Resultierende aus Massenanziehung und Auftrieb, während die auf dem Radius senkrechten Kräfte, die Meridian- und Parallelcomponente, Null sind. Man hat daher als Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\begin{aligned} R &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = -g\left(1 - \frac{s'}{s}\right) = 0 \\ M &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\beta}{dt}\right) = 0, \quad P = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\lambda}{dt}\right) = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

worin $r\beta\lambda$ die Kugelcoordinaten des Theilchens, R, M, P die darauf wirkende Radial-Meridian- und Parallelcomponente bedeuten. g ist die Schwerebeschleunigung im Abstande r, s die Dichte des auf-

steigenden Theilchens ebendort, während s' die Dichte der Umgebung bezeichnet.

Die einzige Bedingung des Gleichgewichtes ist nun

$$s = s',$$

dh. das aufsteigende Theilchen muss stets die Dichte der Umgebung annehmen. Da beide stets demselben Drucke unterworfen sind, so muss sich das Theilchen im Aufstiege stets soweit abkühlen, dass es immer mit der Umgebung gleichtemperiert bleibt. Das ist aber die Bedingung des isentropen Gleichgewichtes.

Wäre das Verhältniss der Centrifugalbeschleunigung zu der Beschleunigung der Schwere unter dem Aequator γ, so hätte man

$$R = -g\left(1 - \frac{s'}{s} + \gamma \frac{r}{r_1} \cos^2\beta\right),$$

$$M = -\gamma g \frac{r}{r_1} \sin\beta \cos\beta; \quad P = 0,$$

so dass durch die Axendrehung in der That Abweichungen vom isentropen Zustande zu Stande kommen würden.

Als Einheiten werden das Meter und Kilogramm gewählt; unter g verstehen wir immer die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche, unter s die Schwere eines Kubikmeters auf der Erde gemessen.

In allen Punkten der Gasmasse ausserhalb des etwaigen festen Kernes besteht die hydrodynamische Gleichung

$$dp = -\frac{g_r}{g} s dr, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

in welcher g_r die in der Entfernung r gemessene Schwere im Weltkörper, p den daselbst herrschenden Druck bedeutet. Ist

$$u = \frac{g_r}{g_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

das Verhältniss der Schwere im Punkte r und auf der Oberfläche des Weltkörpers, so hat man nach dem NEWTONschen Gesetze

$$u = \frac{m r_1^2}{M r^2} \cdot \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

wobei m die in der Kugel vom Radius r, M die ganze von der

Vollkugel mit dem Radius r_1 eingeschlossene Masse bedeutet. Die Gleichung (16) wird nun

$$dp = -\frac{g_1}{g} u s dr. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Wegen der concentrischen Schichtung kann

$$dm = 4\pi r^2 s dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

als Massenelement aufgefasst werden. Hiermit wird der Differentialquotient von (18) und (19)

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi r_1^2}{M} s - \frac{2}{r} u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und

$$\frac{du}{dr} = -\frac{g}{g_1}\left(\frac{1}{s}\frac{d^2p}{dr^2} - \frac{1}{s^2}\frac{ds}{dr}\frac{dp}{dr}\right). \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (22)$$

Durch Vergleichung der beiden Resultate und Elimination von u mittels (19) erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{s}\frac{ds}{dr}\right)\frac{dp}{dr} + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{Mg} s^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

als allgemeinste Gleichung des Zustandes. Der hieraus zu berechnende Druck ist ohne Weiteres mit den an der Erdoberfläche messbaren Drucken vergleichbar.

Die Integration ist natürlich erst dann möglich, wenn zwischen den unabhängigen Veränderlichen p und s noch eine Bedingung gegeben ist. Dieser Fall liegt hier vor, da dem Früheren nach angenommen werden soll, dass der Zustand isentrop ist. Allgemein aber ersieht man, dass dem rein mechanischen Gleichgewichte auf unendlich viele Arten entsprochen werden kann. Unter den unendlich vielen mechanisch möglichen Gleichgewichtszuständen ist aber nur ein einziger, der auch von thermischem Gesichtspunkte aus ein Gleichgewichtszustand ist.

Die gegebene Gleichung könnte noch in andere Form gebracht werden, welche auch den zeitlichen Veränderungen des Zustandes Rechnung trägt. Die Ableitung einer partiellen Differentialgleichung gewinnt Wichtigkeit, sobald Himmelskörper von verschiedener Entwickelungsstufe mit einander verglichen werden sollen, mag aber an dieser Stelle übergangen werden.

Die Annahme des isentropen Zustandes liefert die folgenden Gleichungen:

$$p = p_0 \frac{\theta^{\frac{k}{k-1}}}{\theta_0^{\frac{k}{k-1}}} \text{ und } s = s_0 \frac{\theta^{\frac{1}{k-1}}}{\theta_0^{\frac{1}{k-1}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

in welchen sich p_0, s_0, θ_0 auf den Mittelpunkt der Gaskugel, beziehentlich auf die Oberfläche des festen Kernes beziehen. Führt man die Werthe von p und s in (23) ein, so kommt

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \frac{4\pi(k-1)g_1 r_1^2 s_0^{\frac{k-2}{k-1}} \theta_0}{kgMp_0} \theta^{\frac{1}{k-1}} = 0. \quad . \quad (25)$$

Um relative Werthe einzuführen, sei

$$\frac{r}{r_1} = x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (26)$$

und ähnlicherweise

$$\frac{\theta}{\theta_0} = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

weiter

$$q^2 = \frac{4\pi(k-1)r_1^4 g_1 s_0^2}{kgMp_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

und

$$\frac{1}{k-1} = n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

so wird die Zustandsgleichung einfach

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + q^2 y^n = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Die Constante q^2 ist wesentlich positiv und kann auf verschiedene Weisen geschrieben werden. Mit Hülfe des Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetzes und der bekannten Beziehung

$$AR = c_p - c_v = c_v(k-1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

in welcher $A = \frac{1}{424}$, wird

$$q^2 = \frac{4\pi A g_1 r_1^4 s_0}{c_p g M \theta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Ist (s) die mittlere Dichte des Himmelskörpers, so kann man auch

$$q^2 = \frac{3Ag_1 r_1 s_0}{c_p g \theta_0 (s)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

schreiben. Bedeutet endlich T und a die Masse und den mittleren Radius der Erde, S die mittlere Dichte derselben, so wird

$$\frac{g_1}{g} = \frac{Ma^2}{Tr_1^2},$$

und

$$q^2 = \frac{3Ar_1^2 s_0}{c_p a \theta_0 S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

und weitere Beziehungen lassen sich leicht finden, wenn man auch den ersten Differentialquotienten von y einführen wollte.

Wäre die Gleichung (30) integriert, so hätte man sämmtliche, den Zustand bestimmende Grössen als Function des Mittelpunktabstandes.

In der Entfernung $r = r_1 x$ ist die Temperatur laut (27)

$$\theta = \theta_0 y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

und nach (24) Dichte und Druck

$$s = s_0 y^n \text{ und } p = p_0 y^{n+1}. \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Aehnlicherweise ergiebt sich aus (19) die relative Schwere

$$u = -(n+1)\frac{gp_0}{g_1 r_1 s_0}\frac{dy}{dx},$$

oder nach Einführung von q^2:

$$u = -\frac{4\pi r_1^3 s_0}{Mq^2}\frac{dy}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

was noch kürzer in der eleganten Form

$$g_r = -c_p g \frac{d\theta}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

geschrieben werden kann.

Die Masse und mittlere Dichte des Himmelskörpers ergeben sich endlich zu

$$M = 4\pi r_1^3 s_0 \int_0^1 x^2 y^n dx \text{ und } (s) = 3s_0 \int_0^1 x^2 y^n dx. \quad \ldots \quad (39)$$

Die erste Entwickelungstufe eines Weltkörpers ist möglicherweise dadurch gegeben, dass die ganze Masse homogen, der Körper also isopler ist. In diesem Falle, da

$$u = \frac{r}{r_1}$$

ist, bleibt die Zustandsgleichung erster Ordnung, und es wird

$$p = \frac{g_1 s}{2gr_1}(r_1^2 - r^2),$$

wenn man die Constante so bestimmt, dass der Druck an der Oberfläche Null werde. Aehnlich wird die Temperatur

$$\theta = \frac{g_1}{2gr_1R}(r_1^2 - r^2).$$

Natürlich giebt es auch Abweichungen vom isentropen Zustande, welche auf einer vorgeschrittenen Stufe der Entwickelung bis zur Herstellung des isothermischen Zustandes gehen können. Die Gleichung dieses Zustandes ergiebt sich aus (23), wenn p mit Hülfe des BOYLE-GAY-LUSSAC'schen Gesetzes eliminiert und θ als constant betrachtet wird. Man erhält so

$$\frac{d^2s}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{ds}{dr} - \frac{1}{s}\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{MgR\theta}s^2 = 0,$$

oder indem man

$$\frac{r}{r_1} = x, \quad \frac{s}{s_0} = z$$

setzt:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dz}{dx} - \frac{1}{z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + q_1^2 z^2 = 0,$$

wobei wieder

$$q_1^2 = \frac{4\pi r_1^4 g_1 s_0}{MgR\theta}$$

genommen wurde. Zwischen den Constanten des isothermen und isentropen Zustandes besteht die Beziehung

$$q_1^2 = \frac{k}{k-1}q^2.$$

Integration der Zustandsgleichung des isentropen Gleichgewichtes.

Die Gleichung (30) lässt sich in geschlossener Form nur für wenige Specialwerthe der Zahl $n = \frac{1}{k-1}$ integrieren. k liegt als Verhältniss der beiden specifischen Wärmen zwischen den Grenzen 1 und $^5/_3$ und hängt theoretisch nur von der Anzahl der in der Molekel vorhandenen Atome ab, derart, dass in einer m-atomigen Molekel

$$k = \frac{2m+3}{2m+1}, \text{ also } n = m + \frac{1}{2}$$

wird. Allgemeiner, und ohne die Giltigkeit der Gleichung (30

zu beschränken, kann man auch sagen, dass der Zustand des Gases durch die Bestimmung

$$\frac{p}{s^k} = \text{const.}$$

gegeben ist, wobei k nur der Bedingung

$$\infty > k > 1$$

unterworfen ist. Der so dargestellte Gleichgewichtszustand ist jedoch nur dann ein isentroper, wenn

$$^5/_3 \geq k > 1$$

gewählt wird.

Ist $n = 0$, also $k = \infty$, so hat man die Bedingung des isopleren Zustandes, und die Gleichung (30) giebt

$$y = A + \frac{B}{x} - \frac{q^2}{6} x^2;$$

ist dagegen $n = 1$, also $k = 2$, so kommt

$$y = A \frac{\sin qx}{qx} + B \frac{\cos qx}{qx}.$$

Schon diese beiden einfachen Fälle zeigen, dass es einen wesentlichen Unterschied macht, ob ein fester Kern vorhanden ist, oder nicht. Im ersteren Falle bestimmen sich die Constanten A und B aus den Bedingungen, dass an der Oberfläche des Kernes, also für $x = x_0$ die Temperatur $\theta = \theta_0$, oder $y = 1$ wird, während an der äusseren Oberfläche für $x = 1$ die Temperatur $y = 0$ ist. Dies giebt daher für $n = 0$ und $n = 1$ beziehentlich

$$y = \frac{q^2}{6(1 - x_0)} \left(1 - x_0^3 - \frac{x_0}{x}(1 - x_0^3) - x^2(1 - x_0)\right) + \frac{x_0(1 - x)}{x(1 - x_0)}$$

und

$$y = \frac{x_0 \sin q(1 - x)}{x \sin q(1 - x_0)},$$

in welchen Gleichungen q^2 natürlich ganz beliebig sein kann.

Durchaus anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn der Weltkörper seiner ganzen Masse nach gasförmig ist. Schon die Differentialgleichung zeigt, dass in dem Punkte $x = 0 : y = \infty$ wird, was als physikalische Lösung nicht angenommen werden kann, da die Temperatur auch im Mittelpunkt der Kugel endlich bleiben muss. Es muss daher in dem Punkte $x = 0$ auch

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ sein, wie dies entweder aus der Gleichung (30) oder aus (37) gefolgert werden kann, insofern auch die Schwere im Centrum verschwindet.

Für kernlose Gaskugeln bleibt also noch eine dritte Bedingung zu erfüllen, welche, da die beiden Constanten durch die Grenzbedingungen schon bestimmt sind, den Werth der Grösse q^2 beeinflusst. Man findet so, dass in den beiden abgeleiteten Integralen a priori $\dot{B} = 0$ sein muss; die Mittelpunktsbedingung liefert für beide Fälle $A = 1$, und die Oberflächenbedingung fordert für $n = 0 : q^2 = 6$, für $n = 1$ dagegen $q = \pi$.

So wird q vollkommen unabhängig von den Dimensionen der Gaskugel und dem thermischen Zustande ihres Mittelpunktes, und erscheint rein durch n, also der molekularen Zusammensetzung des Gases, gegeben, so dass für alle gasförmigen Weltkugeln, deren Molekeln aus der gleichen Anzahl von Atomen zusammengesetzt sind,

$$q^2 = \frac{3A}{c_p a S} \cdot \frac{r_1^2 s_0}{\theta_0}$$

constant ist. Führt man wieder den Druck ein, so fällt auch c_p weg, und man hat schliesslich:

$$q^2 = \frac{3}{aS} \cdot \frac{r_1^2 s_0^2}{(n+1)p_0} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass dieses q auch während der ganzen Entwickelung des Weltkörpers dasselbe bleibt.

Von constanten Factoren abgesehen ergiebt sich dieselbe Gleichung, wenn man in (23) einen beliebigen Zusammenhang der Grössen p und s voraussetzt. Es folgt hieraus: *in ihrer ganzen Masse gasförmige Weltkörper bilden keine Individuen, sondern nach der Art ihres Gleichgewichts und ihres molekularen Aufbaues zu beurtheilende Classen.* Ist aber nur der geringste feste Kern vorhanden, so kann q^2 jeden beliebigen Werth annehmen.

Diesen Satz fand zuerst für homogene Flüssigkeiten ZÖLLNER, für den isothermen Zustand sprach ihn A. RITTER aus.

Setzt man

$$z = xy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

so wird aus (30) die einfache Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + q^2 \frac{z^n}{x^{n-1}} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

welche sogleich die Integrabilität für die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ zeigt. Zugleich erhält man das singuläre Integral in der Form

$$y = \left(\frac{2(n-3)}{(n-1)^2 q^2}\right)^{\frac{1}{n-1}} x^{-\frac{2}{n-1}}, \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

oder für zweiatomige Gase ($k = 7/5$, $n = 2{,}5$)

$$y = \left(\frac{2}{3q}\right)^{4/3} x^{-4/3}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Ein erstes Integral ergiebt sich leicht, wenn

$$y = x^r Y^s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

gesetzt wird, wobei

$$r + s = -\frac{2}{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

sein muss. Schreibt man nämlich

$$Y = xt \text{ und } \frac{dY}{dx} = t + u \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

so kommt

$$tu\frac{du}{dt} + (1 + 2(r+s)tu + \frac{1}{s}(r+s)(r+s+1)t^2 + (s-1)u^2 + \frac{q^2}{s}t^{(n-1)s+2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

worin noch über s beliebig verfügt werden kann. Am einfachsten ist es wohl, entweder u^2 oder den Exponenten $(n-1)s + 2$ von t zum Verschwinden zu bringen.

Hat man das Integral der Gleichung (48), so ist auch das von (30) bekannt, insofern

$$l \cdot \frac{x}{c} = \int^t \frac{dt}{u} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

wird, wenn c die zweite Integrationsconstante bedeutet. An Stelle von t hat man schliesslich

$$t = \left(\frac{y}{x^{r+s}}\right)^{\frac{1}{s}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

zu setzen.

1) Es sei $s = 1$, dann kommt aus (48)

$$u\frac{du}{dt} - \frac{5-n}{n-1}u + \frac{2(3-n)}{(n-1)^2}t + q^2t^n = 0, \quad . \quad . \quad (51)$$

und hierin ist

$$r = -\frac{n+1}{n-1}, \quad t = x^{\frac{2}{n-1}}y, \quad u = x^{\frac{n+1}{n-1}}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{n-1}yx^{\frac{2}{n-1}}. \quad (52)$$

Man sieht sogleich, dass $n = 5$ einem neueren integrablen Falle entspricht, der besonders interessant ist. Das allgemeine Integral lautet

$$u = \sqrt{a + \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{q^2}{3}t^6},$$

wenn a die willkürliche Constante ist. Hiernach wird

$$1 \cdot \frac{x}{c} = \int \frac{dt}{\sqrt{a + \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{q^2}{3}t^6}},$$

worin nach geschehener Integration noch

$$t = \sqrt{x}\,y$$

zu setzen sein wird. Das hyperelliptische Integral lässt sich durch die dem Problem entsprechende Wahl der Constanten vereinfachen. Für $x = 0$ ist $y = 1$, also $t = 0$ und gleicherweise $u = 0$. Man hat daher $a = 0$ und es bleibt

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{t^2}\left(\sqrt{1 - \tfrac{4}{3}q^2t^4} - 1\right),$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von t:

$$y = c\left(x^2 + \frac{c^4}{3}q^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

wenn man statt der willkürlichen Constante $c : -\frac{c^2}{2}$ schreibt. Da für $x = 0$ $y = 1$ werden soll, muss

$$c = \frac{\sqrt{3}}{q}$$

sein, und man hat

$$y = \frac{\sqrt{3}}{q\left(x^2 + \frac{3}{q^2}\right)^{1/4}}.$$

Bildet man hieraus mittelst (37) den Werth von u, so kommt

$$u = \frac{4\sqrt{3}\,\pi r_1^3 s_0}{M q^3} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + \frac{3}{q^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Noch ist nicht berücksichtigt worden, dass $y = 0$ sein muss für $x = 1$. Dies erfordert $q = \infty$, und es bleibt somit

$$u = \frac{A}{x^3},$$

wo A eine Constante bezeichnet. Dies ist jedoch die Anziehung eines einzigen Massenpunktes, und man hat daher den schon von RITTER betonten Satz: Eine Gaskugel, für welche das Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten $^6/_5$ beträgt, schrumpft in einen einzigen Punkt zusammen.

Für zweiatomige Gase ($n = {}^5/_2$) wird (51) und (52)

$$u\frac{du}{dt} - \tfrac{5}{3}u + \tfrac{4}{9}t + q^2 t^{1/2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51\text{a})$$

$$u = x^{4/3}\left(\tfrac{4}{3}y + x\frac{dy}{dx}\right),\ t = x^{4/3}y, \quad . \quad . \quad . \quad (52\text{a})$$

deren Integral unschwer zu finden ist. Setzt man

$$u = a_0 + a_1 t^{1/2} + a_2 t^{2/2} + a_3 t^{3/2} \ldots + a_i t^{i/2} \ldots, \quad . \quad (53)$$

so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}a_0 a_1 = 0\\
&\tfrac{2}{2}(a_0 a_2 + \tfrac{1}{2}a_1^2) = \tfrac{5}{3}a_0\\
&\tfrac{3}{2}(a_0 a_3 + a_1 a_2) = \tfrac{5}{3}a_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53\text{a})\\
&\tfrac{2i}{2}\left(a_0 a_{2i} + a_1 a_{2i-1} + \cdots + \tfrac{1}{2}a_i^2\right) = \tfrac{5}{3}a_{2i-2}\\
&\tfrac{2i+1}{2}\left(a_0 a_{2i+1} + a_1 a_{2i} + \cdots + a_i a_{i+1}\right) = \tfrac{5}{3}a_{2i-1}.
\end{aligned}$$

Für $2i = 4$ und $2i + 1 = 7$ dagegen hat man die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{4}{2}(a_0 a_4 + a_1 a_3 + \tfrac{1}{2}a_2^2) = \tfrac{5}{3}a_2 - \tfrac{4}{9} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53\text{b})\\
&\tfrac{7}{2}(a_0 a_7 + a_1 a_6 + a_2 a_5 + a_3 a_4) = \tfrac{5}{3}a_5 - q^2.
\end{aligned}$$

Zufolge der ersten Gleichung in (53a) ist entweder $a_0 = 0$, oder $a_1 = 0$. Die erstere Annahme führt jedoch alsbald zu sich widersprechenden Werthen; daher ist a_0 die Integrationsconstante, und

$$a_1 = 0.$$

Die übrigen Gleichungen geben hiernach

$$a_2 = \tfrac{5}{3};\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{2}{9a_0},\ a_5 = 0,\ a_6 = \frac{20}{9^2 a_0^2},$$

$$a_7 = -\frac{2}{7a_0}q^2,\ a_8 = -\frac{1}{3a_0^3},\cdots$$

und können mit Hülfe der Formeln (53) leicht weiter berechnet werden. Man hat demnach

$$u = a_0 + \tfrac{5}{3}t - \frac{2}{9a_0}t^2 + \frac{20}{9^2 a_0^2}t^3 - \frac{1}{3a_0^3}t^4 + \frac{364}{9^3 a_0^4}t^5 - \frac{5236}{9^4 a_0^5}t^6 + \cdots$$
$$- \frac{2}{7a_0}q^2 t^{7/2} + \frac{10}{3\cdot 9\cdot a_0^2}q^2 t^{9/2} - \frac{394}{7\cdot 9\cdot 11\cdot a_0^3}q^2 t^{11/2} + \cdots \quad (53c)$$

wobei mit Rücksicht auf (52a)

$$a_0 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1}.$$

Da an der Oberfläche der Kugel die relative Schwere $u = 1$ wird, so ergiebt sich aus (37) sogleich der Werth von a_0 in der Form

$$a_0 = -\frac{(s)}{3s_0}q^2.$$

Im Sinne der Gleichung (49) soll nun

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{a_0}\left(1 + b_1 t^{1/2} + b_2 t^{2/2} + \cdots + b_i t^{i/2}\cdots\right) \quad (54)$$

gebildet werden. Für die b Coëfficienten besteht die Recursionsformel

$$b_i + b_{i-1}a_1 + b_{i-2}a_2 + \cdots + b_1 a_{i-1} + a_i = 0 \quad (55)$$

und die ersten Coëfficienten werden

$$b_1 = b_3 = b_5 = 0;\ b_2 = -\frac{5}{3a_0},\ b_4 = \frac{3}{a_0^2},\cdots$$

so dass das Integral (49) in der Form erscheint:

$$l\cdot\frac{x}{c} = \frac{1}{a_0}\left(t - \frac{5}{6a_0}t^2 + \frac{1}{a_0^2}t^3 - \frac{455}{4\cdot 9^2 a_0^3}t^4 + \frac{292}{3\cdot 5\cdot 9\cdot a_0^4}t^5 - \cdots\right.$$
$$- \frac{15359}{6\cdot 9^2 a_0^5}t^6 + \cdots + \frac{4}{7\cdot 9 a_0^2}q^2 t^{9/2} - \frac{500}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot a_0^3}q^2 t^{11/2} +$$
$$\left. + \frac{53776}{7\cdot 9^2\cdot 11\cdot 13\cdot a_0^4}q^2 t^{13/2} + \cdots\right) \quad (56)$$

in welchem noch

$$t = x^2 y$$

zu setzen ist. Da man es hier mit zwei Constanten zu thun hat, so haben wir das allgemeine Integral vor uns, welches jedoch im Punkte $x = 0$ nicht angewendet werden kann. Für $x = 1$ hat man dagegen $y = 0$, daher auch $t = 0$ und hiermit wird $c = 1$.

Die Reihe convergiert nahe der Oberfläche des Himmelskörpers ziemlich rasch, und kann im Falle eines mit einem Kern versehenen Körpers auch an der Oberfläche dieses Kernes angewendet werden. Behufs praktischer Anwendung ist jedoch noch eine langwierige Umkehrung erforderlich.

2) Ein explicite Reihe erhält man, wenn in (48)

$$s = -\frac{2}{n-1}$$

gewählt wird. Die Gleichung wird dann

$$tu\frac{du}{dt} - \frac{5-n}{n-1}tu + \frac{n-3}{n-1}t^2 - \frac{n+1}{n-1}u^2 - \frac{n-1}{2}q^2 = 0. \quad (57)$$

Setzt man nacheinander

$$u = \frac{\varphi}{\psi},\ \psi = \frac{n-1}{5-n}\varphi' \text{ und } \varphi = e^{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

und betrachtet t als die unabhängige Variabele, so kommt

$$t\frac{d^2t}{d\eta^2} - t\frac{dt}{d\eta} - \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{dt}{d\eta}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{5-n}\right)^2\left(\frac{n-1}{2}q^2 - \frac{n-3}{n-1}t^2\right) = 0 \quad (59)$$

deren Auflösung unmittelbar y als Funktion von x liefert. Die angezeigten Substitutionen geben laut (49)

$$l \cdot \frac{x}{c} = \frac{n-1}{5-n}\eta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

und da nach (50)

$$t = \left(xy^{\frac{n-1}{2}}\right)^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

ist, so ist das gewünschte Ziel erreicht.

Setzt man nun

$$t = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + \cdots + a_{2i}\eta^{2i} + a_{2i+1}\eta^{2i+1} + \cdots, \quad (62)$$

so wird

$$1 \cdot 2\left(a_2a_0 + \tfrac{1}{2}a_1^2\right) - 1a_0a_1 - \frac{2n}{n-1}1^2a_1^2 + \frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}a_0^2 - \frac{(n-1)^3}{2(5-n)^2}q^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63a)$$

und für die weiteren Coëfficienten:

$$(2i+1)(2i+2)(a_0a_{2i+2}+a_1a_{2i+1}+a_2a_{2i+\cdots}+\tfrac{1}{2}a_{i+1}^2)-$$
$$-(2i+1)(a_0a_{2i+1}+a_1a_{2i}+a_2a_{2i-1+\cdots}+a_ia_{i+1})-$$
$$-\frac{4n}{n-1}\Big(1(2i+1)a_1a_{2i+1}+2(2i)a_2a_{2i}+3(2i-1)a_3a_{2i-1+\cdots}$$
$$+\tfrac{1}{2}(i+1)^2a_{i+1}^2\Big)+$$
$$+2\frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}\Big(a_0a_{2i}+a_1a_{2i-1}+a_2a_{2i-2+\cdots}+\tfrac{1}{2}a_i^2\Big)=0; \quad (63\,b)$$
$$(2i+2)(2i+3)(a_0a_{2i+3}+a_1a_{2i+2}+a_2a_{2i+1+\cdots}+a_{i+1}a_{i+2})-$$
$$-(2i+2)(a_0a_{2i+2}+a_1a_{2i+1}+a_2a_{2i+\cdots}+\tfrac{1}{2}a_{i+1}^2)-$$
$$-\frac{4n}{n-1}\Big(1(2i+2)a_1a_{2i+2}+2(2i+1)a_2a_{2i+1}+3(2i)a_3a_{2i+\cdots}$$
$$+(i+1)(i+2)a_{i+1}a_{i+2}\Big)+$$
$$+2\frac{(n-1)(n-3)}{(5-n)^2}\Big(a_0a_{2i+1}+a_1a_{2i}+a_2a_{2i-1+\cdots}+a_ia_{i+1}\Big)=0.$$

In diesen Gleichungen bedeuten a_0 und a_1 die Integrationsconstanten; da hiezu noch die dritte Constante c hinzutritt, so besteht natürlich zwischen denselben eine Bedingungsgleichung, derzufolge eine derselben herausfällt.

Die Formeln (60), (61) und (62) geben nun für das gesuchte Integral

$$y=\frac{1}{x^{\frac{2}{n-1}}}\left(a_0+a_1\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot\frac{x}{c}\right)+a_2\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot\frac{x}{c}\right)^2+\cdots\right)^{-\frac{2}{n-1}}, \quad (64)$$

das jedoch um den Mittelpunkt voller Gaskugeln ebenfalls unbrauchbar wird. Für Punkte an der Oberfläche wird $x=1$, also

$$y_1=\left(a_0-a_1\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot c\right)+a_2\left(\frac{5-n}{n-1}l\cdot c\right)^2-\cdots\right)^{-\frac{2}{n-1}} \quad (65)$$

eine Gleichung, die nach der Bestimmung der Constanten die Beziehung zwischen n und q liefert.

3) Um auch eine in der Umgebung des Mittelpunktes gültige Entwickelung zu bekommen, differenzieren wir die Gleichung (30) i mal; man erhält so

$$x\frac{d^{i+2}y}{dx^{i+2}}+(2+i)\frac{d^{i+1}y}{dx^{i+1}}+q^2x\frac{d^i(y^n)}{dx^i}+iq^2\frac{d^{i-1}(y^n)}{dx^{i-1}}=0.$$

Es lässt sich so y in eine nach steigenden Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreitende Reihe entwickeln, und die Bedingung $y_0 = 1$ für $x = x_0$ und $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ geben die beiden nöthigen Constanten. Die Entwickelung ist auch noch für $x_0 = 0$ gültig, nur muss dann $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ gesetzt werden, wodurch alle ungeraden Differentialquotienten ausfallen und eine nur nach geraden Potenzen von x fortschreitende Reihe bleibt. Die ersten Glieder sind:

$$y = y_0 + \frac{1}{1!} y_0'(x - x_0) - \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{x_0} y_0' + q^2 y_0^n\right)(x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{2 \cdot 3}{x_0^2} y_0' + \frac{2q^2}{x_0} y_0^n - n q^2 y_0^{n-1} y_0'\right)(x - x_0)^3 + \cdot\cdot, \quad (66)$$

die sich indessen etwas vereinfachen, da in den Anwendungen stets $y_0 = 1$ wird. Im Falle $n = 5/2$ hat man

$$y = 1 - \frac{1}{1!}\alpha x_0 q^2 (x - x_0) + \frac{1}{2!}(2\alpha - 1) q^2 (x - x_0)^2$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\alpha x_0 q^4 - \frac{2(3\alpha - 1)}{x_0} q^2\right)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{15}{4}\alpha^2 x_0^2 q^6\right.$$
$$\left. - \frac{5}{2}(4\alpha - 1) q^4 + \frac{8(3\alpha - 1)}{x_0^2} q^2\right)(x - x_0)^4 + \frac{1}{5!}\left(\frac{15}{8}\alpha^3 x_0^3 q^8\right.$$
$$\left. + \frac{5}{2}(17\alpha - 7)\alpha x_0 q^6 + \frac{10(5\alpha - 1)}{x_0} q^4 - \frac{40(3\alpha - 1)}{x_0^3} q^2\right)(x - x_0)^5$$
$$+ \frac{1}{6!}\left(\frac{15}{16}\alpha^4 x_0^4 q^{10} - \frac{5}{8}(42\alpha - 57)\alpha^2 x_0^2 q^8 - 5\left(69\alpha^2 - 34\alpha + \frac{7}{2}\right) q^6\right.$$
$$\left. - \frac{60}{x_0^2}(5\alpha - 1) q^4 + \frac{240}{x_0^4}(3\alpha - 1) q^2\right)(x - x_0)^6 + \cdot\cdot, \quad (67)$$

wo nun α die Stelle der zweiten willkürlichen Constante einnimmt; sie ist aus der Gleichung zu berechnen, wenn $x = 1$ und $y = 0$ gesetzt wird. Bedeutet nämlich u_0 das Verhältniss der Schwere auf der Oberfläche des festen Kernes und der ganzen Kugel, und ist M_0 die Masse des Kernes, so hat man

$$u_0 = \frac{M_0}{M x_0^2},$$

und demgemäss nach (37)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -\frac{1}{3}\frac{(s_0)}{s_0} x_0 q^2 = -\alpha x_0 q^2, \quad \ldots \quad (68)$$

wenn (s_0) die mittlere Dichte des Kernes bezeichnet. Ist $x_0 = 0$, also auch $(s_0) = s_0$, so wird $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$, wie wir schon einigemale gezeigt haben.

Ist eine Reihe für y schon bekannt, so braucht das in den Gleichungen (36 — 39) auftretende y^n nicht mehr mit Hülfe des Polynomsatzes berechnet zu werden, sondern lässt sich nach (30) einfach durch zweifache Differentiation ableiten:

$$y^n = -\frac{1}{q^2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Wir betrachten nun ausschliesslich den Fall einer vollen Gaskugel, und setzen

$$y = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Die Anwendung des Polynomsatzes giebt

$$y^n = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

wo, wie bekannt für die A Coëfficienten die Recursionsformel

$$\begin{aligned}(i+1)\,A_{i+1} &= (i+1)\,n a_{i+1} + (in-1)\,a_iA_1\\ &+((i-1)\,n-2)\,a_{i-1}A_2 + ((i-2)\,n-3)\,a_{i-2}A_3\\ &+((i-3)\,n-4)\,a_{i-3}A_4 + \cdots + (4n-(i-3))\,a_4A_{i-3}\\ &+(3n-(i-2))a_3A_{i-2}+(2n-(i-1))\,a_2A_{i-1}+(n-i)a_iA_i \quad (72)\end{aligned}$$

gilt. Durch Substitution von (70) und (71) in die ursprüngliche Gleichung (30) erhält man:

$$a_{2i+2} = -\frac{A_{2i}}{(2i+2)(2i+3)}q^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

so dass die ersten Coëfficienten

$$a_2 = -\frac{q^2}{3!}; a_4 = \frac{nq^4}{5!}; a_6 = -\frac{q^6}{7!}\left(n^2 + \frac{5!}{2(3!)^2}n(n-1)\right);$$

$$a_8 = \frac{q^8}{9!}\left(n^3 + \left(\frac{5!}{2(3!)^2} + \frac{7!}{3!\,5!}\right)n^2(n-1) + \frac{7!}{(3!)^4}n(n-1)(n-2)\right) \quad (74)$$

werden.

Für zweiatomige Gase, also für $n = 5/2$ hat man daher

$$\begin{aligned}y = 1 &- \frac{1}{3!}(qx)^2 + \frac{5}{2\cdot 5!}(qx)^4 + \frac{5^2}{2\cdot 7!}(qx)^6 + \frac{5^4}{2\cdot 3\cdot 9!}(qx)^8\\ &- \frac{5^2\cdot 1252}{4!\;11!}(qx)^{10} + \frac{5^3\cdot 21984}{5!\;13!}(qx)^{12} - \frac{5^4\cdot 4330464}{7!\;15!}(qx)^{14}\\ &+ \frac{5^5\cdot 26150368}{7!\;17!}(qx)^{16} - \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)\end{aligned}$$

oder ausgerechnet, wobei die in [] gesetzten Zahlen BRIGGSsche Logarithmen bedeuten, denen — 10 hinzuzufügen ist:

$$\begin{aligned} y = 1 &- [9{,}221\ 8487](qx)^2 + [8{,}318\ 7587](qx)^4 \\ &- [7\cdot 394\ 4795](qx)^6 + [6{,}457\ 9657](qx)^8 \\ &- [5\cdot 514\ 1774](qx)^{10} + [4\cdot 565\ 5551](qx)^{12} \\ &- [3\cdot 613\ 4843](qx)^{14} + [2\cdot 658\ 8288](qx)^{16} \\ &- [1\cdot 702\ 1637](qx)^{18} + [0\cdot 743\ 1033](qx)^{20} \end{aligned} \quad (76)$$

Die Grenzbedingung $y = 1$ für $x = 0$ ist hierin bereits berücksichtigt. Obwohl nun die Coëfficienten rasch abnehmen und selbst abwechselnde Vorzeichen besitzen, ist die Convergenz wegen des ziemlich grossen Werthes von q^2 doch eine sehr langsame, so dass q aus der Bedingung $y = 0$ für $x = 1$ auch nicht annähernd berechnet werden könnte. Die Anfangsglieder dieser Beziehung sind übrigens nach (74)

$$0 = 1 - \frac{q^2}{3!} + \frac{n}{5!}q^4 - \frac{1}{7!}\left(n^2 + \frac{5!}{2(3!)^2}n(n-1)\right)q^6 - \cdots \quad (77)$$

und die Reihe für y^n wird der Gleichung (73) zu folge:

$$\begin{aligned} y^n = 1 &- \frac{5}{2\cdot 3!}(qx)^2 + \frac{5}{2\cdot 4!}(qx)^4 - \frac{5^4}{3!\,7!}(qx)^6 + \frac{5^2\cdot 1252}{4!\,9!}(qx)^8 \\ &- \frac{5^3\cdot 21\,984}{5!\,11!}(qx)^{10} + \frac{5^4\cdot 4\,330\,464}{7!\,13!}(qx)^{12} \\ &- \frac{5^5\cdot 26\,150\,368}{7!\,15!}(qx)^{14} + \cdots\cdots \end{aligned} \quad (78)$$

Die Berechnung weiterer Coëfficienten wird durch die Anwendung des Polynomsatzes sehr erschwert. Man erhält aber eine sehr einfache Recursionsformel durch Benutzung der Gleichung (42) Differenziert man diese logarithmisch, so kommt

$$z\frac{d^3z}{dx^3} - n\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dz}{dx} + \frac{n-1}{x}\frac{d^2z}{dx^2}z = 0,$$

woraus man für den Coëfficienten von (qx) zu folgender Reductionsformel gelangt:

$$\begin{aligned} &(2i-2)\,2i(2i+1)\,a_{2i} + (0\cdot 2\cdot 3\cdot + (2i-4)(2i-2)(2i-1) \\ &\quad - 2\,((2i-1)(2i+1) - 3)\,n)\,a_{2i-2}\,a_2 \\ &\quad + (2\cdot 4\cdot 5 + (2i-6)(2i-4)(2i-3) \\ &\quad - 4\,((2i-3)(2i+1) - 5)\,n)\,a_{2i-4}\,a_4 \\ &\quad + (4\cdot 6\cdot 7 + (2i-8)(2i-6)(2i-5) \\ &\quad - 6\,((2i-5)(2i+1) - 7)\,n)\,a_{2i-6}\,a_6 + \cdots = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Ist in dem letzten Gliede a_{2i-2u} und a_{2u} gleich, so erhält dieses den Factor $\frac{1}{2}$. Die Rechnung mit dieser Formel ist sehr einfach, da die Zahlenfactoren stets wiederkehren.

A. RITTER*, der wohl zuerst die Gleichung (30) aufstellte, integriert sie graphisch und erhält für $n = 2\frac{1}{2}$ die folgenden Werthe:

$x =$	0·0	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
$y =$	1·000	0·953	0·827	0·670	0·513	0·376	0·264	0·174	0·102	0·046	0·0
$y'' =$	1·000	0·887	0·622	0·367	0·188	0·0867	0·0358	0·0126	0·00332	0·000454	0·0
$y_1 =$	∞	1·337	0·531	0·309	0·211	0·156	0·123	0·100	0·0836	0·0714	0·0

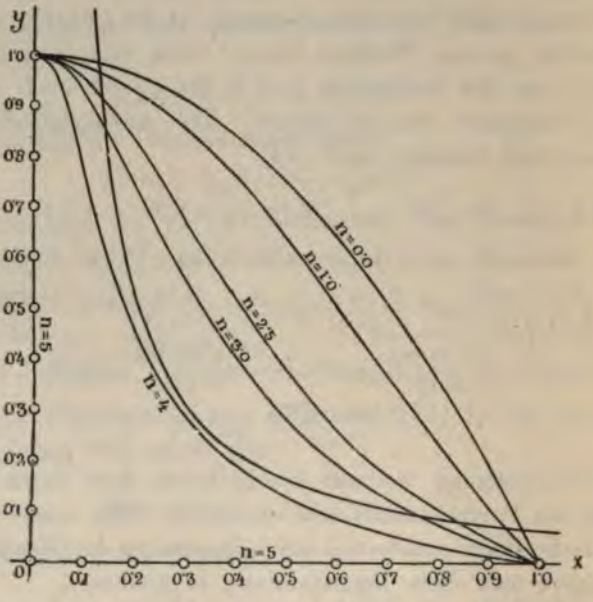


Fig. 3.

Temperaturcurven isentroper Gaskugeln.

Hier bezieht sich die letzte Reihe auf das singuläre Integral (44), welches mit dem aus den Zahlenwerthen für y folgenden Werthe $q = 5{\cdot}36$ berechnet ist. Die beiden Integrale haben in dem Punkte $x_1 = 0{\cdot}138$ und $x_2 = 0{\cdot}849$ den gleichen Werth $y_1 = 0{\cdot}925$ und $y_2 = 0{\cdot}075$ und im Punkte $x = 0{\cdot}275$ gemeinsame Tangente.

* Ann. d. Phys. u. Chem. 1880. Bd. XI. pag. 338.

Die aufgeschriebenen Werthe genügen, um daraus genauere esultate ableiten zu können. So kann die Gleichung

$$y = 1 - x$$

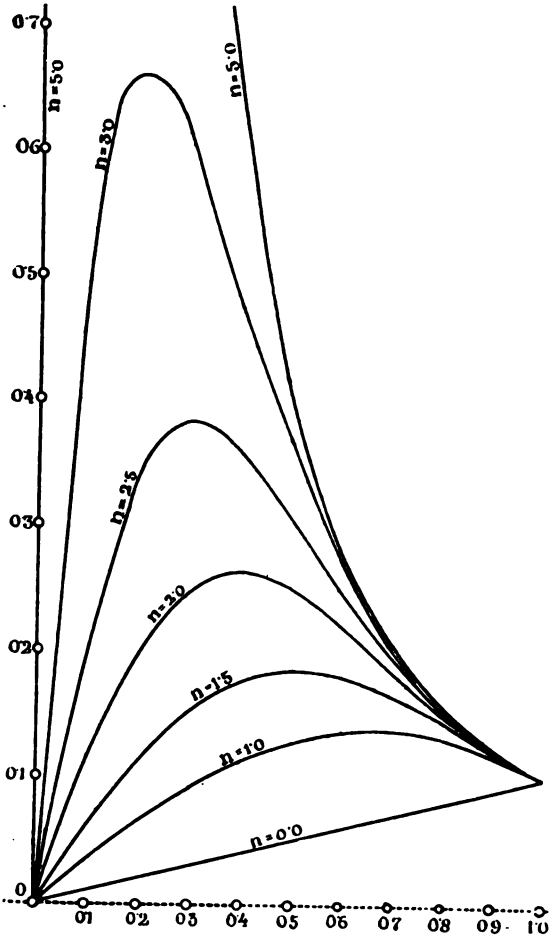


Fig. 4.

Gravitationscurven isentroper Gaskugeln.

als eine erste, wenn auch sehr rohe Annäherung dienen. Schreibt man das Integral von (30) in der Form

$$y = A - \frac{q^2}{x_0} \int dx \int x y^n dx,$$

so kann eine jede Näherung benutzt werden, um einen weiteren Näherungsausdruck zu finden. Der eben gegebene Ausdruck und die Annahme $n = 4$ führen RITTER zu der Interpolationsformel

$$y = 1 - 7x^2 + 14x^3 - 12 \cdot 6x^4 + 5 \cdot 6x^5 - x^6,$$

welche einen bis zu 2% sicheren Anschluss gewährt. Etwa drei Decimalen sicher erhält man durch die Formel

$$y = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^{3 \cdot 137 - 1 \cdot 940 x}.$$

Die Figur 3 giebt nach RITTER die Integrale der Zustandsgleichung für $n = 0$, 1, $\frac{5}{2}$, 3, 4 und 5, weiter das singuläre Integral für zweiatomige Gase. In Figur 4 sind die relativen Schwerebeschleunigungen im Innern des Körpers für dieselben Fälle veranschaulicht. Beidemale bildet $n = 5$ einen Ausnahmefall; dort geht nämlich die Curve in die Coordinatenaxen über, hier zerfällt sie in die Ordinatenaxe und die die Anziehung eines äussern Punktes darstellende NEWTON'sche Curve.

Die Variabelen des Spectrums.

Schreibt man das Spectrum des absolut schwarzen Körpers in der Form:

$$e = \frac{4}{\pi D} m^4 \theta^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + m^2)^2},$$

und bedenkt man, dass allgemein die Beziehung

$$m\theta = m_0 \theta_0$$

stattfindet, so kann in (10) wegen (35) einfach

$$e = \frac{4}{\pi D} (m_0 \theta_0)^4 \frac{\lambda^2 y^4}{(\lambda^2 y^2 + m_0^2)^2} \quad \ldots \quad (80)$$

geschrieben werden, wobei sich die mit dem Index o versehenen Grössen auf die Oberfläche des Kernes, beziehentlich auf den Mittelpunkt der Gaskugel beziehen.

Ebenso einfach lässt sich auch der Absorptionscoëfficient ausdrücken. Da man es mit isentropen Körpern zu thun hat, so ist nach den in der Einleitung gegebenen Gleichungen $\frac{\mu}{m}$ im Innern der Gaskugel durchaus constant, so dass

$$\mu = \frac{m}{m_0}\mu_0 = \frac{\mu_0}{y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

gesetzt werden kann. Man hat also

$$\alpha = \frac{\mu^4}{m^4}\left(\frac{\lambda^2+m^2}{\lambda^2+\mu^2}\right)^2 = \frac{\mu_0^4}{m_0^4}\left(\frac{\lambda^2y^2+m_0^2}{\lambda^2y^2+\mu_0^2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

und dem gemäss

$$1-\alpha = \left(1-\frac{\mu_0^2}{m_0^2}\right)\left(\left(1+\frac{\mu_0^2}{m_0^2}\right)\lambda^2y^2+2\mu_0^2\right)\frac{\lambda^2y^2}{(\lambda^2y^2+\mu_0^2)^2}. \quad (83)$$

Alle mit dem Index o versehenen Grössen sind als constant zu betrachten, und die Wellenlänge kommt stets in der Verbindung (λy) vor.

Diese Ausdrücke sollten nun nach Potenzen von y entwickelt werden, worauf y durch seinen Reihenwerth zu ersetzen wäre, was zu ganz unabsehbaren Verwickelungen führt. Hiezu kommt noch, dass es keine Entwickelung nach y giebt, die für alle Wellenlängen convergent bliebe, so dass eine solche für jeden bei der Beobachtung benutzten Spectralbezirk gesondert vorgenommen werden muss. Es ist also jedenfalls gerathen nicht y, sondern λy als unabhängige Veränderliche zu betrachten.

In jedem Elemente des Integrals spielt das Radical

$$\sqrt{n^2r^2-\gamma^2} = r_1\sqrt{n^2x^2-\frac{\gamma^2}{r_1^2}}$$

eine besondere Rolle, insoferne es nicht ausgeschlossen ist, dass dieses in einzelnen Kugelschalen imaginär werde.*

Ist n_0 der Brechungsindex im Mittelpunkte der Gaskugel oder auf der Oberfläche des festen Kernes, so hat man nach dem NEWTON'schen Satze:

$$n^2-1 = (n_0^2-1)\frac{s}{s_0} = (n_0^2-1)y^n \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

und dem zufolge

$$N = n^2x^2 = x^2+(n_0^2-1)x^2y^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die Curve der nx beginnt in dem Punkte $x=0$ mit dem Werthe 0, wächst sodann stetig, nimmt an der Oberfläche des Weltkörpers, wo der Brechungsindex, wie im ganzen leeren Raume 1 ist, den Werth 1 an, und bleibt von da an mit x identisch,

* O. KNOPF; Die SCHMIDTsche Sonnentheorie u. s. w. Jena 1893.

nähert sich also einer die Coordinatenaxen unter dem Winkel von 45° schneidenden Geraden, kann jedoch innerhalb des Himmelskörpers ein oder mehrere Maxima annehmen.

Der tiefste Punkt eines jeden im Körper verlaufenden Lichtstrahles (z. B. P in Fig. 7) berührt die Oberfläche einer Kugel vom Radius (r). Für einen jeden Punkt dieses Strahles ist also, da $e = 0$ ist, $(n)(r) = \text{const.}$ Schneidet er also die durch den Punkt M gehende Kugelschale unter dem Winkel ε, so hat man

$$(n)(r) = nr \cos \varepsilon,$$

und da nr mit r fortwährend wächst, so ist

$$nr > (n)(r),$$

so dass das Radikal immer reell bleibt. Besitzt also die Curve der nx kein Minimum, so gelangt ein jeder in jedem beliebigen

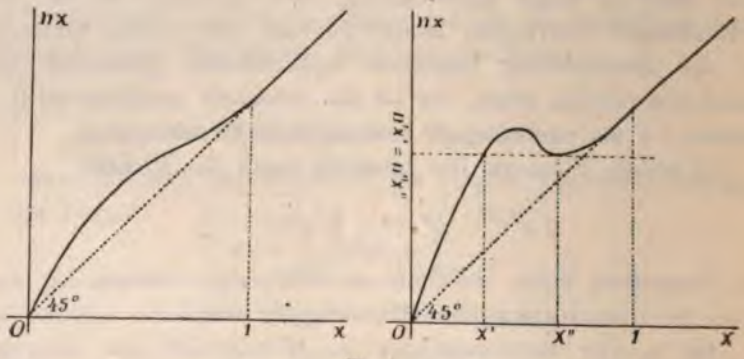


Fig. 5.
Verschiedenes Verhalten der nx-Curven.

Punkte der Gasmasse entstehende Lichtstrahl in den äusseren Raum, und kann daher auch das Auge erreichen.

Besitzt aber die Curve der nx (wie in der zweiten Fig. 5) bei x'' ein Minimum (es lässt sich leicht beweisen, dass dem isentropen Zustande höchstens *ein* Maximum und Minimum entspricht), so musste diesem bei einem kleineren x' ein Maximum vorangehen, so dass die Curve auch im aufsteigenden Aste einmal den Werth $n''x''$ erreichen musste. Es ist also

$$n'x' = n''x'',$$

jedoch für jedes x, das der Ungleichung

$$x'' > x > x'$$

entspricht:

$$nx > n''x''.$$

Daraus folgt aber, dass die Lichtstrahlen, welche zwischen x' und x'' gelegene Kugelschalen tangentiell verlassen, aus der Kugel gar nicht treten können. Denn sollte ein Strahl die Schale x'' unter dem Winkel ε'' verlassen, so müsste

$$nx \cos O = n''x'' \cos \varepsilon''$$

sein, was aber wegen $nx > n''x''$ nicht möglich ist. Innerhalb der Kugelschale $x'x''$ bleibt also das Radical imaginär.

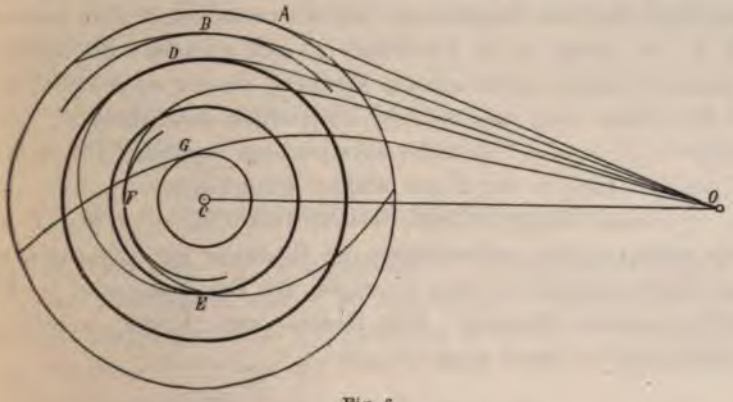


Fig. 6.

Strahlengang im Innern einer leuchtenden Gaskugel.

Da $n''x'' = n'x'$ ist und dieses nach (3) mit $\frac{R}{r_1} \sin \psi$ identisch ist, so gelangen die, die Schalen x' und x'' streifend verlassenden Lichtstrahlen (für welche $\varepsilon' = \varepsilon'' = 0$ ist), unter demselben Gesichtswinkel in's Auge, fallen mithin zusammen. Das Bild der innern Kugel, für welche $x < x'$, grenzt also unmittelbar an das der äusseren, für welche $x > x''$ ist, während der Schale $x'x''$ ein besonderes Bild nicht entspricht.

Am bequemsten verfolgt man den Strahlengang, wenn man (Fig. 6) vom Auge O ausgeht. Der äusserste Strahl OA, der die äussere Oberfläche eben berührt, schliesst mit der Axe CO einen dem scheinbaren Halbmesser gleichen Winkel ein. Einem etwas

kleineren Winkel ψ entspricht ein Strahl OB, der eine tiefer gelegene Kugel berührt. Der Strahl selbst ist um den an den Berührungspunkt gezogenen Radius symmetrisch, und dessen in der Kugel gelegener Bogen ist zugleich die Gesammtheit aller jener Punkte, von denen Licht ins Auge gelangen kann. Alle diese Strahlen können in tiefer gelegene Schichten als x'' nicht eintreten, doch wird die Krümmung des Strahles mit Annäherung an diese Kugelschale grösser.

Derjenige Strahl, welcher die Schale $x = x''$ berührt, und dem der Gesichtswinkel ψ'' entspricht, wird circular gebrochen und geht im Kreise herum. Für ihn ist sowohl in den höher als tiefer gelegenen Schichten nx grösser als $n''x''$, und daher kann die Schale in keiner Richtung verlassen werden. Ist der Gesichtswinkel des Strahles nur um ein unendlich kleines geringer, als ψ'', so dringt er in die Schale x'' ein, schneidet die tiefer gelegenen Schichten unter spitzen Winkeln, die aus $nx \cos \varepsilon = n''x''$ zu berechnen sind, und erreicht schliesslich die Schale x', die er wegen $n'x' = n''x''$ ebenfalls asymptotisch berührt. Die Schalen x' und x'' sind in der Figur stärker ausgezogen.

Strahlen mit geringerem Gesichtswinkel als ψ'', z. B. OF oder OG, dringen ganz in das Innere der Gasmasse ein, schneiden aber die beiden Schalen x' und x'' wegen der Beziehung $n'x' = n''x''$ unter gleichen Winkeln. Der Radius jener Kugel, welche den Strahl berührt, kann nach (3) aus

$$nx = n''x'' \cos \varepsilon'' = \frac{R}{r_1} \sin \psi$$

für jedes gegebene ψ berechnet werden.

Es ist bekannt, welche Schlussfolgerungen SCHMIDT aus diesen Betrachtungen für die Natur der Sonne gezogen hat. Gründe für eine nur *scheinbar* scharfe Begrenzung der Sonnenscheibe hat aus rein wärmemechanischen Principien auch RITTER gegeben. Zu bedenken ist jedoch, dass das Volumen eines Himmelskörpers nicht willkürlich über eine gewisse Grenze hinausgenommen werden kann, da ja die Constanz der Grösse q^2 fordert, dass die Abmessungen eines gasförmigen Himmelskörpers stets durch den physikalischen Zustand des Gases beschränkt bleiben. Es bliebe zu untersuchen, ob diese Thatsachen nicht die Wahrscheinlichkeit des KANT-LAPLACE'schen Urnebels in Frage ziehen.

Jetzt bereitet das Radical

$$r_1 \sqrt{n^2 x^2 - \frac{\gamma^2}{r_1^2}}$$

keine Schwierigkeiten mehr, selbst nicht im mittleren Theile der Kugel, nur muss die Integration nach x geeignet angeordnet werden.

Da der Lichtstrahl im Innern der Kugel symmetrisch verläuft, so kann das Integral (10) geeignet transformiert werden.

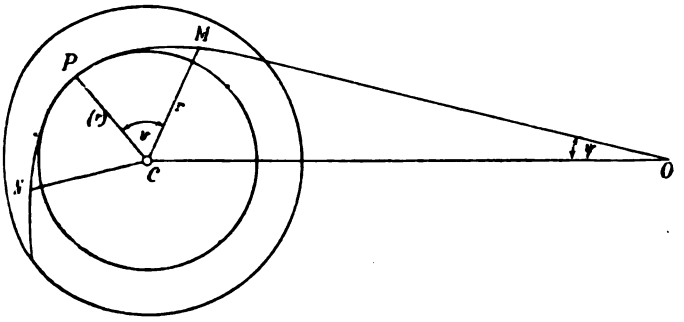


Fig. 7.

Elementarintensität einer leuchtenden Gaskugel.

In den um den Berührungspunkt P (Fig. 7) symmetrisch gelegenen Punkten M und N ist die Intensität dieselbe, jedoch entspricht derjenigen in N eine grössere Extinction. Die Intensität im Punkte M ist daher mit einer Potenz von e zu multiplicieren, deren Exponent ist

$$\int_1^x \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}}, \quad \ldots\ldots \quad (86)$$

während der Exponent des e-Factors in N

$$\int_1^{(x)} \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}} + \int_{(x)}^x \frac{l \cdot (1-\alpha)\, dx}{\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R^2}{r_1^2} \sin^2 \psi}} \quad \ldots \quad (87)$$

ist, wenn unter (x) die Wurzel der Gleichung

$$nx = \frac{R}{r_1} \sin \psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

verstanden wird. Ausserdem mag noch der vom Berührungspunkt aus gezählte Polarwinkel eingeführt werden, der durch

$$v = \int_r^{(r)} \frac{\gamma\, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - \gamma^2}} = \frac{R}{r_1} \sin\psi \int_x^{(x)} \frac{dx}{x\sqrt{n^2 x^2 - \frac{R_1^2}{r_1^2}\sin^2\psi}} \qquad (89)$$

gegeben ist.

Demzufolge wird die Gleichung (10) etwas einfacher:

$$J = -2\pi \int_v^{\psi_1} \int_0^{\varsigma} r \sin v\, e\, l \cdot (1-\alpha)\, e^{\int_1^{(x)} l\cdot(1-\alpha)\,dz} \left(e^{\int_{(x)}^{x} l\cdot(1-\alpha)\,dz} + e^{-\int_{(x)}^{x} l\cdot(1-\alpha)\,dz} \right) d\varsigma\, dr. \qquad (90)$$

Die Symmetrie hört natürlich in Himmelskörpern mit centralem Kerne für alle x auf, welche kleiner als x_0 sind, daher innerhalb des Kernes zu liegen kommen. In der zwischen Kern und Auge gelegenen Gasschichte gehört aber zu jedem ς nur ein einziges x, was die Rechnung erleichtert.

Mit den beiden asymptotischen Strahlen braucht nicht besonders gerechnet zu werden, da diese, wegen $\lim \varsigma = \infty$, das Spectrum des absolut schwarzen Körpers geben.

Ob endlich circulare Refraction vorhanden ist, das lässt sich erst entscheiden, wenn y als Function von x gegeben ist. Dürfte man von dem singularen Integrale ausgehen, so wäre das Minimum der Gleichung (85) durch

$$(x) = 7 \cdot 12\,(n_0^2 - 1)^{\frac{3}{10}}$$

gegeben, Circularrefraction wäre also vorhanden, sobald

$$1 < n_0^2 < 1{,}001\,440$$

wird.

Viel grössere Brechungsindices fordert die für y gegebene Zahlenreihe. Schreibt man kurz für

$x =$	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9:
$z =$	1·554	0·688	0·071	−0·172	−0·185	−0·132	−0·077	−0·035	−0·010,

so kommt

$$N' = x\,(2 + (n_0^2 - 1)\,z).$$

Ein Minimum kann daher nur für $x > \frac{1}{3}$ erwartet werden und beansprucht wenigstens einen Brechungsindex $n_0^2 > 17$. Da in

gasförmigen Weltkörpern nach Gleichung (37) die Mittelpunktsdichte etwa 22mal so gross ist, als die mittlere Dichte, so muss der mittlere Brechungsindex bei der Möglichkeit circularer Refraction mindestens $1 \cdot 314$ sein. Unter Zugrundelegung der RITTER'schen Interpolationsformel findet man für die Stelle des Minimums:

$$(1 - x'')^4 - \tfrac{2}{3}(1 - x'')^3 + \frac{1}{3(n_0^2 - 1)} = 0.$$

Die Unbekannten des Spectrums.

1) Für ihrer ganzen Masse nach gasförmige Weltkörper ist q^2 schon im Vorhinein bekannt, y enthält daher keine neue Unbekannte. Die Kenntniss des absolut schwarzen Körpers und der Absorption setzen voraus, dass m_0 und μ_0 bekannt seien. m_0 gibt zugleich die absolute Temperatur θ_0 und beide zusammen die Constante der Entropie, da ja $[S]$ durch jene des schwarzen Körpers ausgedrückt werden kann, also von stofflichen Beschaffenheiten unabhängig ist. Hiermit ist dann auch der centrale Druck und die Dichtigkeit gegeben, und da y bekannt ist, sind diese Zustandsvariabeln für jeden Punkt der Gaskugel bestimmt. Mit Hülfe der Gleichung (40) ergiebt sich sodann r_1, der Halbmesser des Körpers, was ein jedenfalls unerwartetes Resultat ist. Da es sich hier um genügend genau bestimmbare Grössen handelt, so ist die Berechnung scharf und führt mit den vorher bestimmten Werthen auch zur Kenntniss der Masse des Sternes. Diese Resultate sind unmittelbar verwendbar, wenn es sich um planetarische Nebel handelt. Da deren scheinbarer Halbmesser bekannt ist, so gelangt man hierdurch zu einer angenäherten Kenntniss der Entfernung. Man kann aber noch einen Schritt weiter gehen. Die kugelförmigen Sternhaufen, welche jenseits unseres Sternsystems fallen, können mit einiger Annäherung als kugelförmige Gasmassen betrachtet werden, insoferne die einzelnen Sterne zu den gegenseitigen Abständen in demselben Grössenverhältnisse stehen, wie die Molekeln zu den intermolekularen Räumen. Auch für die mittleren Bewegungen bestehen in beiden Systemen gewisse Analogien. Da auch die scheinbaren Halbmesser dieser Gebilde bekannt sind, so kann man vielleicht schon mit den heutigen

Hülfsmitteln zu einer Abschätzung ihrer Entfernung gelangen. Es wäre nicht der erste Fall, dass die Spectralanalyse eine rein astronomische Frage gelöst hätte.

Das Gesetz von BOYLE-GAY-LUSSAC giebt nun mit den Werthen s_0, θ_0, p_0 die den mittleren Stoff charakterisierende Constante R.

Ausserdem ist die Kenntniss von n_0, des Brechungsindex im Mittelpunkte der Kugel erforderlich. Möglicher Weise kann diese Grösse als vorhinein gegeben betrachtet werden, insofern die chemische Zusammensetzung des Stoffes, sowie dessen Charakteristik R schon bekannt ist. Weiter kommen in den Gleichungen noch R und ψ_1, Entfernung und scheinbarer Halbmesser vor, von denen jedoch, da zwischen ihnen die Gleichung (11) besteht, nur eine als unbekannt betrachtet zu werden braucht. Doch kann auch diese noch eliminiert werden, insofern die Gleichung (10), falls die Parallaxe des Sternes nicht bekannt wäre, zu einer ganz neuen Beziehung führt.

Denkt man sich nämlich J als Function von λ hingeschrieben, so liefert die Substitution $J = \iota$, in welcher ι unendlich klein, sonst aber beliebig ist, eine Gleichung in λ, die wenigstens zwei reelle Wurzeln besitzt. Die dem brechbareren Ende des Spectrums angehörende Wurzel λ_1 ist dem DRAPER'schen Gesetze nach von stofflichen und Oberflächenbeschaffenheiten des Sternes unabhängig, daher identisch mit dem Ende des einfachen Spectrums, das mit dem Sterne gleicher Temperatur angehört. Sind also μ, A die Elemente eines beliebigen Spectrums von der mittleren Temperatur des Sternes, und λ_1 die Wurzel der besagten Gleichung, dann hat man

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi\iota}\sqrt{\frac{\mu^3}{A}}, \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

aus welcher beiderseits die Grösse ι herausfällt, wenn man, was wegen der unendlichen Kleinheit von ι gestattet ist, nur die erste Potenz derselben berücksichtigt. Diese Gleichung führt ohne neue Beobachtung zur Kenntniss von ψ_1 oder R, so dass als einzige Unbekannte m_0, μ_0 und höchstens n_0 verbleiben. Drei Spectralbeobachtungen verschiedener Wellenlängen führen daher zur vollständigen Lösung des Problems.

2. Verwickelter wird die Sachlage, wenn ein Himmelskörper mit centralem Kerne vorliegt. Dann ist q^2 unbekannt, und y tritt als Funktion von x, x_0 und q^2 auf. Zu den früheren Unbekannten treten also noch x_0 und q^2. m_0 und μ_0 ergeben auch jetzt die Entropie und hiemit die auf der Oberfläche des Kernes herrschenden Elemente θ_0, s_0, p_0, so dass die Constante des Gasgesetzes wieder bekannt wird. Für die unterste Gasschichte ist natürlich auch n_0 anzugeben.

An der Oberfläche des festen Körpers muss μ_0, h gegeben sein, und ausserdem kommen, wie früher, auch die Grössen r_1, v_1 und R vor, zwischen denen jedoch die Gleichung (11) besteht, so dass die volle Anzahl der Unbekannten 9 beträgt. Diese Zahl kann auf 7 beschränkt werden, insofern (34) eine Beziehung zwischen r_1, s_0 und θ_0 liefert und die DRAPERsche Gleichung auch für diesen Fall besteht.

Da aber die Gase schon bei verhältnissmässig kleinen Drucken ein dem absolut schwarzen Körper nahestehendes Spectrum bilden, so kann noch für die Oberfläche des Kernes $\mu_0 = m_0$ und $h = 0$ gesetzt werden, selbst wenn im Grenzfalle der Kern als Gas betrachtet wird. m_0 ist dann wegen der Identität der Grenzflächen dasselbe Element, welches sich auf die unterste Schichte des Gases bezieht. Die Anzahl der wesentlich Unbekannten ist somit auf 5 reduciert. Im Falle circulare Refraction auftritt, kommen zwar auch die Radien x' und x'' vor, diese sind aber keine neuen Unbekannten, insoferne sie als Minimum und Maximum der Gleichung (85) gegeben sind.

Durch höchstens sechs spectrophotometrische Messungen lässt sich daher das Spectrum eines jeden Fixsternes darstellen, wobei zugleich die Frage Erörterung findet, ob der Stern einen centralen Kern besitze oder nicht.

Diese Resultate sind in vielen Punkten rein formal, weisen aber doch auf die Ziele hin, welche bei der Beobachtung besonders vor Augen gehalten werden sollten. Die eigentlichen Rechnungen bieten nunmehr bloss technische Schwierigkeiten.

10.

UEBER DIE AXENDREHUNG DER FIXSTERNE.

Von R. VON KÖVESLIGETHY,
corr. Mitglied d. ungar. Akademie d. Wiss.

Vorgetragen in der Sitzung der ungar. Akademie 23. Oktob. 1899.

Aus „Math. és Természettud. Értesítö" (Math. und Naturwiss. Anzeiger) Band XVII. pag. 573—588.

Die spectrophotographische Beobachtung der Fixsterne gewährt heutzutage eine Genauigkeit, welche es bereits erlaubt, selbst die Frage nach der Rotationsbewegung dieser Himmelskörper in das Bereich der Untersuchung zu ziehen. ABNEY wies zuerst im Jahre 1877 darauf hin, dass in Folge einer solchen Bewegung sämmtliche Linien des Spectrums beiderseits gleichförmig verwaschen erscheinen müssten, doch war die Erklärung — wie ursprünglich beabsichtigt — auf die Sterne des Typus I.a., in deren Spectren neben sehr feinen Metalllinien nur die Wasserstofflinien verbreitert erscheinen, nicht anwendbar. Solange es sich nur um visuale Beobachtungen handelte, schien jedoch das Spectrum der Sterne vom Typus I.b. sich dieser Erklärung zu fügen, insofern die wenigen Linien dieses Typus genügend gleichförmig erbreitert erscheinen. Wollte man demnach das Spectrum von α Cygni, welches der Annahme ABNEY's noch am ehesten entspricht, auf diese Weise erklären, so müsste einem Aequatorpunkte des Sternes eine Secundengeschwindigkeit von 25 km zuertheilt werden.

Aus den erstaunlich genauen Spectrogrammen der Potsdamer Sternwarte konnte H. C. VOGEL* mit einiger Wahrscheinlichkeit

* Sitzber. d. k. preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1898. 17. Nov. p. 725.

behaupten, dass α Aquilae, und vielleicht ebenso β und δ Leonis und β Cassiopeiae mit Axendrehung begabte Sterne seien, deren Aequatorebene nahezu in die Gesichtslinie falle. Jede Linie im Spectrum des Altair, das übrigens demjenigen der Sonne ziemlich gleicht, ist der ABNEY'schen Hypothese entsprechend erbreitert, so zwar, dass die enger stehenden Linien zu ganzen Banden sich vereinigen. Der Gedanke, dass diese Wirkung einem nahestehenden Begleiter zugeschrieben werden könnte, mit welchem Altair einen spectroscopischen Doppelstern bildet, muss hier zurückgewiesen werden, da die Linienerbreiterung keine Spur von Periodicität aufweist, welche doch nicht fehlen dürfte, wenn es sich um Bewegungen des hellen Sternes um den Schwerpunkt eines zusammengesetzten Systemes handelte.

Zur Zeit ist es zwar noch nicht möglich, aus der Erbreiterung der Linien einen genauen Werth der Rotationsgeschwindigkeit abzuleiten, doch kann diese Grösse nach VOGEL wenigstens der Ordnung nach geschätzt werden. Im Spectrum der Sonne, welchem dasjenige von Altair — wie erwähnt — nahe gleich ist, beträgt das durchschnittliche Linienintervall in dem violetten Theile 0,04 $\mu\mu$. Bei gleichförmiger Vertheilung der Linien genügte daher eine Geschwindigkeit von 13,5 km, um beiderseits gegenseitige Berührung der Linien, und hiermit Bandenbildung hervorzurufen. Da jedoch die Ränder der Linien ausnehmend lichtschwach und daher schwer zu beobachten sind, so kann angenommen werden, dass bei der genannten Geschwindigkeit die Berührung noch nicht constatiert werden könnte. Das Ineinanderfliessen der Linien wird aber zweifellos beobachtet werden können, wenn man für die Geschwindigkeit den doppelten Werth, also etwa 27 km pro Secunde annimmt.

Diese Geschwindigkeit des Altairäquators könnte nun die Eigenthümlichkeit seines Spectrums erklären; sie ist 13mal so gross, als jene der Sonne, und 2mal so gross, als die Rotationsbewegung des Jupiters, also noch immer innerhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeit gelegen.

Angesichts dieser Beobachtungsdaten schien es interessant, auch die theoretische Seite der Frage zu untersuchen, die sich mir übrigens schon früher aufdrängte, als ich das Spectrum ruhen-

der Fixsterne studierte, die ich aber, als noch lange nicht zeitgemäss, wieder fallen lassen zu dürfen glaubte.

Wir denken uns einen gasförmigen, sphäroidischen Himmelskörper, der mit Axendrehung begabt, sonst aber äusseren Kräften nicht unterworfen ist. Im Mittelpunkte desselben nehmen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem an, dessen Z-Axe mit der Drehungsaxe, dessen XY Ebene mit der Aequatorebene zusammenfällt. Der Weltkörper mag entweder seiner ganzen Masse nach gasförmig sein, oder aber er kann centralen Kern besitzen, der — wie bei den Planeten — dichter, oder der — wie bei manchen Nebelflecken — weniger dicht ist, als die umgebende Gashülle. Jedenfalls mag aber — obgleich nur wegen Vereinfachung der Rechnung — angenommen werden, dass der Körper barycentrisch sei. Wesentlich ist diese Einschränkung nicht, doch aller Wahrscheinlichkeit nach genügend begründet, insofern nach Analogie der Sonne Fixsterne mit grosser Abplattung kaum zu erwarten sind.

Unter diesen Voraussetzungen sei g_1 und g die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche des Sternes und der Erde, u das Verhältniss der Schwere in der Entfernung r vom Centrum des Sternes und an dessen Oberfläche. Sei s weiter die Schwere des Stoffes per Volumeneinheit an der Erdoberfläche gemessen und p der Druck, beide in der Entfernung r vom Sterncentrum. Bedeutet noch ω die Winkelgeschwindigkeit, also

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo T die Dauer der Axendrehung ist, so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{s}{g}\left(g_1 u \frac{x}{r} - \omega^2 x\right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{s}{g}\left(g_1 u \frac{y}{r} - \omega^2 y\right) \quad \ldots \ldots \quad (2) \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\frac{s}{g} g_1 u \frac{z}{r}, \end{aligned}$$

und nach dem NEWTON'schen Gesetze für barycentrische Körper:

$$u = \frac{m r_1^2}{M r^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

falls m die in der Kugel vom Radius r, M die ganze, in der Vollkugel mit dem Radius r_1 enthaltene Masse bezeichnet.

Differenziert man das Gleichungssystem (2) und eliminiert man mittels (3) und den hieraus abzuleitenden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{xs}{r} - \frac{2x}{r^2}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{ys}{r} - \frac{2y}{r^2}u$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4\pi r_1^2}{M}\frac{zs}{r} - \frac{2z}{r^2}u$$

sowohl u, als dessen Differentialquotienten, so gelangt man zu dem folgenden System:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(3\frac{x}{r^2} - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{g}\left(\frac{4\pi r_1^2 g_1}{M}s^2 - 3s\omega^2\right)\frac{x^2}{r^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \left(3\frac{y}{r^2} - \frac{1}{y}\right)\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{g}\left(\frac{4\pi r_1^2 g_1}{M}s^2 - 3s\omega^2\right)\frac{y^2}{r^2} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left(3\frac{z}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{s}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{4\pi r_1^2 g_1}{Mg}s^2\frac{z^2}{r^2} = 0.$$

Da hier ausser p auch s als unabhängige Variabele vorkommt, so bestimmt der mechanische Gleichgewichtszustand nicht zugleich auch den thermischen; der letztere kann vielmehr noch ganz willkürlich gewählt werden. Setzt man $\omega = 0$, so zieht sich das Gleichungssystem in eine einzige Gleichung zusammen, die bereits bei früherer Gelegenheit gegeben wurde. (pag. 139.)

Die Integration der vorliegenden Gleichungen kann erst bewerkstelligt werden, wenn ein Zusammenhang zwischen p und s gegeben ist, das heisst, wenn der thermische Zustand des Weltkörpers bekannt ist. Während also das bloss durch das System (4) gegebene mechanische Gleichgewicht auf unendlich viele Arten befriedigt werden kann, gibt es nur ein Gleichgewicht, welches auch in thermischem Sinne als solches betrachtet werden darf.

Auf Grund der in der angezogenen Abhandlung dargelegten Schlüsse kann der Gleichgewichtszustand auch in diesem Falle als isentrop bezeichnet werden. Dann bestehen die POISSON'schen Gleichungen:

$$p = p_0\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{n+1} \quad \text{und} \quad s = s_0\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^n, \quad \text{wenn} \quad \frac{1}{k-1} = n. \quad (5)$$

Hierbei beziehen sich die mit dem Indexe 0 versehenen Grössen auf den Mittelpunkt des Weltkörpers, oder — falls ein centraler Kern vorhanden wäre — auf die Oberfläche dieses Kernes. θ ist die absolute Temperatur, und $k = \frac{c_p}{c_v}$ das Verhältnis der specifischen Wärmen bei constantem Druck und constantem Volumen.

Mit Hülfe dieser Gleichungen berechnet sich die absolute Temperatur im Punkte (x, y, z) aus dem Systeme:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \left(3\frac{x}{r^2} - \frac{1}{x}\right)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \left(\frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\theta^n - \frac{3\omega^2}{c_p g}\right)\frac{x^2}{r^2} = 0\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \left(3\frac{y}{r^2} - \frac{1}{y}\right)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \left(\frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\theta^n - \frac{3\omega^2}{c_p g}\right)\frac{y^2}{r^2} = 0 \qquad (6)\\
&\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + \left(3\frac{z}{r^2} - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0}{(n+1)Mg\theta_0^{n-1}p_0}\theta^n\frac{z^2}{r^2} = 0.
\end{aligned}$$

Es ist jedoch einfacher, relative Maasse einzuführen; sei also

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \vartheta; \quad \frac{x}{r_1} = \xi; \quad \frac{y}{r_1} = \eta; \quad \frac{z}{r_1} = \zeta; \quad \frac{r}{r_1} = \varrho, \qquad (7)$$

so gelangt man zu folgendem definitiven Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\xi^2} + \left(3\frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi} + \left(q^2\vartheta^n - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g\theta_0}\right)\frac{\xi^2}{\varrho^2} = 0\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\eta^2} + \left(3\frac{\eta}{\varrho^2} - \frac{1}{\eta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\eta} + \left(q^2\vartheta^n - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g\theta_0}\right)\frac{\eta^2}{\varrho^2} = 0 \qquad (8)\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\zeta^2} + \left(3\frac{\zeta}{\varrho^2} - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta} + q^2\vartheta^n\frac{\zeta^2}{\varrho^2} = 0,
\end{aligned}$$

in welchem ebenso, wie in der bereits citierten Abhandlung

$$q^2 = \frac{4\pi r_1^2 g_1 s_0^2}{(n+1)Mgp_0}, \qquad (9)$$

was auch in die Form

$$q^2 = \frac{4\pi(k-1)a^2}{kE}\cdot\frac{r_1^2 s_0^2}{p_0} \qquad (9')$$

gebracht werden kann, worin E die Masse, a den mittleren Radius der Erde bedeutet.

Das Gleichungssystem (8) kann bei allgemein belassenem n nicht integriert werden; nur die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $n = 5$ geben geschlossene Integrale, wobei sich jedoch der letztere Fall

auf die Zusammenschrumpfung des Weltkörpers in einen einzigen Punkt bezieht.

Die auftretenden Verhältnisse lassen sich jedoch schon ganz klar durch die Behandlung der Fälle $n = 0$ und $n = 1$ überblicken.

1. Ist $n = 0$ oder $k = \infty$, was im Sinne der POISSON'schen Gleichungen einem isopleren oder homogenen Weltkörper entspricht, so lautet die Lösung der Gleichungen (8):

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= A + \frac{B}{\varrho} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\xi^2, \\ \vartheta_\eta &= C + \frac{D}{\varrho} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\eta^2, \quad \ldots \quad (10) \\ \vartheta_\zeta &= E + \frac{F}{\varrho} - \tfrac{1}{6} q^2 \zeta^2, \end{aligned}$$

in welchen die Indices ξ, η, ζ auf die längs der betreffenden Axen gemessene relative Temperatur hinweisen. Die Grössen $A, B, \ldots F$ bezeichnen die nöthige Anzahl willkürlicher Constanten, deren Bestimmung wesentlich davon abhängt, ob der Weltkörper centralen Kern besitzt oder nicht.

Ist ein fester oder flüssiger Kern oder entsprechender Hohlraum nicht vorhanden, so ist die centrale Temperatur θ_0, die relative Temperatur des Mittelpunktes, also eins. Man hat daher:

$$\vartheta = 1 \quad \text{für} \quad \xi = \eta = \zeta = 0, \quad \text{also auch für} \quad \varrho = 0.$$

In jedem Punkte der Oberfläche ist die Temperatur des Körpers nahezu jener des Raumes gleich, kann also sehr nahe zu Null angenommen werden. Es ist sohin

$\vartheta = 0$ sowohl unter dem Aequator, also für $\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{r_1^2}$, und $\zeta = 0$;

als auch unter den Polen, also für $\xi = \eta = 0$ und $\zeta = \frac{b}{r_1}$,

vorausgesetzt, dass a und b den Aequator- und Polhalbmesser des Himmelskörpers bedeuten.

Da in dem Mittelpunkte des Sphäroides die Temperatur endlich bleiben soll, so muss vor Allem

$$B = D = F = 0, \quad \ldots \quad (11)$$

und der weiteren Bestimmung halber

$$A = C = E = 1 \quad \ldots \quad (11')$$

sein. Die Gleichungen (10) können daher kürzer in der Form

$$\vartheta = 1 - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(\xi^2 + \eta^2) - \frac{q^2}{6}\xi^2 \quad \cdots \quad (12)$$

geschrieben werden.

Da die für den Mittelpunkt getroffene Bestimmung die zur Verfügung stehenden willkürlichen Constanten schon erschöpft hat, so legt die zweite Grenzbedingung eine Bedingungsgleichung zwischen den Grössen des Problems fest. Es besteht nämlich für den Aequator die Gleichung

$$1 - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\frac{a^2}{r_1^2} = 0, \quad \cdots \quad (13)$$

und ähnlich für den Pol:

$$1 - \tfrac{1}{6} q^2 \frac{b^2}{r_1^2} = 0. \quad \cdots \quad (14)$$

In allen diesen Gleichungen bedeutet natürlich r_1 den Radius jener Kugel, welche mit dem gegebenen Sphäroid gleichen Inhalt hat. Es ist somit die Abplattung mit α bezeichnend:

$$r_1^3 = a^2 b = a^3(1 - \alpha), \quad \cdots \quad (15)$$

und dem zufolge:

$$\frac{a}{r_1} = (1 - \alpha)^{-\frac{1}{3}}, \quad \text{und} \quad \frac{b}{r_1} = (1 = \alpha)^{\frac{2}{3}}. \quad \cdots \quad (16)$$

Durch Einführung dieser Werthe in (13) und (14) kommt

$$\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(1 - \alpha)^{-\frac{2}{3}} = 6, \quad \text{und} \quad q^2(1 - \alpha)^{\frac{2}{3}} = 6, \quad (17)$$

oder nach Elimination von q^2:

$$(1 - \alpha)^{-2} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2 c_p g \theta_0}(1 - \alpha)^{-\frac{2}{3}} = 1, \quad \cdots \quad (18)$$

was bei Vernachlässigung des Quadrats und höherer Potenzen von α zu der Form

$$\alpha = \frac{\omega^2 r_1^2}{4 c_p g \theta_0} \quad \cdots \quad (19)$$

führt. Die Abplattung erscheint hier unter anderer Gestalt, als bei NEWTON oder CLAIRAUT, welche in deren Ausdruck nur mechanisch definierte Werthe einführen. Es soll jedoch später

gezeigt werden, dass auch die Gleichung (19) ohne Schwierigkeit in die übliche Form gebracht werden kann.

Der Zähler des Ausdruckes ist das Quadrat der linearen Aequatorgeschwindigkeit, also eine aus der Verschiebung der Fraunhoferschen Linien spectroscopisch beobachtbare Grösse. Und da die spectralphotometrische Beobachtung des Sternes einerseits zur Kenntniss der Mittelpunktstemperatur, anderntheils durch die Kenntniss der stofflichen Zusammensetzung auch zum Werthe der Grösse c_p führt, so kann die Abplattung ganz auf rein spectralanalytischem Wege bestimmt werden. Da endlich auf diesem Wege auch der Radius des Himmelskörpers bekannt wird*, so kann das aus Beobachtungen abgeleitete Product ωr_1 in die einzelnen Factoren zerlegt werden, was mit Hülfe der Gleichung (1) auch zur Dauer der Rotation führt.

II. Ist in einem zweiten Falle $n = 1$, oder $k = 2$, so lautet die Lösung des Gleichungssystemes (8):

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= A\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + B\frac{\cos q\varrho}{q\varrho} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0}, \\ \vartheta_\eta &= C\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + D\frac{\cos q\varrho}{q\varrho} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (20) \\ \vartheta_\zeta &= E\frac{\sin q\varrho}{q\varrho} + F\frac{\cos q\varrho}{q\varrho}. \end{aligned}$$

Für ihrer ganzen Masse nach gasförmige Himmelskörper bestehen dieselben Grenzbedingungen, wie in I. Man hat daher wieder

$$B = D = F = 0 \quad \text{und} \quad A = C = E = 1 \quad \cdot \cdot \quad (21)$$

wegen der Mittelpunktsbedingung

$$\vartheta_\xi = \vartheta_\eta = \vartheta_\zeta = 1 \quad \text{für} \quad \xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0.$$

Die Oberflächenbedingung giebt für den Aequator

$$\vartheta_\xi = \vartheta_\eta = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = \frac{a}{r_1} = (1-\alpha)^{-\frac{1}{3}},$$

und für den Pol

$$\vartheta_\zeta = 0, \quad \text{wenn} \quad \varrho = \frac{b}{r_1} = (1-\alpha)^{\frac{2}{3}}.$$

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 163.

Es folgt hieraus für (20)

$$\frac{\sin q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q\,(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{3\,\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g \theta_0} \quad \text{und} \quad q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}} = \pi, \quad (22)$$

oder nach Elimination von q:

$$\frac{\sin \pi\,(1-\alpha)^{-1}}{\pi\,(1-\alpha)^{-1}} = -\frac{3\,\omega^2 r_1^2}{\pi^2 c_p g \theta_0}(1-\alpha)^{\frac{4}{3}}, \quad \ldots \quad (23)$$

oder nur die erste Potenz von α beibehaltend:

$$\alpha = \frac{3\,\omega^2 r_1^2}{\pi^2 c_p g \theta_0}, \quad \ldots \quad (24)$$

welcher Ausdruck bis auf die nur von n, also auch von k abhängige Constante mit (19) identisch ist. Für $n = 0$ betrug dieser Factor 0,25, in dem jetzigen Falle wird er $\frac{3}{\pi^2} = 0.304$.

Man ist nun wohl berechtigt, ganz allgemein zu schreiben

$$\alpha = K\frac{\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}, \quad \ldots \quad (25)$$

wenn die Constante K eine bei isentropem Gleichgewichte nur von dem Verhältnisse der beiden specifischen Wärmen abhängige Grösse bedeutet. Allgemeiner könnte man sagen, dass K nur von der Art des thermischen Gleichgewichtes der Weltkugel abhänge. Bei beliebigem n kann deren Werth nur durch numerische Ausrechnung der Gleichungen (8) angegeben werden.

Die zweite der Gleichungen (17) und (22) enthält eine interessante Thatsache, welche schon dadurch ausgesprochen ist, dass die eine der beiden nothwendigen Grenzbedingungen des Problems die Bestimmung der willkürlichen Constanten besorgt. Ist nämlich ω und α der Null gleich, so nimmt q^2 einen vorgeschriebenen, nur von dem Verhältniss der beiden specifischen Wärmen abhängigen Werth an. In ihrer ganzen Masse gasförmige Weltkörper bilden daher ihrem Zustande und ihren Dimensionen nach nicht Individuen, sondern ganze Classen, deren Charakteristik nur von der Art des thermischen Zustandes und dem Verhältniss der beiden specifischen Wärmen, also auch der molecularen Zusammensetzung des Gases abhängt. Dieser dem Gesagten nach in der Gleichung (9') ausgesprochene Satz, den ich in der mehrfach er-

wähnten Abhandlung* abgeleitet, ist für einen speciellen Fall schon von ZÖLLNER ausgesprochen und für den isothermen Zustand von RITTER behauptet worden.

Besitzt der Himmelskörper Axendrehung, so ist zwar nicht q selbst, immerhin aber den erwähnten zwei Gleichungen zufolge

$$q\,(1-\alpha)^{2/3} = \text{constant}, \quad \cdots\cdots \quad (26)$$

was mit Rücksicht auf (9′) auch in der Form

$$\frac{r_1 s_0}{\sqrt{p_0}}\,(1-\alpha)^{2/3} = \text{const.} \quad \cdots\cdots \quad (26')$$

geschrieben werden kann. Es bilden also auch rotierende Himmelskörper keine Individuen, sondern nur Classen, und es scheint, dass der Abplattungsexponent von dem Werthe von n, der molecularen Zusammensetzung des Stoffes unabhängig ist.

Der Ausdruck (25) der Abplattung kann leicht so umgeformt werden, dass darin nur mechanisch definierte Werthe vorkommen. Bedeutet v das Volumen der Masseneinheit, so kann die durch dieselbe aufgenommene Wärmemenge durch die Gleichung

$$dQ = c_p d\theta - v dp \quad \cdots\cdots \quad (27)$$

ausgedrückt werden. Betrachtet man den Körper auch weiter als barycentrisch, so besteht die hydrodynamische Grundgleichung in der Form:

$$v dp = -\frac{g_1}{g}\,u dr, \quad \cdots\cdots \quad (28)$$

was — isentropen Zustand vorausgesetzt — in die vorhergehende Gleichung eingeführt, ergiebt:

$$0 = c_p d\theta + \frac{g_1}{g}\,u dr. \quad \cdots\cdots \quad (29)$$

Ist die Temperatur im Centrum der Kugel θ_0 und 0 an der Oberfläche, so ist

$$c_p \theta_0 = \frac{g_1}{g}\int_0^{r_1} u dr, \quad \cdots\cdots \quad (30)$$

wobei jedoch das Integral nur dann berechnet werden kann, wenn die Massenvertheilung im Innern des Körpers bekannt ist. Das würde die Integration der Zustandsgleichung (8) nöthig machen,

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 144.

doch gelangt man einfacher zum Ziele. Einem bekannten Satze der Integralrechnung zufolge, der hier Anwendung finden kann, lässt sich ein geeigneter Mittelwerth von u zwischen den Grenzen 0 und r_1 vor das Integral heben, so dass man statt (30) erhält:

$$c_p \theta_0 = \varepsilon \frac{g_1}{g} r_1, \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

wobei ε für alle Gaskugeln gleicher Molecularstructur im isentropen Zustande dasselbe bleibt. Zur näheren Bestimmung dieses ε gehen wir von der Gleichung (9) aus, welche wegen der Bedeutung von n und laut des Gesetzes von BOYLE-GAY-LUSSAC auch in der Form

$$q^2 = \frac{4 \pi r_1^4 g_1 s_0}{c_p \theta_0 g M}$$

geschrieben werden kann. Führt man die mittlere Dichte (s) der Gaskugel ein, so kommt unter Rücksicht auf (31):

$$q^2 = \frac{3 s_0}{\varepsilon (s)} \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Es sei nun y das Integral der Zustandsgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + q^2 y^n = 0,$$

so wird

$$(s) = 3 s_0 \int_0^1 x^2 y^n dx,$$

und infolge dessen

$$\frac{1}{\varepsilon} = q^2 \int_0^1 x^2 y^n dx. \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Ist also $n = 0$ und daher $q^2 = 6$, so hat man

$$y = 1 - x^2$$

und es wird

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}.$$

Ist dagegen $n = 1$, mithin $q = \pi$ und

$$y = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

so hat man $\varepsilon = 1$. Für zweiatomige Gase $(k = 7/5)$ ergiebt die mechanische Quadratur etwa $\varepsilon = 2.4$, wie schon RITTER fand.

Mit Hülfe von (31) kann nun (25) in der bekannteren Form:

$$\alpha = \frac{K}{\varepsilon}\frac{\omega^2 r_1}{g_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

geschrieben werden, welche nun der NEWTON'sche Ausdruck der Abplattung ist. Misst man c_p, das bisher als in mechanischem Masse gegeben gedacht wurde, im Wärmemaasse, so wird die Gleichung (34)

$$\alpha = 424\,\frac{K}{\varepsilon}\frac{\omega^2 r_1}{g_1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Für incompressibele Flüssigkeiten, sowie für die Erde hat man

$$424\,\frac{K}{\varepsilon} = 1$$

nahezu, insofern als die Abplattung der Erde als das Verhältniss der äquatorealen Centrifugalbeschleunigung zu der Beschleunigung der Schwere dargestellt werden kann.

Insofern die Sonne ein Fixstern ist, der so der chemischen Zusammensetzung, als seinem Spectraltypus nach mit α Aquilae in naher Verwandtschaft steht, kann die Gleichung (35) auch auf die Sonne Anwendung finden. Die Discussion sämmtlicher Heliometermessungen der Sonne führen nach AUWERS zu einer Abplattung von $\alpha = \frac{1}{50000}$. Hiermit wird die Constante der Gleichung (35) empirisch bestimmt:

$$424\,\frac{K}{\varepsilon} = 0.943,$$

also innerhalb der Unsicherheit der Bestimmung der Sonnenabplattung wieder 1. Hiermit wird die Abplattung eines Sternes von gleicher chemischer Beschaffenheit und gleichem Spectraltypus mit der Sonne:

$$\alpha = 0{,}0056\,\frac{\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Diese Untersuchungen erleiden eine durchgreifende Modification, wenn der gegebene Weltkörper nicht in seiner ganzen Masse gasförmig ist. Denken wir uns, es wäre ein kugelförmiger fester, flüssiger oder einen Hohlraum bildender Kern vorhanden. Ist dessen Radius r_0, und bezeichnet Kürze halber

$$\frac{x_0}{r_1} = \xi_0; \quad \frac{y_0}{r_1} = \eta_0; \quad \frac{z_0}{r_1} = \zeta_0; \quad \frac{r_0}{r_1} = \varrho_0, \quad \ldots \quad (37)$$

so werden z. B. im Falle $n = 0$ die Grenzbedingungen für die Gleichungen (10) an der Oberfläche des Kernes:

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi &= 1, \quad \text{für} \quad \xi = \varrho = \varrho_0 \\ \vartheta_\eta &= 1, \qquad\quad \eta = \varrho = \varrho_0 \\ \vartheta_\zeta &= 1, \qquad\quad \zeta = \varrho = \varrho_0, \end{aligned}$$

während für die äussere Oberfläche, wie früher die Bedingung

$$\begin{aligned} \vartheta_\xi = \vartheta_\eta = 0 \quad &\text{für} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a}{r_1} \\ \vartheta_\zeta = 0 \quad &\text{für} \quad \zeta = \frac{b}{r_1} \end{aligned}$$

besteht. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= A + \frac{B}{\varrho_0} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)\varrho_0^2 \\ 1 &= E + \frac{F}{\varrho_0} - \tfrac{1}{6} q^2 \varrho_0^2 \\ 0 &= A + B(1-\alpha)^{\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{6}\left(q^2 - \frac{3\omega^2 r_1^2}{c_p g \theta_0}\right)(1-\alpha)^{-\frac{2}{3}} \\ 0 &= E + F(1-\alpha)^{-\frac{2}{3}} - \tfrac{1}{6} q^2 (1-\alpha)^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \tag{38}$$

und ganz ähnlich gebaute Gleichungen, wenn man aus dem Falle $n = 1$ der Gleichungen (20) ausgegangen wäre:

$$\begin{aligned} 1 &= A\frac{\sin q\varrho_0}{q\varrho_0} + B\frac{\cos q\varrho_0}{q\varrho_0} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0} \\ 1 &= C\frac{\sin q\varrho_0}{q\varrho_0} + D\frac{\cos q\varrho_0}{q\varrho_0} \\ 0 &= A\frac{\sin q(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} + B\frac{\cos q(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}}{q(1-\alpha)^{-\frac{1}{3}}} + \frac{3\omega^2 r_1^2}{q^2 c_p g\theta_0} \\ 0 &= C\frac{\sin q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}}{q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}} + D\frac{\cos q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}}{q(1-\alpha)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned} \tag{39}$$

Diese Gleichungen genügen zwar zur Bestimmung der auftretenden Integrationsconstanten, bedingen aber keinen Zusammenhang mehr zwischen den ursprünglichen Grössen des Problems. Weltkörper mit dem minimalsten festen, flüssigen oder hohlen Kerne bilden daher keine Classen mehr, sondern jeder für sich stellt ein in seinen Abmessungen und seinen Zustandsgrössen ganz selbständiges Einzelwesen dar. Dieser Unterschied ist jedenfalls für manche planetarische Nebel von Wichtigkeit.

Es wäre zwecklos, mittels der Gleichungen (38) und (39) die Integrale (10) und (20) umformen zu wollen. Es möge nur erwähnt werden, dass sich die Temperaturen derselben Raumstelle in rotierender und ruhender Gaskugel um Grössen von der Ordnung der Abplattung unterscheiden, die wenigstens heute noch durchaus vernachlässigt werden dürfen.

Mit der bisher angestrebten Genauigkeit kann sogleich das System (8) integriert werden. Bedeutet ϑ und ϑ_0 die relative Temperatur an demselben Punkte des Raumes in der rotierenden und ruhenden Kugel, und ist

$$\vartheta - \vartheta_0 = \tau \quad \cdots \quad (40)$$

eine kleine Grösse von der Ordnung der Abplattung, von der nur die erste Potenz berücksichtigt zu werden braucht, so erhält man durch Einsetzung in die Gleichung (8) und unter Berücksichtigung, dass ϑ_0 dem Werthe $\omega = 0$ entspricht, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2} + \left(3\frac{\xi}{\varrho^2} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\xi} + nq^2\vartheta_0^{n-1}\tau\frac{\xi^2}{\varrho^2} = 0 \quad \cdots \quad (41)$$

und durch Vertauschung der Buchstaben ξ in η und ζ ganz ähnliche Gleichungen für die anderen Coordinaten.

Es ist nun hierin

$$\frac{\partial\tau}{\partial\xi} = \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial\tau}{\partial\xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2\tau}{\partial\xi^2} = \frac{\xi^2}{\varrho^2}\frac{\partial^2\tau}{\partial\varrho^2} + \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\xi^2}{\varrho^3}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\varrho}, \quad \cdots \quad (42)$$

und hiermit gehen die Gleichungen (41) in die gemeinsame Form

$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial\tau}{\partial\varrho} + nq^2\vartheta_0^{n-1}\tau = 0 \quad \cdots \quad (43)$$

über, welche bezeugt, dass bis zu Grössen von der Ordnung α^2 der Temperaturunterschied in rotierender und ruhender Gaskugel von der Richtung unabhängig ist.

Für zweiatomige Gase ($n = 2.5$) kann mit einiger Näherung*

$$\vartheta = 1 - \varrho \quad \cdots \quad (44)$$

gesetzt werden. Es wird hiermit (43)

* Ueber das Spectrum der Himmelskörper. S. oben pag. 155.

$$\frac{d^2\tau}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + nq^2(1-\varrho)^{n-1}\cdot\tau = 0, \quad \cdots \quad (45)$$

oder wenn

$$y = \varrho\tau, \quad \text{und} \quad x = 1 - \varrho \quad \cdots \quad (46)$$

gesetzt wird, einfacher

$$\frac{d^2y}{dx^2} + nq^2x^{n-1}y = 0, \quad \cdots \quad (47)$$

welche Gleichung leicht integriert werden kann, um ein anschauliches Bild von dem Temperaturunterschiede in rotierenden und ruhenden Weltkugeln zu gewinnen.

11.

DAS DIAPHRAGMA IN DEM MARKE DER DICOTYLEN HOLZGEWÄCHSE.

Von Dr. ALEX. MAGÓCSY-DIETZ,
corr. Mitgl. d. ungar. Akademie d. Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der Akademie am 19. April 1898.

Aus „Math. és Természettud. Értesitö" (Math. u. Naturwiss. Anzeiger) Band XVII. pag. 1—43.

Einen wesentlichen Theil der botanischen Forschungen bilden diejenigen physiologisch-anatomischen Forschungen, welche den Zusammenhang zwischen der anatomischen Construction der Pflanzen und zwischen deren Lebensthätigkeit erforschen. Es ist unleugbar und der Erfolg bisheriger zahlreicher Forschungen beweist es, dass zwischen den physiologischen und anatomischen Eigenschaften ein enger Zusammenhang besteht.* Zum Nachweis dieses Zusammenhanges ist einestheils die experimentale Physiologie, andererseits die vergleichende Anatomie berufen; in vielen Fällen gelingt es nur mit Hülfe des beiderseitigen Beweises, den erwähnten Zusammenhang nachzuweisen.

Auf diese Grundsätze gestützt habe ich versucht, die eigenthümliche Eigenschaft einiger dicotyler Holzgewächse aufzuklären. Bei einigen dicotylen Holzgewächsen nämlich, z. B. bei Vitis ist das Mark scheinbar nicht continuierlich, wie es bei den Dicotyledonen allgemein bekannt ist, sondern es ist durch entsprechende

* M. Westermayer u. H. Ambronn: Beziehungen zwischen Lebensweise und Structur der Schling- und Kletterpflanzen. Flora 64. Jahrg. 1881. pag. 417.

stärkere Gewebeschichten, durch sogenannte Diaphragmen unterbrochen (Fig. 1—11), bei einigen ist diese Unterbrechung des Markgewebes ganz unabhängig von der Knotenstelle (Fig. 12).

Die Eigenthümlichkeit dieser Construction des Markes erwähnen schon DUHAMEL DU MONCEAU* und DUPETIT-THOUARS**, ohne sich jedoch mit dessen genauer anatomischen Construction und mit dessen Verbreitung in der Reihe der Pflanzen befasst zu haben.

ARTHUR GRIES***, dessen Beobachtungen sich gleichfalls hierauf erstrecken und sogar die physiologische Rolle des Markes umfassen, behandelt kurz auch die physiologische Function dieser Construction des Markes. A. PRUNET† befasst sich im Allgemeinen vorzüglich aus letzterem Gesichtspunkte mit dem Marke in den Knoten und dessen eigenthümlicher Construction.

Dass diese eigenthümliche Construction des Markes in erster Reihe den Pflanzen als Reserve-Nahrungsbehälter dient, ist in Kürze das Resultat der Untersuchungen jenes Forschers.

Die Richtigkeit des Resultates jener ausgezeichneten Forscher bereitwilligst anerkennend, konnte ich mich damit doch nicht gänzlich zufrieden geben, einfach deshalb, weil die Bildung dieser Markconstruction und das Vorkommen derselben auf den ersten Blick schon darauf hindeutet, dass sie nebst Anhäufung von Reserve-Nahrungsstoffen auch noch zu einer andern physiologischen Funktion im Pflanzenleben berufen sei.

I. Die äusseren Verhältnisse der Diaphragmen.

Das Mark der dicotylen Holzgewächse bildet entsprechend der Gewebe-Differenzierung der dicotylen Pflanzen einen centralen

* Physiques des arbres I pars p. 34. 1758.

** Histoire d'un morceau de bois. 1815.

*** Memoire sur la moelle des plantes ligneuses. Nouv. archives du Museum d'histoire naturelle de Paris. T. VI 1870, pag. 201—294 und im Auszuge der Annales des sciences naturelles. Ser. V. T. XIV. Paris 1872, pag. 34—79.

† Recherches sur les noeuds et les entre-noeuds de la tige des dicotyledons. Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 302. Im Auszuge in Comptes rendus hebd. des séances de l'Acad. des sciences. T. CX jan. — juin 1890.

Cylinder, welcher sich durch die ganze Länge des Pflanzenstengels erstreckt. Bei den meisten Pflanzen scheint das Mark ganz gleichartig zu sein, denn es besteht ja das Mark der meisten Pflanzen mit wenig Ausnahme aus so ziemlich gleichförmigen polyedrisch geformten Parenchym-Zellen, welche sich in der Länge des Stengels grösstentheils in Reihen placieren, dünnwandig oder nur wenig verdicktwandig sind, hier und dort gewöhnlich sehr geräumige rundlich-eiförmige Tüpfel aufweisen und zum Theile von kleinen Intercellular-Gängen von einander geschieden sind. Die Markzellen enthalten in ihrer Jugend ausser Cytoplasma reichlich Wasser mit darin aufgelösten Kohlehydraten, ja sogar noch andere nicht wesentliche Bestandtheile, in der Ruheperiode der Vegetation aber eine grosse Menge Stärkemehl. Es sind zahlreiche dicotyle Pflanzen, bei denen das Mark in seiner ganzen Ausdehnung seine Lebensfähigkeit behält, in diesem Falle werden seine Zellen oft dickwandig, aber sie behalten ihre ursprüngliche Gestalt und sämmtliche lebende Zellen enthalten den Winter über, d. h. in der Ruhe-Zeitperiode der Pflanzen, Reserve-Nahrungsstoff und wenig Wasser, in der Vegetationszeit aber reichlicher oder nur ausschliesslich Wasser*, z. B. Quercus, Betula, bei Fraxinus sogar noch das 20jährige Mark.**

Wieder bei andern verliert das Mark schon gegen das Ende des ersten Jahres seine Lebensfähigkeit, der Inhalt seiner Zellen verschwindet und die Markzellen enthalten nur Luft, sind höchstens noch zur Transportierung des Wassers auf mechanische Art geeignet und halten das statische Gleichgewicht in den verschiedenen Theilen des Stengels aufrecht.*** Im Uebrigen aber haben sie dann ihre physiologische Rolle beendigt, ihr Gewebe ist abgestorben.

So ist es in den Fällen, wo das Mark aus ganz homogenen Zellen besteht. Ja, es geschieht in solchen Pflanzen, dass zufolge Dehnung der Stengelglieder ein grosser Theil der Markzellen, welche ihr Theilungsvermögen verloren haben, nach und nach

---

* Prunet: Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 330—331.

** Gries: Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. pag. 31.

*** D'Arbaumont: La tige des Ampelidées. Ann. d. sc. nat. S. VI. T. XI. pag. 206.

zerreisst und das Mark selbst als zerrissen erscheint, z. B. Juglans, Paulownia (Fig. 11), oder es geht gänzlich verloren, und es entsteht an Stelle des Markes in dem Stengel eine leere Röhre, z. B. Lonicera. So verhält es sich vorzüglich mit den Marktheilen in den Internodien der Stengel.

Eine hievon etwas abweichende anatomische Construction besitzt im Allgemeinen jener Marktheil des Stengels, welcher in den Knoten auftritt. Schon GRIES* hat das nodale und internodale Mark unterschieden.

In dem Marke sehr vieler Pflanzen, sowohl in dem der Knoten als auch in dem der Internodien, kommen auch andere von den gewöhnlichen Parenchymzellen abweichende Zellen vor (heterogenes Mark); unter diesen sind solche, welche Krystalle führen, ferner solche, die Stärke oder Gerbsäure enthalten, aber auch solche finden sich in grosser Anzahl, die vorzüglich durch Verdickung ihrer Zellenwände auffallen; diese letzteren sind ganz sklereidartig. Sie entstehen in dem Marke einzelner Pflanzen nur einzeln in kaum bemerkbarer Menge, in anderen Fällen kommen sie schon in grösserer Menge vor und bilden ganze Zellennester**, endlich können sie auch in einer solch' grossen Menge auftreten, dass sie eine in die Quere des Markes stehende, bald kleinere, bald grössere Scheidewand bilden und auf diese Weise gleichsam die Continuität des gleichartig construierten Markes unterbrechen. Solche aus abweichend gebildeten Zellen bestehende Gewebe, Platten, Markscheidewände können sowohl in dem internodalen, wie in dem nodalen Marke vorkommen; so finden wir internodale Diaphragmen in dem Marke des Liriodendron (Fig. 12). Im grössten Maasse erreichen sie aber ihre Entwickelung in den Knoten, wo sie dann mehr oder weniger dicke Diaphragmen bilden. Meine jetzige Abhandlung umfasst nur die Resultate jener meiner Forschungen, welche sich auf die gut entwickelten, dem freien Auge sichtbaren nodalen Diaphragmen beziehen.

In den Knoten befindliche Diaphragmen hat GRIES*** in

* l. c. p. 43.

** Dr. J. WIESNER: Elemente d. Anat. u. Physiologie II. Aufl. Wien 1885. pag. 144.

*** l. c. p. 53.

folgenden Pflanzen constatiert: Ficus Carica, Ulmus campestris, Vitis vinifera, Clematis Flammula, Lonicera Xylosteum, L. fragrantissima, Abelia rupestris, Berberis macrophylla, Malus communis; zusammen in 9 Pflanzen. Unter diesen konnte ich aber das auch mit freiem Auge sichtbare Diaphragma bei Ulmus campestris, Berberis macrophylla, Malus communis in den mir zu Gebote stehenden Pflanzen nicht finden. Dagegen habe ich unter mehreren hundert von mir untersuchten dicotylen Holzgewächsen in den nachstehend Aufgezählten deutlich sichtbare und gut entwickelte Knotendiaphragmen gefunden:

1. Abelia rupestris LINDL.
2. Broussonetia papyrifera VENT.
3. Clematis Flammula L.
4. „ tubulosa TURCZ.
5. „ Vitalba L.
6. Coronilla emeroides BOIS. et SPREN.
7. Deutzia crenata S. et Z.
8. „ gracilis S. et Z.
9. „ scabra THUNB.
10. Ficus Carica L.
11. „ ulmifolia LAM.
12. Forsythia Fortunei LINDL.
13. „ suspensa VAHL.
14. „ viridissima LINDL.
15. Leycesteria formosa WALL.
16. Lonicera Alberti REG.
17. „ alpigena L.
18. „ bella ZABEL.
19. „ brachypoda Dl.
20. „ Caprifolium L.
21. „ chrysantha TURCZ.
22. „ fragrantissima CARR.
23. „ gibbosa W.
24. „ hispida PALL.
25. „ iberica M. B.
26. „ Ledebouri ESCHSCH.
27. „ Kamschatica HORT.

28. Lonicera japonica THUNBG.
29. „ occidentalis HOOK.
30. „ orientalis LAM.
31. „ Periclymenum L.
32. „ pyrenaica L.
33. „ Ruprechtiana REG.
34. „ tatarica L.
35. „ Xylosteum L.
36. Paulownia tomentosa K. KOCH.
37. Philadelphus pubescens LOIS.*
38. Symphoricarpus orbiculatus MÖNCH.
39. „ racemosus MICHX.
40. „ vulgaris L.
41. Vitis Berlandieri PLANCH.
42. „ cinerea ENGELM.
43. „ cordifolia MICHX.
44. „ ficifolia BUNGE.
45. „ Labrusca L.
46. „ riparia MICHX.
47. „ rupestris SCHEELE.
48. „ Solonis ENGELM.
49. „ vinifera L.

zusammen in 49 Arten. Ich bemerke jedoch, dass ich nur jen meine Aufmerksamkeit gewidmet habe, von welchen ich lebend Material untersuchen konnte, das Knotendiaphragma kommt ab noch bei viel mehr Pflanzen vor, denn DIPPEL** und KOEHNE*

---

* Es ist auffallend, dass sich in dem Budapester botanischen Gart an den zahlreichen Philadelphus-Arten kein Diaphragma entwickelt h eine Ausnahme macht nur pubescens, welcher unter dem Namen Deut sanguinea HORT. den Gärtnern bekannt ist.

** Dr. L. DIPPEL: Handbuch der Laubholzkunde II. Theil. Ber 1892. p. 544.

*** Dr. E. KOEHNE: Deutsche Dendrologie, Stuttgart 1893, p. 401.

Diese zwei Werke reihen noch folgende Arten zu denjenigen, welc Diaphragmen haben: Vitis candicans ENGELM., V. aestivalis MICHX., V. Thu bergi S. et Z., V. californica BEUTT., V. amurensis RUPR., V. palmata VA V. Pagnucci ROM., V. Coignetiae PALL., V. rubra MICHX.

z. B. haben an dem grössten Theil der Vitis-Arten das Diaphragma constatiert.*

In dem Stengel sämmtlicher vorgenannter Arten stirbt das Mark sehr zeitig ab, das Skelett der Markzellen bleibt jedoch lange zurück, wie z. B. in Vitis, Ficus, Broussonetia, dagegen werden in andern Arten die Markzellen — indem sie absterben — zerrissen, sie schrumpfen zusammen und an ihrer Stelle bleibt die leere Röhre, wie z. B. in dem Stengel der Forsythia und der meisten Lonicera-Arten, zwischen welchen sich jedoch auch solche vorfinden, in welchen der vom Marke zurückgebliebene, aus Zellenskeletten bestehende Theil an den Wänden der Röhre als Auskleidung zurückbleibt, z. B. Lonicera tatarica.** In den meisten erstrecken sich die leeren Röhren bis unmittelbar an das Diaphragma.

Die Diaphragmen jedoch zeigen, auch wenn sie bezüglich der Stelle des Vorkommens übereinstimmen, eine grosse Mannichfaltigkeit in Bezug auf Grösse und Gestalt ihrer Entwickelung.

Das Diaphragma bei Vitis vinifera gestaltet sich in solcher Weise, dass es an dem in transversaler Ebene halbierten Sprosse mehr oder weniger gleich ist, oben concav, unten aber eben, ferner seine untere Oberfläche grösser ist als die obere (Fig. 2). Eine andere Gestalt zeigt es jedoch an dem Längenschnitte in medianer Ebene. Besonders an diesem Schnitte ist das Diaphragma der verschiedenen Knoten so ziemlich abweichend (Fig. 1). So ist es an einem Knoten, wo nur ein Blatt stand, an der Blattseite um vieles dicker, als an der anderen Seite; dagegen ist es bei den

* Dr. H. Solereder behauptet in seinem Werke „Systematische Anatomie der Dicotyledonen (Stuttgart 1898)“ p. 43 von den zu den Anonacäen gehörigen Gattungen Anona, Artabotrys und Xylopia nach Baillon, dass ihr Mark von Steinzellen-Diaphragmen gefächert ist, ähnliches erwähnt er auf Grund eigener Untersuchungen von Unona, Uvaria, Miliusia und Mitrephora und theilt auch den Längenschnitt des Markes von Uvaria scabrida Oliv. mit (p. 40). Das Diaphragma dieser Pflanzen ist demjenigen des Liriodendron ähnlich. Dessgleichen erwähnt er internodale Diaphragmen in dem Marke der Arten bei Cleyera, Eurya, Freziera, Ternstroemia und Visnea (p. 153).

** Dr. A. de Bary: Vergl. Anatomie d. Vegetationsorgane d. Phanerogamen und Farne. Leipzig 1877. p. 419.

Rankenknoten an beiden Seiten beinahe gleich, höchstens an der Rankenseite ein wenig dicker (Fig. 1). Auch an diesem Schnitte

Fig. 1.

Vitis vinifera L. Medianer Längsschnitt eines Triebes. Skizziert.

Fig. 2.

Vitis vinifera L. Transversaler Längsschnitt eines Triebes. Skizziert.

Fig. 3.

Ficus Carica L. Längsschnitt eines einjährigen Triebes. Skizziert.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

ist die obere Fläche concav, die untere mehr oder weniger eben und immer breiter als die obere.

Eine ähnliche Erscheinung zeigt das Diaphragma bei Ficus carica (Fig. 3); wenn wir nämlich unmittelbar an der Blatt-Inser-

tionsebene das Diaphragma median durchschneiden, so finden wir in der Nähe des Blattes seinen breitesten Theil, dagegen an der dem Blatte entgegengesetzten Seite den schmalsten; wenn wir es aber quer auf die eben erwähnte Ebene schneiden, dann erscheint es beinahe ganz gleich und die beiden Oberflächen sind ziemlich gleich concav, dagegen ist in der Medianschnitt-Ebene die untere Oberfläche mehr eben, die obere hingegen schief concav.

Fig. 4.

Broussonetia papyrifera VENT. Medianer Längsschnitt eines unvollständigen und vollständigen Diaphragmas. Skizziert.

Fig. 5.

Fig. 6.

Coronilla emeroides BOIS. et SPREN. Medianer Längsschnitt eines gleichen und ungleichen Diaphragmas. Skizziert.

Fig. 7.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

Dieselbe Erscheinung wiederholt sich in jenen Knoten, an welchen sich nur ein Blatt befindet, z. B. bei Coronilla emeroides (Fig. 7), ja es kommt sogar auch jener Fall vor, dass das Diaphragma den Markcylinder nicht ganz durchgreift, z. B. in manchen einblättrigen Knoten der Broussonetia (Fig. 4). An dem Diaphragma dieser zwei Arten kann man es noch besser sehen, dass es sich an der gegen das Blatt fallenden Seite bedeutend dicker entwickelt, als an den vorgenannten, bisweilen bis zur 2—5fachen Dicke. In diesen Fällen sind ganz natürlich die die Gestalt des Diaphragma begrenzenden Flächen sehr schwankend und zwar hängt dies von der Art ab, wie sich die Dicke des Diaphragma an den zwei entgegengesetzten Seiten entwickelt.

Charakteristisch ist jedoch für das Diaphragma dieser Arten, dass sie sich nicht in allen Fällen derartig entwickeln. In den

Knoten bei Coronilla emeroides ist häufiger die erwähnte Gestalt, aber man findet oft genug auch ein solches, dessen Gestalt auch in der Blattinsertions-Medianebene völlig gleiche Seiten zeigt und nicht schief ist (Fig. 6). Dagegen ist in den Knoten der Broussonetia seltener das unvollendete Diaphragma (Fig. 4), als das nach allen Seiten gänzlich entwickelte (Fig. 5), welches man vorzüglich in jenen Knoten findet, wo die abwechselnde oder zweireihige Blattstellung in die decussierte Blattstellung übergeht.

Ein solches nach allen Seiten sich gleichmässig ausdehnendes Diaphragma treffen wir an in den Knoten der Forsythia suspensa und Lonicera tatarica, aus deren Stengelgliedern jedoch das Mark stufenweise verschwindet und an seiner Stelle eine leere Röhre zurückbleibt. Bei diesen zweien ist aber trotz dieser Uebereinstimmung doch auch in der Gestalt des Diaphragma eine Verschiedenheit. Das Diaphragma der Forsythia schliesst sich nämlich ziemlich schnell und scharf von dem Marke und später von der dessen Stelle einnehmenden Röhre ab und deshalb sind seine Begrenzungsflächen, d. h. seine obern und untern Flächen in sehr vielen Fällen so ziemlich ganz eben und bilden beinahe einen rechten Winkel mit dem das Mark umgebenden Theil. Dagegen sind bei Lonicera tatarica und bei den meisten Loniceren die begrenzenden Flächen des Diaphragma concav (Fig. 10) und schliessen sich stufenweise verlaufend an die Wände der leeren Röhre an, ferner sind sie von den dünnen Schichten des abgestorbenen Markes bedeckt. Die Gestalt betreffend steht zwischen jenen beiden und gleicht einigermassen dem der Weinrebe das Diaphragma bei Clematis Flammula, welches oben ganz concav, unten aber ganz eben ist, sich scharf vom Marke abscheidet, oben dagegen stufenweise verläuft (Fig. 13, 20). Die Diaphragmagestalt der Deutzia-Arten nähert sich derjenigen von Forsythia und Lonicera tatarica, denn seine Concavität ist oft so gering, dass es beinahe so geformt ist, wie das der Forsythia, hingegen steht seine gewöhnliche Gestalt näher derjenigen von Lonicera, nur dass es mit viel geringeren Marküberbleibseln bedeckt ist. Die in den früher mitgetheilten Verzeichnisse der als Diaphragma-Pflanzen aufgezählten Arten haben mehr oder weniger solche Diaphragmen, welche diesen umschriebenen Diaphragma-Typen entsprechen.

So wie sich jedoch bei Coronilla emeroides auch sehr schiefe, bei Broussonetia aber unvollendete Diaphragmen entwickeln, so kann auch bei Forsythia, Paulownia und Philadelphus (Fig. 8) das Diaphragma eine mehr oder weniger unvollkommene Entwickelung zeigen, insofern es sich an der Peripherie der Markröhre als angeschwollener mehr oder weniger dicker Ringwulst entwickelt, der in der Mitte nicht zusammenschliesst und so das an der beiderseitigen Grenze des Diaphragma befindliche Mark der Stengelglieder, beziehungsweise die an Stelle des Markes entstehende

Fig. 8.

Philadelphus pubescens Loisl. Wulstartiges Diaphragma. Skizziert.

Fig. 9.

Forsythia suspensa Vahl. Unvollendetes Diaphragma. Skizziert.

Fig. 10.

Lonicera tatarica L. Gleichmässig ausgebildetes Diaphragma. Skizziert.

Nach der Natur und nicht vergrössert.

Röhre nicht von einander abschliesst. In manchen Fällen entwickelt es sich in solcher Art in einzelnen Knoten bei Forsythia (Fig. 9) und zwar schwellen die Wülste entweder in solchem Maasse an, dass sie fast an einander reichen, oder aber so, dass sie weit von einander bleiben, im ersten Falle lassen sie einen engeren, im letztern Falle einen grössern leeren Raum in der Mitte. Der leere Raum fällt jedoch in den meisten Fällen nicht in die Mitte, sondern etwas seitwärts, insofern als der Ringwulst gewöhnlich an der einen Seite mehr anschwillt, als an der andern (Fig. 9).

Während diese Erscheinung bei Forsythia seltener ist, ist sie bei Paulownia häufiger und das vollständige Diaphragma ist das seltenere (Fig. 11), in welcher Gestaltung es uns an das von

Lonicera erinnert, so dass bei Paulownia das sonst auch partieweise zerrissene Mark von dem vollständig entwickelten Diaphragma abgetheilt wird (Fig. 11), hingegen, wenn es sich nicht gänzlich entwickelt, so wird der durch das stufenweise Verschwinden des Markes entstandene Kanal endlich continuierlich und an Stelle des Diaphragma ist oft nur eine kleine, manchmal nur an einer Seite entwickelte wulstartige Anschwellung zu bemerken.

Bei Philadelphus endlich findet man kaum oder überhaupt gar keine vollständig entwickelte Diaphragmen. In den Knoten jedoch ist das lockere Mark immer enger, als in den Internodien (Fig. 8).

Von den normal entwickelten Diaphragmen bei Vitis und Ficus angefangen bis zu dem bei Philadelphus gibt es eine ganze Reihe von in stufenweiser Abnahme ausgebildeten Diaphragmen, und bei noch manchen anderen Pflanzen ist nur mehr eine Spur des Diaphragmas in den Knoten in Form von zufällig entwickelten und nestartig angehäuften härteren und dickwandigeren Zellgruppen vorhanden.

Diesen Typen entsprechend ist das Diaphragma ziemlich beständig, obgleich sich auch in dieser Hinsicht die Arten einigermaassen verschieden verhalten. So behält z. B. das Diaphragma von Vitis, Ficus, Lonicera und Clematis beständig seine Gestalt, dagegen wechselt diese schon mehr bei Broussonetia, Coronilla und noch mehr verändert sie sich bei Forsythia, und bei Paulownia findet man sogar nur selten gleichförmig entwickelte Diaphragmen. Diese Veränderungen sind aber bei den genannten Gattungen nicht nur an verschiedenen Individuen einer Art, sondern auch an ein und demselben Individuum einer und derselben Art zu constatieren.

Noch grösser sind die Veränderungen betreffs der Breite — und Dicke — des Diaphragmas. Der Breite-Durchmesser hängt mehr oder weniger von dem Umfange des Markes ab, denn in jedem Fall ist der Diameter des Diaphragma im geringen Maasse grösser als der des internodalen Markes.

So hat es z. B. bei Ficus carica an einem aus 5jährigen Trieben bestehenden Aste nachstehende Breite-Dimensionen gezeigt:

1jährig 2—3 mm.
2jährig 3—5 mm.
3jährig 5—7 mm.
4jährig 6—7 mm.
5jährig 6—7 mm.

Dagegen bei Vitis vinifera

1jährig 2—3 mm.
2jährig 2—4 mm.
3jährig 3—5 mm.
4jährig 4—6 mm.
5jährig 5—6 mm.

Ich bemerke, dass diese durchschnittlichen Dimensionen aus 52 Diaphragma-Messungen an ein und demselben Aste bei Ficus carica und aus 44 bei Vitis vinifera entstammen.

Aus diesen Dimensionen können wir folgern, dass das Diaphragma vom Jahre seiner Entstehung durch eine Reihe von gewissen Jahren in seinen Breite-Dimensionen zunimmt, um dann nach Erreichung des Maximums seiner Breite dieses bis zum hohen Alter der Pflanze zu behalten. Diese Erscheinung stimmt sonst mit dem überein, was PRUNET* im Allgemeinen über das Mark in den Knoten der dicotylen Pflanzen sagt, dass es nämlich umfangreicher ist, als das Mark in den Stengelgliedern und dass es diese Umfangsgrösse erst nach einer gewissen Zeit erreicht.

Eine noch grössere Mannigfaltigkeit zeigt das Diaphragma in dem Diameter seiner Dicke und zwar sowohl an den verschiedenen Arten, wie an den verschiedenen Individuen ein und derselben Art, obzwar wieder das Diaphragma eines Individuums und sämmtlicher Individuen einer Art in den Grenzen gewisser Dimensionen bleibt.

Unter den Arten haben Clematis Flammula und Broussonetia papyrifera das dünnste Diaphragma, denn bei ersterer erreicht es durchschnittlich kaum eine Dicke von 0·5 mm, an der letztern

* Sur la structure comparée des noeuds et des entre-noeuds dans la tige des dicotyledons. Comptes rendus T. CX jan.—juin 1890, p. 594. — Recherches sur les noeuds et les entre-noeuds de la tige des dicotyledons. Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 329.

aber schwankt diese zwischen 0·5 bis 1 mm und erreicht also, oder kaum, die Dicke der Schichten der Markscheide, während doch die meisten Diaphragmen um vieles dicker sind, als die Schichten der Markscheide. Diesen gegenüber stehen dann die dicksten, wie solche bei Coronilla emeroides, Paulownia, Forsythia und Lonicera sich vorfinden, wo sie manchmal die Dicke von 8—15 mm erreichen.

Bei der Bestimmung dieser durchschnittlichen Dimensionen muss man jedoch vorsichtig sein und man darf jenes Diaphragma nicht in Berücksichtigung ziehen, welches die jährigen Triebe eines Zweiges von einander trennt, das sog. „Spross-Zwischenmark" (moelle interrameale GRIES*), welches oft bedeutend dicker ist und mehr oder weniger einer andern Beurtheilung unterliegt.

Die Dicke kann auch innerhalb einer und derselben Art Schwankungen zeigen. Die Dickendimension der vorerwähnten 44 untersuchten Diaphragmen bei Vitis und der 52 bei Ficus carica schwankten durchschnittlich zwischen 1—3 mm. Sehr natürlich war für die Messungen die Mitte des Diaphragma maassgebend, welche mehr oder weniger den Mittelwerth zwischen den beiden Randmessungen giebt.

An den Individuen von Ficus carica von verschiedenen Standorten bleibt die Dicke des Diaphragma so ziemlich gleich. Dagegen ist es an den verschiedenen Individuen von Vitis vinifera sehr veränderlich. Es gibt nämlich Arten, welche dünnere Diaphragmen haben, als das durchschnittliche Maass ist, wie: Vitis riparia, rupestris, Solonis, und daneben solche, an welchen das Diaphragma dicker ist, wie: Vitis Labrusca, Vitis cinerea. Auch nach den Abarten wechselt bei Vitis die Dicke des Diaphragma, wie dies an den Trieben bei Vitis vinifera mit dünnern und dickern Diaphragmen hervortritt. Uebrigens verändert sich die Dicke des Diaphragma an den Trieben bei Vitis auch noch darnach, ob diese in rankentragenden oder rankenlosen Knoten stehen. Besonders in den rankentragenden Knoten ist es immer etwas dicker als in den rankenlosen. Ja, wenn wir die aus verschiedenen

---

* Nouvelles archives. T. VI. pag. 230—231. — Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. pag. 43.

Jahren stammenden Diaphragmen eines und desselben Individuums mit Aufmerksamkeit untersuchen, so finden wir auch Schwankungen. Dies ist jedoch nur exceptionell. Die grosse Schwankung in der Dicke des Diaphragma bei Arten, Spielarten und Individuen von Vitis bin ich geneigt, einestheils der Cultur, anderntheils der sehr verbreiteten Kreuzung zuzuschreiben. Wir sind ja heute auch mit den wilden und verwildeten Vitis-Arten so daran, dass wir auf eine ganz reine Art oder Varietät kaum treffen können. Durch die Kreuzung aber werden bekanntlich nicht nur die äussern, sondern auch die innern Eigenschaften einer Veränderung unterworfen.

Fig. 11.

Paulownia imperialis S. et Z. Diaphragma und gefächertes Mark. Skizziert.

Fig. 12.

Liriodendron tulipifera L. Mark mit internodalen Diaphragmen. Skizziert.

Fig. 13.

Clematis Flammula L. Diaphragma. Skizziert.

Nach der Natur und wenig vergrössert.

Viele sind geneigt, die Veränderung der Diaphragmen dem Klima und auch der Cultur zuzuschreiben. Dies ist zwar nicht unmöglich, kann aber nur durch genaue Beobachtung und insbesondere durch Versuche nachgewiesen werden.

In den Kreis dieser Veränderungen reihe ich nicht ein jene an dem Diaphragma sich zeigende Erscheinung, dass es sich in manchen Trieben an den untersten Knoten, ferner an den unter der Erde entwickelten Knoten nicht ausbildet, wie dies auch schon PRUNET* constatiert hat.

Diese Erscheinung hat jedoch schon eine andere physiologische und zwar eine mehr auf die Ernährung bezügliche Ursache

* Ann. d. sc. nat. Ser. VII. T. XIII. pag. 333.

und eben deshalb kann das Diaphragma dieser erwähnten Knoten ebenso wenig in den Bereich der Behandlung der Knotendiaphragmen gezogen werden, wie das Spross-Zwischenmark.

Es hängt mit dieser eben erwähnten physiologischen Erscheinung auch das zusammen, an welchem Theile des einjährigen Triebes sich unter allen Diaphragmen die stärksten entwickeln. Das stärkste Diaphragma nenne ich nämlich dasjenige, bei dem Breite- und Dicke-Durchmesser verhältnissmässig die grössten sind und das die kleinsten Dimensionen zeigende nenne ich das schwächste. In dieser Beziehung zeigen Ficus carica und Vitis vinifera ein übereinstimmendes Verhalten, insofern als die stärksten Diaphragmen immer auf der Mitte des Triebes, dagegen die schwächsten in den unteren und oberen Knoten ihren Platz haben.

Wichtig ist auch noch die Stellung des Diaphragma in den Knoten zu dem am Knoten sitzenden Blatte, beziehungsweise zur Knospe. Das Diaphragma tritt nämlich in den meisten Fällen so auf, dass dessen Fläche mehr der Knospe als dem Blatte zur Grundlage dient (Fig. 1, 2, 7, 8, 13) und beginnt also entweder unmittelbar unter der Transversalebene der Blattinsertion, oder mit der Ebene in gleicher Richtung, oder sogar in einzelnen Fällen auch oberhalb der Ebene.

Zuletzt muss ich noch bemerken, dass es bei der Messung des Diaphragma nicht gleichgiltig ist, ob wir es im grünen Zustande, in an der Luft getrocknetem oder endlich in mit Wasser ganz angesogenem Zustande messen. Meine Messungsdaten beziehen sich auf an der Luft getrocknete Diaphragmen. Sobald wir aber den Spross im Wasser weichen, saugen sich die Diaphragmen voll mit Wasser und es wächst vorzüglich ihre Dicke-Dimension. Mit diesen, zufolge verschiedenen Wassergehaltes sich zeigenden Unterschieden in der Dicke stimmt die Dimensionsverschiedenheit in den Diaphragmen zwischen Winter- und Frühjahrs-Trieben überein.

Mit diesem Wassergehalt hängt auch noch der Härtezustand des Diaphragma zusammen, denn Wasser enthaltend ist es immer weicher, als wenn es ganz trocken ist.

Bei oberflächlicher Betrachtung scheint es die Härte des

Holzes der Triebe, und zwar in seiner ganzen Ausdehnung, zu besitzen. Nach genauerer Untersuchung jedoch zeigt es sich, dass es etwas weicher ist als das Holz. Auch ist es in die Quere leichter zu zerschneiden, als der Länge nach.

Diese Beschaffenheit des Diaphragma hängt enge mit der anatomischen Construction desselben zusammen. Damit ich jedoch seine von den andern Markzellen abweichende Beschaffenheit und so seine Charakteristik um so genauer beschreiben könne, ist es nothwendig, dass ich in einigen Zügen das Markzellengewebe der dicotylen Holzgewächse charakterisiere.

II. Die anatomischen Verhältnisse der Diaphragmen.

Das Markzellengewebe im Allgemeinen besteht rein nur aus parenchymatischen Zellen, welche mehr oder weniger kugelrund oder vieleckig und ziemlich gross sind, 4—5mal grösser als die Holzparenchymzellen der sie umgebenden Gefässbündel. Ihre Grösse ist aber nicht gleich, denn in der Mitte finden sich die grössten vor und gegen den Rand des Markes werden sie immer kleiner (Fig. 14). In radialer oder tangentialer Richtung bilden sie für gewöhnlich keine Reihen, oder sie zeigen nur schwer erkennbar eine Anreihung in radialer Richtung.

Dagegen bilden sie der Länge des Stengels nach ziemlich gut erkennbare Reihen.* Zwischen den Zellen sind sowohl in Quer- als Längsschnitten gut erkennbare Intercellulargänge. Die Zellenwand verholzt in den meisten Fällen nicht, aber in vielen Holzgewächsen zeigt sie gut die Holzreaction.** Sie ist mehr oder weniger verdickt und zwar getüpfelt. Die Tüpfel sind meistentheils kreisförmig oder von kreisähnlicher Form, rundlich, eiförmig. Ihre Anordnung zeigt weder an der radialen, noch tangentialen, noch an der horizontalen Wand eine gewisse Ordnung (Fig. 14). Und nur an den Markzellen mancher Arten finden wir in dieser

* Dr. A. DE BARY: Vergl. Anatomie der Vegetationsorgane der Phanerogamen u. Farne. Leipzig 1877. p. 418. GRIES l. c. p. 231.

** G. KRASSER: Ueber das Mark einiger Holzpflanzen. Inaug.-Diss. d. Univers. Basel. 2 Taf. Breslau 1884. — Dr. FRANZ MENTOWICH: Das Mark bei einigen Kletter-Pflanzen. Magyar Növénytani Lapok (Ungarische botan. Blätter). IX. Jahrg. 1885. pag. 65.

Hinsicht eine Ausnahme. Bei Vitis nämlich zeigen die Tüpfel an den Seitenwänden der Markzellen das Bestreben, sich in senkrechter Richtung auf die Achse des Stengels zu dehnen.*

Unter diesen Zellen kommen dann noch zufällig auch andere abweichende Zellen vor, weswegen GRIES** homogene und heterogene Markzellengewebe unterscheidet. Diese Unterscheidung bezieht sich jedoch vorzüglich auf die Lebensthätigkeit der Markzellen. Die meisten Markzellen nämlich sterben noch im Jahre

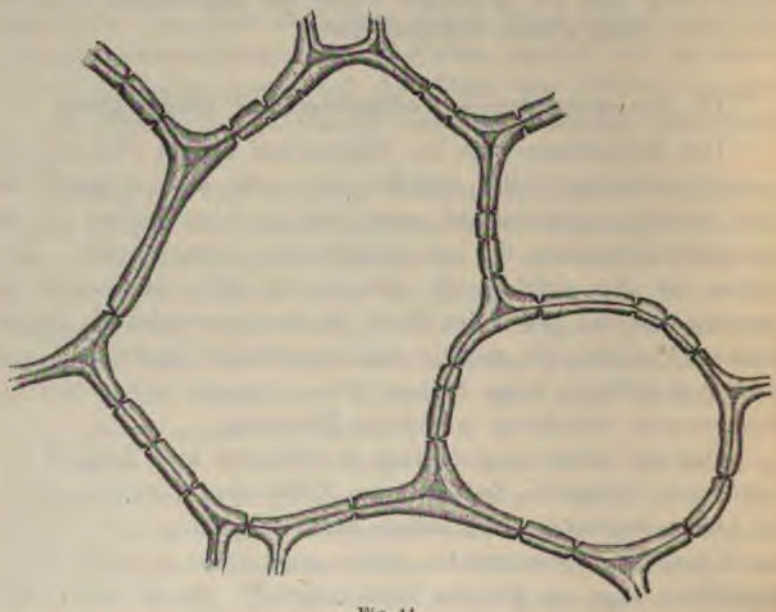


Fig. 14.

Vitis vinifera L. Querschnitt der Markzellen des Stengelgliedes. 400fach vergrössert.

ihrer Entstehung ab, ihr Inhalt wird aufgesogen und ihre Stelle nimmt Luft ein (cellules inertes), wieder in andern Fällen behalten sie lange, selbst bis 20 Jahre, ihre Lebensfähigkeit (cellules actives)*** und speichern jährlich in sich Stärkekörner, Gerbsäure u. s. w. als Reserve-Nährstoffe auf.

* D'ARBAUMONT: La tige des Ampelidées. Ann. d. sc. nat. Ser. VI. T. XI. p. 256.

** Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. p. 30.

*** l. c. pag. 29.

Dieses Mark wird dann von der Markscheide in der Dicke einiger Zellenschichten umschlossen, die Zellen derselben gehören zum Marke und sind unmittelbar in Berührung mit den primären Gefässbündeltheilen, respective mit der Markkrone und zwischen diesen mit den secundären Bündeltheilen.* Eben deshalb zeigen die die Markscheide bildenden Markzellen eine Abweichung von denen in das Innere des centralen Cylinders fallenden Markzellen, insofern sie in radiale und senkrechte Reihen gereiht sind, die

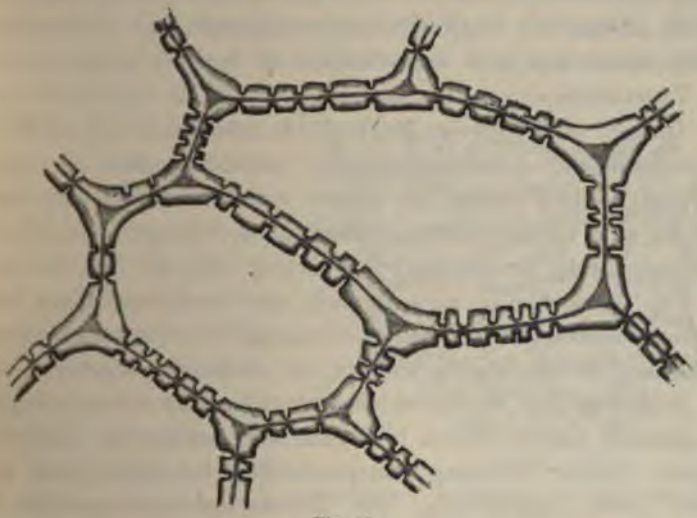


Fig. 15.

Vitis vinifera L. Querschnitt der Markscheide-Zellen. 400fach vergrössert.

Zellen selbst jedoch in ihrer Form mehr oder weniger noch den Markzellen ähnlich sind (Fig. 15). Ihre Wand indessen ist bedeutend dicker, ist immer verholzt und zeigt gut die Reaction des schwefelsauren Anilins oder des Phloroglucins. Ihre Zellenwände sind tüpfelartig verdickt, die Tüpfel sind entweder kreisförmig oder sie nähern sich mehr oder weniger der Spaltform und sind zahlreicher als an den Markzellen. Sie liegen auf den horizontalen Wänden so ziemlich ohne Ordnung, oder in einer nur

* Dr. A. DE BARY: Vergl. Anatomie etc. Leipzig 1877. p. 419. — Dr. J. WIESNER: Elemente d. Anatomie u. Physiologie. II. Aufl. Wien 1888. pag. 117.

schwer wahrnehmbarer Ordnung in radialer Richtung. Auf denen in der Längenrichtung des Triebes stehenden Wänden bilden sie senkrechte Reihen, welche mit den primären Gefässen parallel sind, aber auch die Zellen selbst sind mehr oder weniger in der Längenrichtung gestreckt (Fig. 20, 25, 26). Die Tüpfelchen aber sind mehr spaltförmig und in der Richtung der Längenwand geordnet.

Sie bleiben lange lebend und enthalten Stärke oder einen andern Reserve-Nährstoff, welcher sich ebenso wie im Marke jährlich zu Anfang der Vegetationsperiode anhäuft und aus den Zellen verschwindet, um sich dann wieder in der Mitte und am Ende der Vegetationsperiode anzusammeln.

Obwohl die Zellen der Markscheide und die Zellen des Markes angrenzend sind, gehen sie dennoch nicht stufenweise in einander über, sondern es bleibt die Grenze zwischen beiden sehr scharf und die zwei nachbarlichen, abweichenden Zellengruppen kommen mit einander in unmittelbare Berührung (Fig. 25, 26).

Die Markzellen schliessen sich nur an die primären Markstrahlzellen mit stufenweisem Uebergange an und zwar in dieser Art, dass die Markzellen sich in der Nähe des Markstrahles in der Richtung des Markstrahles stufenweise ausdehnen, während die gänzlich radiale Reihen bildenden Markstrahlzellen ihnen nachfolgen. Dieser Dehnung entsprechend wird ihre Form auch immer mehr ziegelförmig, ihre Zellenwand aber verdickt sich immer mehr, je mehr sie sich dem Markstrahle nähern.

Die Zellenwände behalten ihre tüpfelförmige Verdickung, aber die Tüpfel sind mehr elliptisch geformt und reihen sich nach der Längenrichtung der Zellen, respective in der Richtung des Markstrahles. Die in der Nachbarschaft von Markscheide und Markstrahl befindlichen Markzellen sind aber an Flächenraum immer geringer, als die Zellen in der Mitte des Markes. Diese Zellen können wir daher als diejenigen betrachten, welche den Uebergang zwischen dem Marke und den in seinem Umkreise befindlichen Geweben bilden und die Verbindung bewerkstelligen.

Während wir aber einen solchen scharfen Contrast zwischen den Zellen des Markes und der Markscheide finden, ist der Unterschied zwischen den Zellen der Markscheide und des Diaphragma

kleiner, als zwischen den Diaphragmazellen einerseits, andererseits zwischen den Zellen des Markes. Im Allgemeinen erscheinen die Diaphragmazellen — abgesehen von der Form — ganz so wie die Zellen der Markscheide.

In der Nähe des Diaphragma gehen die Zellen des Markes stufenweise in die Zellen des Diaphragma über, insofern ihre Gestalt, welche bisher nach drei Richtungen so ziemlich gleichmässig ausgebildet war, allmählig nur in tangentialer und radialer Richtung ihre ursprüngliche Ausdehnung behält, in der Längenrichtung des Stengels aber sich vermindert und die Zelle platt wird. Daher kommt es, dass in dem Querschnitte des Diaphragma die Zellen mehr oder weniger die Form der Markzellen beibehalten, dagegen in dem Längenschnitt hievon abweichen (Fig. 16, 18). Dem zufolge erscheinen die Zellen in dem Längsschnitte des Diaphragma so, als wenn sie in radialer, respective tangentialer Richtung gestreckt wären und wir müssen sie auch mit Rücksicht auf den Zellendurchmesser in horizontaler Richtung als gedehnte erkennen und zwar mehr in radialer, als in tangentialer Richtung (Fig. 16, 19, 21, 22, 23). Diese Dehnung der Zellen tritt jedoch nicht gleichmässig bei dem Diaphragma einer jeden Art auf. Am meisten gedehnt sind sie in dem Diaphragma bei Vitis (Fig. 19), Broussonetia (Fig. 23), Clematis Flammula (Fig. 21), Deutzia gracilis (Fig. 22); hingegen giebt es einzelne Arten, deren Zellen weniger gestreckt sind, wie in dem Diaphragma bei Ficus (Fig. 16), Forsythia und Lonicera.

Fig. 16.

Ficus Carica L. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

In dem Diaphragma mancher Pflanzenart sind die Zellen insgesammt gedehnt, wie in den Diaphragmen bei Vitis (Fig. 19), Broussonetia (Fig. 23), Deutzia (Fig. 22), Clematis (Fig. 21). In den Diaphragmen bei Ficus (Fig. 16), Forsythia und Lonicera

finden wir unter den gestreckten Zellen auch kürzere, ja in dem Diaphragma bei Clematis Vitalba haben die Zellen kaum ihre Form geändert und sind kaum verschieden von der Form der Markzellen. Bei manchen Arten sind die Diaphragmazellen in der Mitte und am Rande die gedehntesten (Deutzia gracilis), während an den meisten die mittleren Zellen die wenigstgestreckten sind und gegen den Rand zu immer gestreckter werden, z. B. in dem Diaphragma bei Clematis Vitalba sind sie beinahe kugelförmig und strecken sich dann immer mehr gegen den Umfang

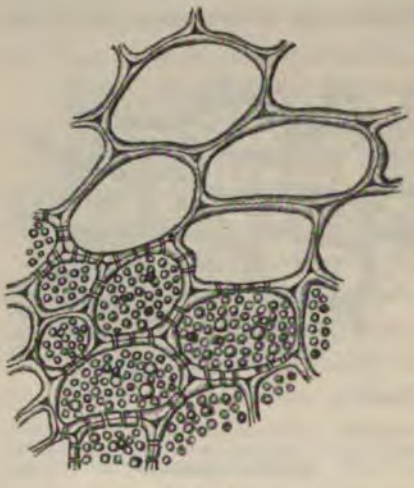


Fig. 17.

Ficus Carica L. Querschnitt der Markscheide- und Mark-Zellen. 200fach vergrössert.

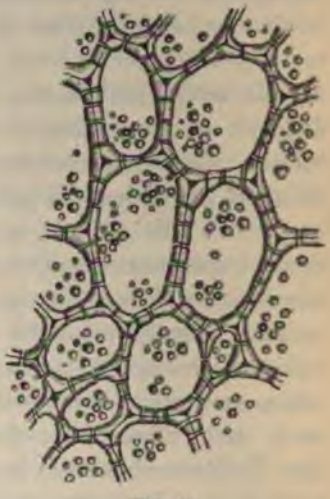


Fig. 18.

Ficus Carica L. Querschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

des Markes. Am wenigsten ist diese Zellendehnung zu beobachten in dem Diaphragma bei Symphoricarpus racemosus und Abelia floribunda.

Die Gestalt der Zellen des Diaphragma überblickend können wir sagen: während die Markzellen isodiametrisch sind, sind die Zellen des Diaphragma in radialer und tangentialer Richtung gestreckt. Für alle Fälle steht jedoch fest, dass in den Diaphragmen, mögen ihre Zellen entweder gleich oder verschieden geformt sein, mögen sie homogene oder heterogene sein, bei den dicotylen Holzgewächsen nie Gefässbündel vor-

kommen, wie solche in den Diaphragmen anderer Pflanzen zu constatieren sind.*

Der Gestalt entsprechend verändert sich auch jene Richtung, in welcher sich die Zellen an einander anschliessen, und stufenweise verändert sich auch die Form des Anschlusses. Während nämlich die Markzellen — wie ich erwähnte — mehr in der Längenrichtung des Stengels bestimmte Reihen zeigen, behalten die Diaphragmazellen mehr oder weniger auch diese Richtung bei, reihen sich aber vorzüglich in radialer Richtung (Fig. 16, 19, 21, 22, 23), was insbesondere an dem Längsschnitt gut zu ersehen

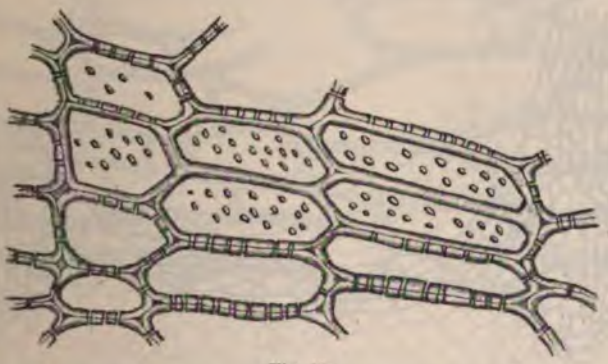


Fig. 19.

Vitis vinifera L. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

ist, obgleich es Arten giebt, an welchen diese Anreihung kaum bemerkt werden kann.

Dieser Anreihung entsprechend schliessen sich die Zellen in einer von den Markzellen abweichenden Weise an einander. Die horizontalen Wände der Markzellen sind mehr oder weniger parallel, grossentheils sind auch die horizontalen Wände der Diaphragmazellen parallel, obwohl es häufig der Fall ist, dass diese horizontalen Wände sich gegen einander neigen.

Die Zellenwände, welche die Markzellen in der Längenrichtung von einander trennen, sind so ziemlich parallel zur Längen-

* Dr. A. B. Frank: Lehrb. der Botanik. Leipzig 1892. Bd. I. p. 206—207. — Gefässbündel enthaltende Diaphragmen haben die Equisetaceen, Gramineen, Umbelliferen(?), ferner Dipsacus und Taraxacum(?).

achse des Triebes. Diese Seitenwände der Diaphragmazellen keilen sich mehr oder weniger zwischen ihre Seitennachbarn ein. Die Zellen bei Vitis (Fig. 19), Deutzia (Fig. 22), Clematis Flammula (Fig. 21) zeigen genug deutlich diese Art des Anschlusses, bei andern Arten, wie bei Ficus (Fig. 16), Broussonetia (Fig. 23), Forsythia und Lonicera kommt diese Anschlussart weniger zur Geltung.

Noch mehr unterscheiden sich jedoch die Diaphragmazellen von den Markzellen betreffs der Verdickung der Zellwände. Es

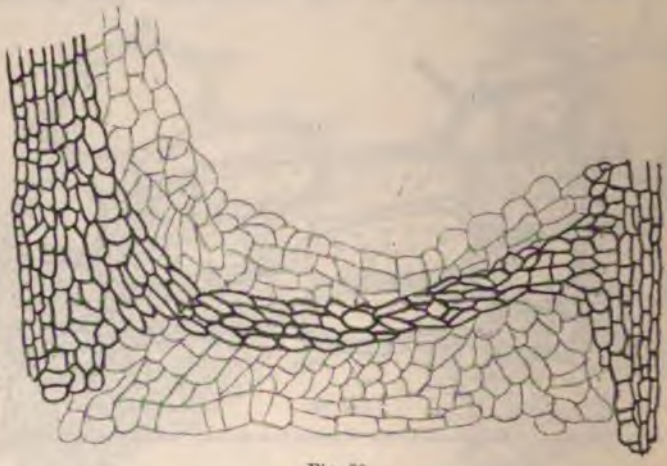


Fig. 20.

Clematis Flammula L. Diaphragma mit Markscheide im Median-Längsschnitt. 52fach vergrössert.

ist wahr, dass auch die Wand der Markzellen verdickt ist, aber diese Verdickung bleibt weit zurück hinter der Verdickung der Diaphragma-Zellwände. Die Diaphragma-Zellwände zeigen vorzüglich gegen die Seitenränder des Diaphragma bei manchen Arten eine grössere Verdickung, als in der Mitte, so ist es bei Vitis (Fig. 19), bei anderen Arten dagegen zeigt sich eine solche Abweichung nicht, ja die Zellen sind sogar in der Mitte mehr verdickt. Und nur als Ausnahme ist ein solches Diaphragma anzusehen, dessen Zellwände nicht viel dicker wären, als die der Markzellen, wie eine solche Ausnahme das Diaphragma von Lonicera Caprifolium zeigt. Die Verdickung ist auch hier, wie bei den andern Markzellen, tüpfelartig. Die

Tüpfel der Markzellen sind jedoch rund oder mehr oder weniger unregelmässig in die Länge gezogen (Fig. 14) und lagern sich beinahe immer ohne jede Ordnung ab. Die Tüpfel der Zellen des Diaphragma sind nie rund, sondern immer elliptischrund, ja sogar spaltförmig, ferner reihen sie sich mit Ausnahme der horizontalen Wände, an welchen die regelmässige Anreihung nicht beständig ist, immer in der Dehnungsrichtung der Zellen und zwar so, dass die Spalten entweder parallel und quer verlaufen, oder aber, was häufiger ist, schief stehen (Fig. 19).

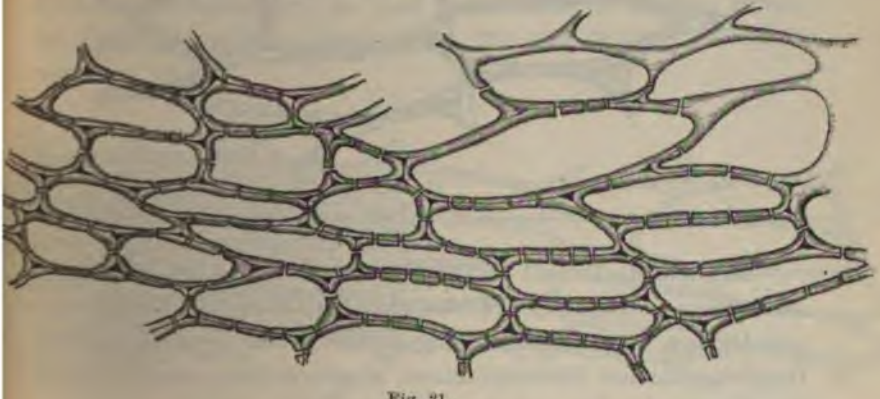


Fig. 21.

Clematis Flammula L. Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Die Zellen des Diaphragma schliessen sich entsprechend ihrer Gestalt eng an einander und bilden im Gegensatz zu den Markzellen wenige und sehr enge Intercellulargänge, oder es sind solche zwischen ihnen überhaupt nicht zu finden (Fig. 16, 18, 20, 21, 22, 23, 31, 32).

Die Zellen des Diaphragma kommen der Begrenzung des Diaphragma entsprechend mit den Markzellen, ferner mit den Zellen des Markstrahles und der Markscheide in Berührung.

Die Markzellen gehen in die Zellen des Diaphragma dadurch stufenweise über, dass ihre Gestalt sich stufenweise plattet, respective sich mehr ausdehnt. Diesem gestaltlichen Uebergange steht entgegen der scharfe Gegensatz bezüglich der Dicke, insofern an einer bestimmten Grenze die schon sehr verdickten Zellen mit den noch nicht verdickten in Berührung treten (Fig. 21), und

diese plötzliche Differenzierung entwickelt sich auch noch in den Falle, wo das Diaphragma nur wulstartig zur Ausbildung gelangt, wie bei Philadelphus pubescens (Fig. 8).

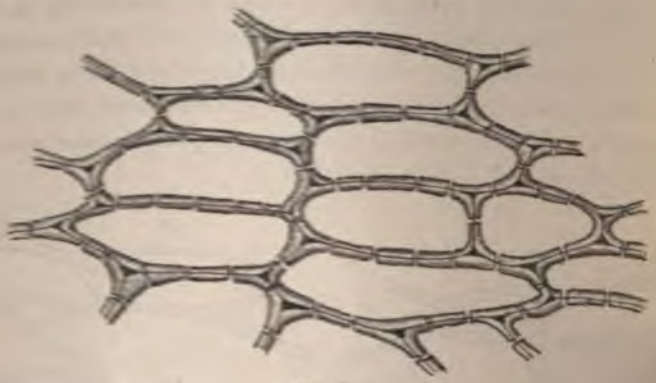


Fig. 22.

Deutzia gracilis S. et Z. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Mit dem Markstrahl verknüpfen sich die Zellen des Diaphragma stufenweise, indem die Markstrahlzellen auch in Betreff ihrer gestaltlichen und sonstigen Eigenschaften so ziemlich mit den Diaphragmazellen übereinstimmen, ausgenommen, dass die Gestalt der Markstrahlzellen entschieden ziegelförmig ist.

Fig. 23.

Broussonetia papyrifera VENT. Längsschnitt der Diaphragma-Zellen. 200fach vergrössert.

Hingegen ist der Uebergang in die Zellen der Markscheide nicht stufenweise, da die Zellen des Diaphragma in radialer Richtung, die Zellen der Markscheide aber in Längsrichtung gedehnt sind, so dass an der Berührungsstelle zwischen den zweien ein der vorerwähnte Lagerungsunterschied vorhanden ist, oder

aber es lagern sich an den Berührungs- respective Verschmelzungsstellen schiefstehende Zellen ab (Fig. 20). Die Tüpfel der Diaphragmazellen entwickeln sich in der Ebene des Längenschnittes in radialer Richtung, wohingegen dieselben an den Zellen der Markscheide sich in der Längsrichtung des Stengels anreihen.*

In einem stimmen jedoch sowohl die Zellen des Diaphragma, wie auch die des Markstrahles und der Markscheide überein, dass sie nämlich mit Reserve-Nahrungsstoffen erfüllt sind und zwar beinahe ausschliesslich mit Stärkemehl (Fig. 17, 18, 22, 23, 24), zuweilen mit Gerbsäure, ja auch mit fettartigen Stoffen, ferner, dass ihre Zellenwände gleichmässig gut und deutlich die Holzreactionen zeigen.

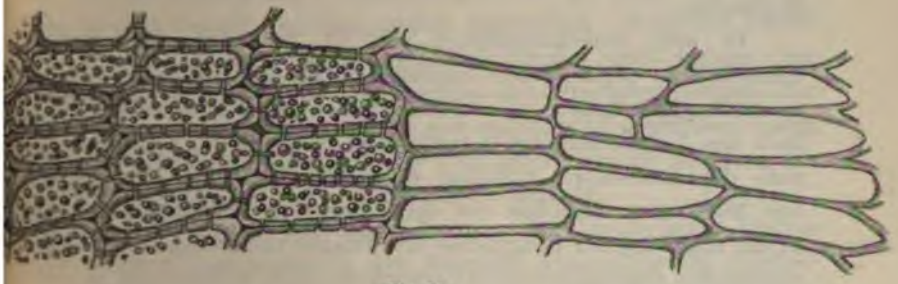


Fig. 24.

Philadelphus pubescens LOISL. Längsschnitt der Zellen des wulstartigen nodalen Diaphragmas. 200fach vergrössert.

In dem Diaphragma findet man ausser den geschilderten Zellen noch andere auch in dem Marke vorkommende Zellen, z. B. Krystalle führende Zellen (Broussonetia, Forsythia u. s. w.), welche gewöhnlich grösser sind, als die sie umgebenden Zellen und ihre Wand bleibt meistentheils dünn; ferner Milchröhren (Ficus, Broussonetia), deren Wand sich nicht verholzt.

Die gesammten Diaphragmazellen haben ferner die Befähigung, eine grosse Menge Wasser in sich aufzunehmen. Von dieser ihrer Fähigkeit können wir uns leicht überzeugen, wenn wir sie künstlich getrocknet wieder in das Wasser bringen. Sonst aber kann

* Die gestaltliche Uebereinstimmung der in den röhrigen Stengeln an dem Markumfange stehenden engern Markzellen mit dem primären Markstrahl-Parenchyme erwähnt auch DE BARY: Vergl. Anatomie p. 419.

man zur Zeit der Vegetation, insbesondere zu Anfang derselben von der Wassermenge leicht Ueberzeugung gewinnen.*

Da der Charakterzug der Diaphragmazellen in vieler Beziehung mit dem der Markscheidezellen übereinstimmt, erscheinen diese bei makroskopischer Untersuchung mit jenen übereinstimmend und das Diaphragma scheint gleichsam die Fortsetzung der Markscheide zu sein.

III. Die Bildung der Diaphragmen.

Die Markdiaphragma-Zellen sind hinsichtlich ihrer Lage und ihres Ursprungs eigentlich Markzellen, desshalb sind sie am Anfang ihrer Bildung und Entwickelung übereinstimmend mit den Markzellen.

In dem Vegetationskegel und in den von den obersten Blatthöckern entstandenen Knoten besteht das Mark aus gänzlich gleichförmigen Zellen und ist vollkommen gleichartig. Noch unterhalb des Vegetationskegels respective in den 1—2 Knoten unterhalb der Endknospe verbleibt diese Gleichartigkeit des Markes. Die Markzellen bestehen um diese Zeit aus sehr dünnwandigen, in der Richtung der Längsachse des Triebes mehr verkürzten, daher verflachten engschliessenden Parenchymzellen, welche sich in senkrechte, ja einigermassen strahlige Reihen ordnen. In dem weiter unten gelegenen Stengeltheil jedoch geschieht schon sehr zeitig die Dehnung der Stengelglieder zufolge des intercalaren Wachsthums. Unter dieser Dehnung verändert sich besonders die Gestalt der internodalen Markzellen, insofern ihre platte Gestalt allmählig isodiametrisch, ja sogar nach Ort und Zeit eine in der Längenrichtung des Triebes gestreckte wird und es bilden sich die schizogenen Intercellulargänge. Aber die nodalen Zellen verändern kaum ihre Lage und ihre Gestalt, weil sich das in den Knoten befindliche Mark kaum oder nur sehr wenig dehnt.**

In diesem Zeitabschnitte der Dehnung, also zu Anfang des intercalaren Wachsthums tritt in den noch lebenden internodalen und nodalen Markzellen die Verdickung ein. Die Dehnung hält

* A. Prunet: Comptes rendus. T. CX. jan.—juin 1890. p. 594.

** Krasser l. c.

aber noch weiter an und erreicht das Maximum — wonach die internodalen Markzellen ihre Thätigkeit allmählig verlieren, ihr Inhalt wird aufgesogen und sie sterben ab, ja zufolge grösserer Dehnung reissen sie von einander und gehen zu Grunde, so dass an ihrer Stelle eine leere Röhre entsteht oder das Mark fächerig wird.*

Der Knoten selbst aber dehnt sich sehr wenig und nur zu Anfang der Dehnung der Internodien — so, dass die Internodien noch intercalarisch wachsen, hingegen der Knoten schon die Dehnung eingestellt hat. Diese Dehnung des Knotens hat jedoch keinen Einfluss auf die Gestalt der innerhalb des Knotens befindlichen Markzellen, weil den, infolge der Dehnung entstandenen Raum die durch die Theilung entstandenen Zellen einnehmen.

In dieser Zeitperiode unterscheiden sich die Diaphragmazellen nur in der Gestalt von den andern Markzellen. Während jedoch die Markzellen eben zufolge Beschränktseins ihres Lebens ihre weitere Verdickung einstellen, setzen die Diaphragmazellen ihre Verdickung so lange fort, bis sie sich vollständig ausgebildet haben und bis mit dem Fortschritt der Vegetationsperiode in ihnen die Aufspeicherung der Reserve-Nährstoffe beginnt.

Diesen Verlauf der Entwickelnng des Diaphragma können wir deutlich beobachten in den jüngsten Knoten der im Herbste sich entwickelnden Sprossen: die auf den mit Stärkemehl angefüllten und aus verholzten dickwandigen Zellen bestehenden Diaphragmen folgenden jüngeren Diaphragmazellen sind schon weniger mit Stärkemehl angefüllt. Die Menge des Stärke-Inhaltes nimmt ab in dem jüngern Alter des Diaphragma, d. h. je jünger es ist, also je näher es zur Spitze des Triebes steht, desto geringer ist sein Stärkegehalt. Schliesslich folgt schon ein solches Diaphragma nach oben an dem Triebe, in welchem kein Stärkemehl mehr zu finden ist, aber die Zellenwände sind noch dick und verholzt. In noch höher gelegenen jüngeren Diaphragmen sind die Zellenwände noch verdickt, aber nicht mehr verholzt; bis endlich die jüngsten sich nur in der Gestalt der Zellen von den übrigen Zellen des Markes unterscheiden. Die Zellen des allerletzten und schon zur End-

* A. de Candolle: Anleit. z. Studium d. Botanik. Neubearbeitet von Dr. A. v. Bunge. Leipzig 1844. p. 40.

knospe gehörigen Diaphragma unterscheiden sich in gar nichts mehr von den übrigen Markzellen. So ist dies z. B. bei den Vitis-Arten.

Grösstentheils ist dies das allgemeine Bild der Bildung des Diaphragma, respective des Markes.

Es giebt jedoch viele Abweichungen von dieser allgemeinen Regel. In erster Reihe muss ich hervorheben, dass die Differenzierungen in den Diaphragmazellen bei manchen Arten schon an dem unterhalb der Endknospe befindlichen Knoten eintreten (Ficus), an andern Arten wieder nur an dem 4—5ten Knoten (Vitis).

Die intercalare Dehnung wirkt jedoch nicht nur modificierend auf die Markzellen, sondern bestimmt mehr oder weniger die Grenze des Diaphragma. Bekanntlich breitet sich die intercalare Dehnung nicht gleichmässig und auf einmal auf alle Punkte des Stengelgliedes aus. In den meisten Fällen fällt das Maximum der Dehnung etwas höher als auf die Mitte des Stengelgliedes, es kann aber dieses Maximum auch in die Nähe der Spitze, ja sogar in den untern Theil des Stengelgliedes fallen.* Wenn das Dehnungs-Maximum in die Mitte des Stengelgliedes fällt, so entwickelt sich die obere und untere Fläche der Diaphragmen annähernd gleich (Broussonetia, Forsythia, Lonicera). Wenn das Maximum der Dehnung in den obern Theil des Stengelgliedes gelangt, dann ist beim Diaphragma die obere Fläche eben, die untere Fläche aber concav (Ficus), endlich, wenn die Intensität der Streckung in den unteren Theil des Stengelgliedes fällt, so ist die obere Fläche des Diaphragma concav, die untere aber eben (Vitis, Clematis Flammula). Von diesen Erscheinungen kann man sich leicht Ueberzeugung verschaffen, wenn wir die im Dehnen begriffenen Stengelglieder mit Tuschlinien in gleichen Abständen bezeichnen. Diese Linien werden sodann dort am entferntesten von einander liegen, wo die Dehnung die grösste war. Von dieser Erscheinung kann man sich übrigens auch auf praktischem Wege Kenntniss verschaffen; bekanntlich bricht beim starken Biegen der grüne Sprössling der Weinrebe oberhalb des Knotens, also oben nächst

* Ph. van Tieghem: Traité de Botanique. Paris 1884. p. 264. — Dr. J. Wiesner: Elemente d. Anat. u. Physiologie d. Pflanzen. II. Aufl. Wien 1885. p. 244.

dem Diaphragma sehr leicht und zwar einfach deshalb an dieser Stelle, weil hier an dem Stengelgliede das Dehnungs-Maximum ist und zugleich das Maximum der Anschwellung (Turgescenz) der Zellen, wonach sie zufolge ihrer Ansteifung der Biegung am wenigsten zu widerstehen vermögen und leicht abbrechen. Zu derselben Zeit haben aber schon die Markzellen des unter dem betreffenden Diaphragma befindlichen Stengelgliedes das Maximum ihrer Wanddicke mehr oder weniger erreicht.

Sobald die Zellen des Diaphragma die volle Entwickelung in ihrem Wachsthume und in der Verdickung ihrer Wände erreicht haben, — beginnt auch schon in ihnen die Aufspeicherung der Stärke-Körnchen.

IV. Die Bedeutung des Markdiaphragma.

Die vorher beschriebenen anatomischen Merkmale heben so sehr die Zellen des Markdiaphragma der dicotylen Holzgewächse hervor, dass, nachdem zwischen den anatomischen Merkmalen der den Pflanzenkörper bildenden Zellen und zwischen irgend einer Lebensthätigkeit der Pflanze immer irgend welcher bestimmter Zusammenhang sein muss, ich mich mit Recht angeeifert fühle, in diesem Falle nach der Lebensthätigkeit zu forschen, zu deren Ausübung die Diaphragmen berufen sind.

Mit Rücksicht auf die anatomischen Merkmale der Diaphragmen und deren Placierung in dem Pflanzenkörper, können wir dieselben besonders aus zwei Gesichtspunkten zum Gegenstand unserer Untersuchung machen, nämlich aus dem Gesichtspunkte der Aufspeicherung des Nahrungsstoffes und hinsichtlich der Festigung des Pflanzenkörpers.

1. Das Markdiaphragma als Speicher-Gewebe.

Aus den im Vorangegangenen mitgetheilten Untersuchungsresultaten geht zur Genüge hervor, dass die Diaphragmazellen zu Ende der Vegetationsperiode, also in der sogenannten Ruhezeit der Pflanzen mit Stärkekörnchen angefüllt sind, ebenso wie die mit ihnen in Berührung stehenden Markscheide- und Markstrahl-Zellen, oder wie die lange am Leben bleibenden Markzellen mancher anderer Holzgewächse.

Diese Stärkekörnchen verschwinden jedoch bei Eintritt der Vegetation, also zur Frühjahrszeit, wo die Bäume zu treiben anfangen, sie werden verbraucht und ihren Platz nimmt grösstentheils Wasser ein, so dass wir in einer gewissen Zeitperiode vergeblich darin Stärkekörnchen suchen. Diese können wir demnach nur für Reserve-Nährstoffe halten und deshalb die Diaphragmazellen für Speicher-Zellen, das markgewebeartige Gewebe in den Diaphragmen aber für Speicher-Gewebe ansehen.

Diese Bedeutung behält das Diaphragma-Gewebe sehr lange Zeit. Zu dessen Bekräftigung kann ich erwähnen, dass ich an einem 12jährigen Weinstocke, an dessen Wurzeln schon die Roesleria schmarotzte und an einem im Budapester botanischen Garten gewachsenen 20jährigen Weinstocke, in den untersten Diaphragmen noch Stärkemehl gefunden habe. Das 5jährige Diaphragma von Ficus Carica, das 8jährige von Forsythia suspensa war noch im Verlaufe des Winters voll von Stärkekörnern.

Dass sich aber in ihm eine nicht unbedeutende Menge dieses Reserve-Nährstoffes ansammelt, geht aus der Erscheinung hervor, dass, wenn sich in ihnen nicht der aufgespeicherte Nahrungsstoff anhäuft, das Ausschlagen der in seiner Nähe befindlichen Blattknospe unterbleibt. Die Knospen solcher Knoten bei Lonicera occidentalis HOOK. und L. Kamschatica HORT. haben nicht ausgetrieben, deren Diaphragmagewebe Stärkekörnchen nicht enthielten. Dasselbe kann man auch an Weinstöcken sehen, deren im Spätherbste entwickelte Sprossen eine hinreichende Menge von Reserve-Nahrungsstoff in ihren Endknoten nicht mehr aufspeichern konnten, dem zufolge auch nicht fähig sind, Blattknospen zu entwickeln und im Frühjahr auszutreiben, abgesehen davon, dass dieselben deshalb, weil sie nicht zur genügenden Reife gelangten, in der Winterkälte auch leicht zu Grunde gehen.

Hieraus folgt, dass der in den Diaphragmen angesammelte Nahrungsstoff in erster Reihe auch zur Nahrung der an den Knoten befindlichen Blattknospen dient. Ein weiterer Beweis dafür ist auch, dass das Diaphragma in der Nähe der Knospen dicker ist und dass bei den wulstartigen unvollständigen Diaphragmen der der Knospe zugewendete Theil dicker ist. Es beweist dies aber auch die Aufzehrung des Nahrungsstoffes. Dies

kann man sehr schön bei Forsythia suspensa sehen, mit deren zeitig im Frühjahr erscheinenden Blüthen in derselben Zeit aus dem Markstrahl und dem Markdiaphragma die Stärke abnimmt, obgleich sie noch in der Markscheide und in den Holzparenchym-Zellen vorhanden ist, um dann bei der Entwickelung des die Blätter tragenden Sprossen verbraucht zu werden. Die Reihenfolge in dem Verbrauch der Reserve-Stärke des Triebes verglichen mit den Forschungen Dr. A. FISCHER's wäre folgende: Die Rinde, die Markscheide, der Markstrahl und das Markdiaphragma und erst nachher das Holzparenchym*, was mit meiner Beobachtung nicht gänzlich übereinstimmt. Ich muss jedoch bemerken, dass sich dies so nur an solchen Knoten verhält, an welchen die Blüthen erscheinen; in den Diaphragmen, welche unterhalb der die Blüthe tragenden Knoten liegen, ist zur Blüthezeit die Stärke noch unberührt und beginnt erst verbraucht zu werden zur Zeit, wo die Blätterknospen ausschlagen. In den Diaphragmen solcher Triebe, welche entwickelte Blätter tragen, findet man im Frühjahr nirgends eine Spur von Stärke. Hingegen an solchen Pflanzen, welche früher ihre Blätter entwickeln, verschwindet gleichzeitig mit der Blattentwickelung aus sämmtlichen Diaphragmen der Stärkeinhalt. Dieser Bedeutung der Diaphragmen müssen wir zueignen seine Eigenthümlichkeit in der Gestalt, dass es an der gegen die Unterlage des Blattes, respective der Blattknospe zugewendeten Seite, insbesondere, wenn es sich nur in einem einblattigen Knoten entwickelt, um vieles breiter ist, als in dem andern Theile (Vitis, Ficus, Coronilla).

Die Einrichtung der Diaphragmazellen als Wasser-Reservoire hat auch PRUNET** schon nachgewiesen und so kann ich von der Erklärung dieser Bedeutung absehen. Im Uebrigen fällt dieser Umstand unter denselben Gesichtspunkt, wie die Aufspeicherung des aus Stärke bestehenden Reservestoffes. Beide Stoffe dienen zur Deckung des eintretenden Bedarfes. Und so ist das Diaphragma eigentlich das für die Aufspeicherung zweier Stoffe dienende Gewebe. Und zwar enthält es diese zwei Stoffe abwechselnd in zwei ver-

* Beitr. z. Physiologie d. Holzgewächse. Jahrb. d. wiss. Bot 22. Bd. 1891. p. 110.

** Comptes rendus T. CX. 1890. p. 594.

schiedenen Zeitperioden. Nämlich in der ersten Entwickelungsperiode, wenn es noch jung ist, enthält es hauptsächlich Wasser, sodann im ausgebildeten Zustande vielmehr nur Stärke. Das ausgebildete Diaphragma endlich enthält in der Ruhezeit Stärkemehl, dagegen in der Vegetationsperiode, insbesondere zu Anfang vorzüglich Wasser. Sein Wassergehalt verändert sich jedoch demgemäss, je nachdem die Pflanze weniger oder mehr benöthigt.*

Nebenbei erwähne ich als charakteristische Eigenthümlichkeit, dass das Diaphragma, welches als Speicher-Gewebe in erster Reihe die Entwickelung der in seine Nähe fallenden, respective zu ihm gehörigen Seitenbildungen zu fördern berufen ist, oft zufolge gewisser Beschädigungen sich einfach nicht mit Reserve-Nahrungsstoff füllt und seiner diesbezüglichen Aufgabe nicht entsprechen kann. Insbesondere die in der Nähe des Diaphragma beigebrachten Wunden, auch wenn sie während der Vegetationsperiode vernarben, verursachen es, dass sich die in ihrer Nähe befindlichen Diaphragmazellen nicht mit Stärkekörnchen anfüllen. Dies ist sodann eine der Ursachen, dass in diesem Falle, wenn auch die meisten Knospen des Triebes sprossen, einzelne sich nicht entwickeln.

Die Bedeutung des Diaphragma als Speicher-Gewebe ist um so wichtiger, weil sie wie aus der früher mitgetheilten Tabelle ersichtlich ist, bei solchen Pflanzen vorkommt, deren sonst sehr entwickelte Markzellen entweder sehr zeitig absterben, oder aber in Folge Zerreissung zu Grunde gehen und so als Speicher-Gewebe für die Ernährung der Pflanzen keine Bedeutung haben können. Dieses abgestorbene Mark ersetzen die Diaphragmen und wir müssen sie für die Vertreter des ganzen Markes halten.

Das Mark als solches hat aber nur im lebenden Zustande Bedeutung, worauf auch schon DE CANDOLLE**, HARTIG***, GRIES†, PRUNET†† u. s. w. hingewiesen haben, aber die Bedeutung

---

* PRUNET l. c. p. 594.

** A. P. DE CANDOLLE: Vorl. ü. Bot. I. Bd. 1828. p. 147.

*** THEOD HARTIG: Vergl. Unters. ü. den Gehalt der wichtigsten Holzarten. Berlin 1893. p. 211.

† Ann. d. sc. nat. Ser. V. T. XIV. Paris 1872. p. 53.

†† Comptes rendus T. CX jan.—juin 1890. p. 594.

der Diaphragmen, wonach diese das ganze Mark ersetzen, hat nur GRIES geahnt, doch in seiner vollen Bedeutung nicht gewürdigt.

2. Die mechanische Bedeutung des Markdiaphragma.

Aus der Rolle, welche dem Diaphragmagewebe als Speicher-Gewebe zufällt, kann man aber noch nicht erklären die eigenthümliche Gestalt und die Anordnung seiner Zellen, die Dicke seiner Zellwände, die Anordnung der Tüpfel und auch nicht die eigenthümliche Gestalt des Gewebes selbst. Um die Bedeutung dieser Eigenthümlichkeiten des Diaphragma und seiner Zellen zu beurtheilen, habe ich jene Bedeutung gewisser Pflanzengewebe, welche die Festigkeit des Pflanzenkörpers bezwecken, in Erwägung gezogen.

SCHWENDENER* war bekanntlich der erste, der sich mit der specifisch mechanischen Einrichtung der monocotylen Gewächse befasste. Nach ihm machten Viele die die Festigkeit der Pflanzen bezweckenden Einrichtungen zum Gegenstande ihrer Forschungen. Unter diesen hat TSCHIRCH** auch darauf hingewiesen, dass nicht nur die „specifisch mechanischen Zellen", als Bastfasern, Libriform- und Collenchymzellen, sondern im Allgemeinen „die stark verdickten Zellen", welche in den Vegetationsorganen der Pflanzen vorkommen, eine mechanische Funktion haben*** und nennt solche dickwendige Zellen *Sclereiden* zum Unterschiede von den *Stereiden* (Bastfaser, Collenchym, Libriform). Nun aber entwickeln sich nach Auffassung TSCHIRCH's mechanische Elemente überall dort, wo sie aus dem Gesichtspunkte der Druck-, Zug-, und Biegungs-Festigkeit nothwendig sind, und dabei ist ganz gleichgiltig, aus welchen Gewebeelementen sie sich entwickeln.† Die Bekräftigung dieses Schlusssatzes sieht er in der Rolle der dickwandigen Zellen der Rinde.

Eine derartige Aufgabe der dickwandigen Zellen ist jedoch nicht leicht in jedem Falle nachzuweisen, denn sie ist zufällig

* Das mechanische Princip im anat. Bau d. Monocotylen Leipzig 1874.

** Beitr. z. Kenntniss d. mech. Gewebesystems d. Pflanzen. Jahrb f. wiss. Botanik. Bd. XVI. 1885. p. 73.

*** l. c. p. 306.

† l. c. p. 304.

auch durch Einrichtungen für die Vollstreckung einer andern Aufgabe verdeckt, aber die Dicke ihrer Wand zeigt jedenfalls, dass sie eine mechanische Funktion haben oder hatten und nichts zeigt darauf, dass sie nur allein zum Nahrungszwecke sich zu solchen entwickelten.*

Die Zellen, welche die Diaphragmen bilden, können zwar nicht gänzlich als Sclereiden bezeichnet werden, aber wir finden in ihrer Construction und Anordnung viele solche Merkmale, welche gerade auf ihre mechanische Bedeutung hinweisen. Für so ein Merkmal muss ich halten die in radialer Richtung gestreckte Gestalt der Diaphragmazellen**; ferner die Einkeilung der Zellen mehr oder weniger in einander (Fig. 19), welche Eigenschaften lebhaft an die Eigenheit der speziell mechanischen Elemente, der Stereiden, erinnern; sodann die beträchtliche Wanddicke, welche sich unnöthig zum Zwecke der Anhäufung von Reserve-Nahrungsstoffen entwickeln würde und die spaltartige Form der Tüpfel, wie deren Anordnung, welche letztere zum Beweise dessen dient, dass sich die moleculare Struktur der Zellwand in der Längsrichtung entwickelt hat.*** Obzwar auch dies unzweifelhaft ist, dass die Form und Anordnung der Tüpfel im Zusammenhange mit der Dehnung der Zellen in radialer Richtung und in Verbindung mit der Transportierungsrichtung des gelösten Nahrungsstoffes stehen.† Wenn wir noch ausser diesen in Berücksichtigung ziehen die Art, wie sich das aus so geformten Zellen bestehende Gewebe an die sie umgebenden Gewebe, also an die mehr oder weniger verholzte Wand der übrigen Zellen des Sprosses anschliesst, — tritt deutlich hervor, dass die Diaphragmen eine befestigende Bedeutung haben.

Noch mehr geht diese Bedeutung aus jener Thatsache hervor, dass ihre Entstehung, ihre Anordnung nur allein auf Grund mechanischer Principien erklärt werden können.†† Es tritt die

---

* Tschirch l. c. p. 306.

** Schwendener l. c. p. 4.

*** Schwendener l. c. p. 5. 8. — Dr. G. Haberlandt: Physiolog. d. Pflanzenanatomie. II. Aufl. Leipzig 1896. p. 137.

† D'Arbaumont l. c. p. 206.

†† Tschirch i. m. Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. XVI. p. 303.

deutlich ans Licht, wenn wir diese nodalen Diaphragmen mit irgendwelchem internodalen Diaphragma vergleichen. Als ausgezeichnetes Beispiel dient hiezu der Trieb von Liriodendron tulipifera L. (Fig. 12), in dessen internodalem Marke wir ziemlich dicht gut entwickelte, obgleich dünne Diaphragmen finden. Die Gestalt dieses internodalen Diaphragma ist auch höchst charakteristisch. Mit einem wenig vortretenden Kreissaum stützt es sich an die das Mark umgebende Markscheide, wird dann dünner, um in dem mittlern Theil wieder dicker zu werden (Fig. 25). Es zeigt ganz die gut construierte Form einer Aussteifungseinrichtung einer Säule. Der Anschluss seiner Zellen zeugt auch für eine solche Bedeutung, denn sie verschmälern sich stark sogleich bei ihrem Anschlusse an die Markscheide und dehnen sich in radialer Richtung bei gleichzeitiger Verdickung ihrer Wände (Fig. 26). In der Mitte des Diaphragma finden wir sodann von den jetzt erwähnten Zellen umgebene mächtig entwickelte Sclereiden (Fig. 25, 27), welche schon Zellen von ausgeprägter mechanischer Rolle sind, so dass wir das Diaphragma von Liriodendron seiner Form und Anordnung nach, wie auch wegen dem Bau seiner Zellen für eine mechanische Einrichtung halten müssen.

Eine ähnliche Bedeutung haben die in den Knoten befindlichen Diaphragmen, wenn gleich in ihnen nur tüpfelartig verdickte Zellen und nicht

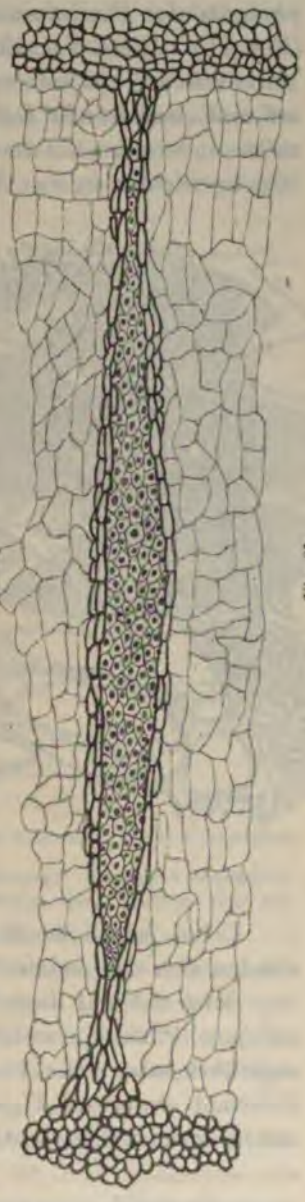


Fig. 25.

Liriodendron tulipifera L. Langschnitt eines internodalen Diaphragma. 52fach vergrössert.

zugleich auch Sclereiden vorkommen, obwohl man in dem Diaphragma der Paulownia auch Nester von Brachysclereiden findet (Fig. 11). Diese Verhältnisse und im Allgemeinen die Art des Markes selbst und seiner Construction deuten in gewissem Maasse auf eine mechanische Rolle, wenn auch diese Rolle grösstentheils nichts anderes ist, als eine Beihülfe zur Verstärkung des statischen Gleichgewichtes in den Theilen des Triebes.*

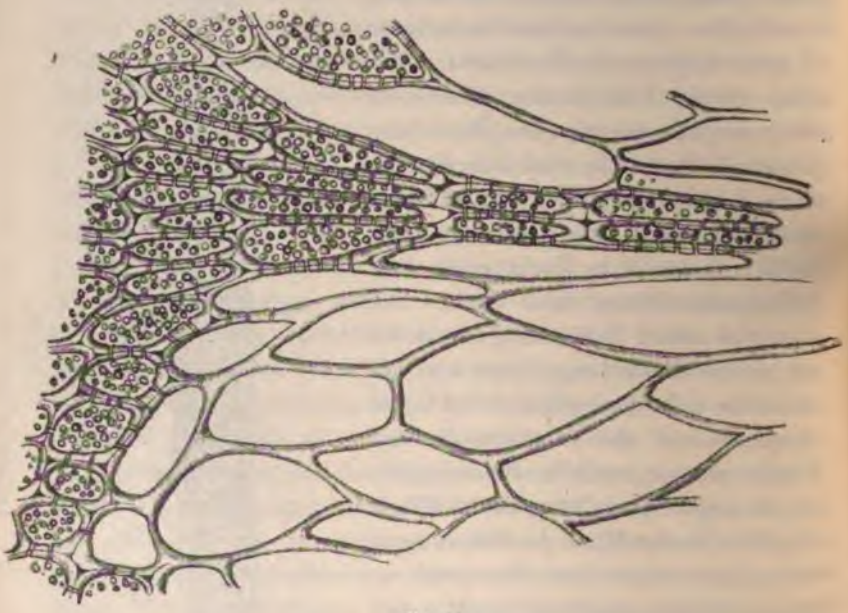


Fig. 26.

Liriodendron tulipifera L. Längsschnitt des Randes des Diaphragma. 200fach vergrössert.

Es ist jedoch die Frage, für welche Bekämpfung von Widerständen sich das nodale Diaphragma einrichtet?

Bevor ich auf diese Frage antworte, werfen wir einen Blick auf jene Pflanzen, welche ich als mit Diaphragmen versehene angeführt habe. Die 49 Arten gehören zu 13 Gattungen, deren Mehrzahl abwechselnd gegenständige Blätter besitzen. Eine Ausnahme machen hiervon Coronilla, Ficus, Vitis, Broussonetia. An

* D'Arbaumont l. c. p. 206.

dem Ende der Triebe bei Broussonetia treffen wir sehr oft eine zweireihige, gegenständige, ja sogar auch eine beinahe quirlständige Blattstellung, so dass wir bei dieser Gattung füglich die spirale Blattstellung unberücksichtigt lassen können. Vitis hat eine zweireihig wechselständige Blattstellung, an den Knoten jedoch steht den Blättern gegenüber der Blütenstand oder die Ranke, welche nur auf jedem dritten Knoten fehlt. Einigermaassen nähert sich

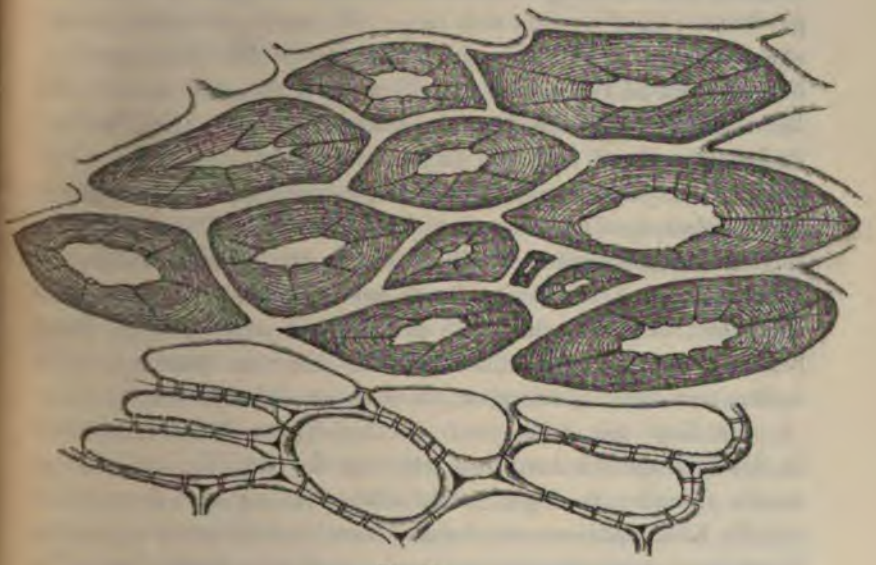


Fig. 27.

Liriodendron tulipifera L. Zellen des mittleren Theiles des Diaphragma. 450fach vergrössert.

daher auch diese hinsichtlich der Belastung des Triebes der abwechselnd gegenständigen (decussierten) Blattstellung.

Ficus Carica hat eine rein wechselständige Blattstellung, das Stengelglied der jungen Sprosse ist hier jedoch ziemlich kurz, und abgesehen von seinen gut entwickelten Blättern treibt er noch an den der Spitze des Triebes nahe gelegenen Knoten seinen ziemlich schweren birnförmigen Feigen-Blüthenstand.

Coronilla emeroides Boiss. et Spren. besitzt eine wechselständige Blattstellung und der Spross ist hier höchstens mit mehreren in den Achseln der Blätter entstehenden Blüthenknospen

belastet. Diese zwei letzten können wir aus dem Gesichtspunkte der Belastung als Ausnahme betrachten, ja mit einiger Nachgibigkeit nur Coronilla allein, bei der sich jedoch das Diaphragma, wie ich es nachgewiesen habe, nur manchmal vollständig entwickelt (Fig. 6—7), was vielleicht die Ruthenform der Triebe erfordert.

Ausser der abwechselnd-gegenständigen Blattstellung ist ein anderer Charakterzug bei den diaphragmahaltigen dicotylen Holzgewächsen, nämlich dass sich unter den Arten mehrerer Gattungen auch Schling- und Kletterarten vorfinden. Solche Gattungen sind: Clematis, Ficus, Lonicera, Vitis. Kletterarten besitzen nicht: Abelia, Broussonetia, Coronilla, Deutzia, Forsythia, Leycesteria, Paulownia, Philadelphus und Symphoricarpus. Unter diesen stehen Leycesteria und Symphoricarpus in philogenetischer Beziehung nahe zu den Loniceren. Die Gattungen Paulownia und Philadelphus aber zeigen keine bestimmte Beständigkeit in Hinsicht der Bildung des Diaphragma. Von Abelia, Broussonetia, Deutzia, Forsythia habe ich schon erwähnt, dass sie abwechselnd-gegenständige Blätter besitzen und nur Coronilla allein ist diejenige Gattung, welche weder verwandte Kletterarten, noch gegenständige Blätter besitzt.

Es liegt mir ferne, auf die biologische Eigenthümlichkeit in der philogenetischen Entwickelung der Pflanzen ein entscheidendes Gewicht zu legen. Ich wollte vorzüglich nur hinweisen auf die Kletterpflanzen als solche, deren zum Klettern angepasster Holzkörper durch Markstrahlen so ziemlich zerklüftet, rissig und daher zum Aushalten eines grösseren Druckes weniger tauglich ist.* Während jedoch die Kletterpflanzen auf die Zugfestigkeit in Anspruch genommen sind, werden Triebe, welche abwechselnd-gegenständige Blätter tragen, auf grossen Seitendruck und auf Zugfestigkeit in Anspruch genommen. Dieser Seitendruck wird noch vergrössert durch die Last der in der Achsel der Blätter sich entwickelnden, oft in einer Reihe placierten Knospen, resp. Sprossen. Weil aber das zerstückelte Xylem den Druck nicht aushalten würde und in seinen Theilen leicht verschoben werden

* Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba L. Verh. d. zool.-bot. Ges. Bd. XLVII. 1887. p. 794. Die Construction des Holzes ist er geneigt als regressive Erscheinung zu erklären.

könnte, da es zum Aushalten des Druckes noch weniger geeignet ist, ist eine solche Einrichtung nothwendig, welche die Theile des Xylem zusammenhält und die Veränderung des Querschnittes verhindert.* So eine Einrichtung wäre z. B., wenn sich das Mark in seiner ganzen Ausdehnung zu einer solchen grösseren mechanischen Arbeit hierdurch einrichten würde, dass sich die Wand seiner Zellen verholzen würde und thatsächlich charakterisiert das Verholzen der Markzellen insbesondere die rankenden und Kletterpflanzen (Bignonia, Hoya).**

Die aufgezählten diaphragmahaltigen Pflanzen sind aber entweder röhrig, oder mit abgestorbenem Marke erfüllt und so sind ihre Markzellen zu eine derartigen mechanischen Aufgabe unvermögend. Diese zu ersetzen sind berufen die Diaphragmen, welche sich dieser mechanischen Arbeit durch die Form ihrer Zellen im Zusammenhange mit ihrer Anordnung angepasst haben.

Aehnliche Diaphragmen als Aussteifungseinrichtungen finden wir an zahlreichen monocotylen Wasserpflanzen, nur dass sie hier in erster Reihe nicht zur Hebung der Säulenfestigkeit, sondern zur Ausgleichung des radialen Druckes berufen sind.

Wenn wir bei den meisten der aufgezählten Arten die Zerstückelung des Xylems*** und dem gegenüber die abwechselndgegenständigen Blätter, ferner den in ihren Achseln stehenden Blüthenstand, resp. Früchte, endlich aber die an den Knoten vieler Arten zu mehreren sich entwickelnden Sprossen in Betracht ziehen, können wir leicht einsehen, dass zur Zustandebringung einer grössern Festigkeit im Xylem diese Diaphragmen vorzüglich geeignet sind, denn sie befähigen das Xylem nicht nur zum Ertragen einer grössern Last, sondern verhindern zugleich, dass die an einer Seite befindliche grössere Last im Xylem, ferner im Phloëm die Lage der zu einander gehörigen Theile, welche aus mechanischem Gesichtspunkte wichtig ist, sich verändere.†

---

* Schwendener l. c. p. 89.

** O. Warburg: Ueber Bau u. Entwickelung d. Holzes v. Caulotretus heterophyllus. Bot. Zeit. 41. Jahrg. 1883. p. 622.

*** Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba L. Verh. d. zool.-bot. Ges. Bd. XLVII. 1887. p. 794.

† Schwendener l. c. p. 84.

Ganz aus demselben Gesichtspunkte ist zu erklären, dass sich diese Diaphragmen als Aussteifungseinrichtung mit breiter Grundfläche an die röhrige Säule, also an die Xylemtheile anschliessen und zwar vorzüglich dort mit einer breiteren Sohle, wo sie eine durch grössere Last ausgeübte auseinander ziehende Kraft zu überwinden haben. Deshalb finden wir an den mehrblättrigen Knoten von Broussonetia das entwickelte Diaphragma (Fig. 5), Lonicera (Fig. 10), Forsythia (Fig. 9) ein an beiden Grundflächen gleichconcaves Diaphragma. Deshalb ist das Diaphragma bei Ficus (Fig. 3), Coronilla (Fig. 7) dicker an der Seite der Blätter, respective des Seitentriebes. Aber aus derselben Ursache hat sich das Diaphragma bei Vitis stärker entwickelt an den rankigen Knoten, als an den rankenlosen Knoten. Beachtenswerth ist noch in dieser Sache, dass sich das Diaphragma in den Knoten so placiert, dass es ein wenig über der Blattinsertion steht als Unterlage für den aus der Knospe sich entwickelnden grössern Sprosse (Fig. 3. 6).

Auf die Rolle der Diaphragmen als befestigende Aussteifungseinrichtung zeigt auch jener Umstand, dass die am stärksten entwickelten Diaphragmen in dem Mitteltheile der Triebe zu finden sind (Vitis, Ficus), dagegen in dem untersten Theile und in der Spitze die weniger entwickelten. Bekanntlich finden wir in dem mittleren Theile der Triebe die längsten Stengelglieder und so benöthigt hauptsächlich hier der Trieb die Befestigung, hingegen sind die Stengelglieder an dem untern Theile des Triebes kürzer und so auch ohne Aussteifungseinrichtung fester. Die an der Spitze des Triebes befindlichen Stengelglieder aber verkürzen sich nicht nur immer mehr, sondern es wird auch unter einem die Last geringer, die sie zu tragen haben.

Und dass die Diaphragmen wirklich die Festigkeit der Triebe, resp. ihre Fähigkeit zum Tragen von Lasten haben, kann ich auch mit Beispielen beweisen. Der junge Trieb von Ficus Carica steht steif und hält auch noch seine Spitze steif, denn sein Diaphragma bildet sich zeitig und verholzt sich zeitig. Dagegen krümmt sich an dem langen Triebe der Weinrebe die Spitze, das sog. Segel hakenartig. WIESNER eignet diese Krümmung dem positiven Heliotropismus und dem negativen Geotropismus der unteren

tengelglieder des Triebes zu, in Verbindung mit dessen Schwäche, elche unfähig ist, das ziemlich schwere Segel zu tragen.*

Ursache davon ist aber auch noch die späte Entwickelung er Diaphragmen. Wie ich nämlich oben nachgewiesen habe, ildet sich in den Trieben von Vitis das Diaphragma an dem —5ten unter der Vegetationsspitze gelegenen Knoten in solcher Art, dass es zur grössern Festigkeit dienen könne und thatsächlich sind die obersten 2—3 Knoten diejenigen, welche nach abwärts gebogen sind. Dies ist jedoch nur an den langen Frühlings- und Sommer-Trieben so, denn im Herbst biegt sich die Spitze nicht so sehr herab, ja sie steht sogar ganz gerade — deshalb, weil im Herbst, da die Pflanze schon für die Aufspeicherung des Reserve-Nährstoffes entsprechend gesorgt hat, der vorbereitete Nahrungsstoff direkt zum Ausbau der jüngsten Diaphragmen verbraucht werden kann, und indem dies geschieht, erlangen auch die höchsten Knoten des Triebes die nöthige Festigkeit zum Geradhalten des Segels. Weniger oder überhaupt gar nicht herabgebogen ist die Spitze der kurzen, resp. der Achselsprosse, denn hier sind die Stengelglieder um vieles kürzer, als an den langen Trieben und die Diaphragmen bilden sich auch früher aus.

Bei den meisten Clematis-Arten entwickelt sich an den meisten das Diaphragma ziemlich zeitig und gut — deshalb steht das Ende ihrer Triebe gerade und steif, hingegen entwickelt sich das Diaphragma bei Clematis Vitalba spät und auch dann nicht genug fest, weshalb auch die Spitze des Triebes nicht steif, sondern mehr oder weniger schief steht, wie an den Kletterpflanzen. Aehnlich zu diesem ist das Verhalten bei Lonicera Caprifolium.

Für die mechanische Bedeutung des Diaphragma zeugt auch noch dieser Umstand, dass es sich an den langen Trieben stärker entwickelt als an den kurzen; was wir auch für ganz natürlich halten müssen, denn an den kurzen Trieben fallen ja wegen Kürze der Stengelglieder die Diaphragmen um vieles näher zu einander. Dass die kurzen Triebe eine solche mechanische Einrichtung

* Dr. J. Wiesner: Die heliotropischen Erscheinungen im Pflanzenreiche. I. Theil. Denkschriften d. kaiserl. Akad. der Wiss. Math.-Natur-wiss. Classe. Bd. 43. Wien 1882. p. 28.

auch entbehren können, ist daraus zu ersehen, dass sie in den Knoten der kurzen Triebe mancher sonst mit nodalem Diaphragma versehenen Pflanzen auch fehlt, z. B. bei der Lonicera alpina L.

In welcher Beziehung die Entwickelung und Bildung der Diaphragma zur Bildung und Anordnung der Elemente des Xylem und des Phloëm stehen, lasse ich jetzt ausser Acht, weil der Beweis, ob die Bildung und Entwickelung des Diaphragma mit der regressiven* oder mit der progressiven Entwickelung der Gewebe des Pflanzenstengels in Verbindung steht zur Zeit wegen Mangelhaftigkeit der Angaben noch nicht geliefert werden kann; aus eben denselben Gründen habe ich auch ausser Acht gelassen die nur mit dem Mikroskope bemerkbaren nodalen Diaphragmaspuren, wie auch die internodalen Diaphragmaspuren.

Alles Vorhergehende überblickend und zusammenfassend, können wir das Mark-Diaphragma der dicotylen Holzgewächse als eine solche Einrichtung bezeichnen, welche sich in erster Reihe aus dem Gesichtspunkte der Ernährung, in zweiter Reihe aber aus dem Gesichtspunkte der Festigkeit entwickelt. Und zwar in dieser Art, dass im jungen Alter des Triebes, also in den ersten 1—2 Jahren der Vegetation hauptsächlich seine mechanische Rolle Wichtigkeit erlangt, später nimmt diese mit dem Alter des Triebes ab und es wird immer wichtiger seine Speicher-Rolle, bis es dann in älteren Trieben nur allein in letzterer Hinsicht Wichtigkeit behält. Mit dieser doppelten Rolle steht auch im Zusammenhange die Gestaltung und Lebensdauer des Diaphragma. Auf die Eigenthümlichkeit seiner Gestalt habe ich schon mehrmals hingewiesen, nur noch bezüglich der Lebensdauer des Diaphragma muss ich bemerken, dass seine mittleren Zellen in solchen Fällen, wo das Diaphragma als mechanisches Mittel nicht mehr nöthig ist und als Speicher-Gewebe auch weniger in Anspruch genommen ist, in den älteren Trieben stellenweise absterben (Forsythia, Paulownia).

Diese doppelte physiologische Rolle bestimmt dann auch den

---

* Dr. F. Krasser: Zerklüftetes Xylem bei Clematis Vitalba. Verh. der zool.-bot. Ges. Bd. XXXVII, 1887. p. 794.

Ort für das Diaphragma. Als Organ für Speicherung und als mechanisches Organ gehört ihm mehr der Platz in dem Knoten, dagegen, wenn es nur mechanische Verrichtung hat, dann entspricht seine Placierung diesem Zwecke auch in der Länge der Stengelinternodien (Liriodendron).

Dass ein und dasselbe Gewebe zur Verrichtung von zweierlei physiologischen Aufgaben berufen ist, kann nicht im Geringsten überraschen, denn die bisherigen anatomisch-physiologischen Forschungen haben ja auf mehrere solche Gewebe hingewiesen, welche nicht eine, sondern zwei, ja mehr Arbeiten zu verrichten berufen sind.

3. Das Markdiaphragma als Schutzeinrichtung.

Das Diaphragma hat ausser den an ihm bis jetzt gewürdigten Erscheinungen auch noch in jener Hinsicht eine Bedeutung, dass es als Hinderniss gegen das Eindringen fremder Stoffe in das Mark, in jenem Falle dient, wenn es durch zufälligen Bruch oder zufolge des Zugrundegehens späterer Sprosstheile äusseren Einflüssen ausgesetzt ist.

GOEBEL hat nachgewiesen, dass das Diaphragma monocotyler Pflanzen für die Gase permeabel ist, aber dem Eindringen des Wassers widersteht. Dasselbe gilt auch von diesen Diaphragmen. Durch das Diaphragma von Vitis nämlich konnte es mir nicht gelingen, selbst mit zwei Atmosphärendruck Wasser durchzupressen, obgleich ich diesen Versuch wiederholt und durch längere Zeit fortgesetzt habe. Diese Bedeutung der Diaphragmen kommt vorzüglich in jenen Pflanzen zur Geltung, bei welchen dem unbegrenzten Wachsthum ihrer Triebe nur die ungünstige Witterung Schranken setzt. Bei diesen entwickelt sich nicht das interrameale Mark und nach dem Aussterben ihrer nicht ausgebildeten Triebe beschützen nur die nodalen Diaphragmen das Mark, indem sie das interrameale Diaphragma ersetzen (Vitis). Hierdurch ist auch das Eindringen des Wassers zwischen die bereits abgestorbenen Markzellen gehindert, und das mit Luft erfüllte Markzellen-Gerippe ist vor Fäulniss bewahrt.

Diese schützende Rolle wäre die dritte Bedeutung des Diaphragma.

4. Das Markdiaphragma als systematisches Merkmal.

Eine weitere wohl nicht auf das Leben der Pflanzen Bezug habende Bedeutung des Diaphragma ist diejenige, von welcher die Pflanzen-Systematik ihren Nutzen hat. Weil es in dem Stengel der aufgezählten 49 Arten, respective 13 Gattungen vorkommt, gehört es ohne Zweifel zu deren diagnostischen Merkmalen. Wenn wir mit grösserer Aufmerksamkeit und Genauigkeit das Diaphragma untersuchen, finden wir, dass sich das Diaphragma in seiner Gestalt und Dimension nach Gattungen, aber auch nach Arten verändert. Und so kann es nicht nur als generisches, sondern auch als specifisches Merkmal angewendet werden, wovon übrigens die beiliegenden Figuren Nr. 1—13 den nöthigen Beweis geben. Nach meinen bisherigen Untersuchungen ist das Diaphragma als generisches Merkmal beständiger und sicherer, denn als specifisches Merkmal. Einfach deshalb, weil bei den specifischen Merkmalen die Dimensionen von Wichtigkeit sind, diese sich aber — so scheint es — in Folge von Kreuzungen sehr schnell, ja sogar zufällig auch unter dem Einfluss der Cultur ebenso verändern, wie die äussern Merkmale. Zuerst hat MILLARDET* versucht das Diaphragma als Unterscheidungs-Merkmal zu benützen, nach ihm haben es auch DIPPEL** und KOEHNE*** benützt für die Arten der Gattung Vitis, die andern Gattungen betreffend haben bis jetzt systematische Werke ersten Ranges das Diaphragma ausser Acht gelassen, obwohl auch dieses im Verhältnisse zu den übrigen, insbesondern zu den äusseren Organen der Pflanzen eines der beständigsten und bestimmtesten Merkmale ist.

Aus dieser Ursache ist es wünschenswerth, dass dem Diaphragma der dicotylen Holzgewächse eine grössere Aufmerksamkeit zugewendet werde, als es bis jetzt geschah.

---

* La vigne americaine. Paris 1878. p. 222. — Études sur les vignes d'origine americaine 1876.

** Handbuch der Laubholzkunde. Bd. 2. Berlin 1892. p. 544.

*** Deutsche Dendrologie. Stuttgart 1893. p. 401.

12.

GRUPPEN INDUCIERTER SUBSTITUTIONEN.

Von GUSTAV RADOS,

c. M. der ung. Akademie und Professor am Polytechnikum Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 14. November 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítő“ (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, pp. 44—65, 1899

Die vorliegende Arbeit handelt von den Beziehungen, welche zwischen dem zur Herstellung der inducierten Substitutionen dienenden Algorithmus (wir werden denselben im Nachfolgenden der Kürze wegen schlechthin Induction nennen) und denjenigen elementaren Operationen bestehen, vermittelst deren man lineare Substitutionen zu verknüpfen pflegt. Von den letzteren muss insbesondere die Zusammensetzung oder Multiplication der linearen Substitutionen hervorgehoben werden. Betreffs dieser stellt sich nun die Frage ein, wie man die Inducierte der zusammengesetzten Substitution aus den inducierten Substitutionen der Componenten herstellen könne? Ob nicht etwa die inducierte Substitution des Productes zweier linearer Substitutionen mit dem Producte der inducierten Substitutionen der Factoren gleich ist? In der That zeigt die eingehende Erörterung, dass diese Frage — unabhängig von der speciellen Wahl der arithmetischen Ausrüstung der bei der Induction verwendeten algebraischen Form — unbedingt zu bejahen ist, falls man bei der Ausführung der Multiplication der inducierten Substitutionen die gehörige Reihenfolge beobachtet.

Auf diese Weise gelangt man zu der Begriffsbildung der inducierten Gruppe, die zur Inductorgruppe in isomorpher Beziehung steht und hiermit auf ein Uebertragungsprincip leitet.

Vermittelst dieses Principes gelingt nämlich die Uebertragung aller Resultate, die bezüglich der linearen Gruppen einer Mannigfaltigkeit von niederer Dimension gefunden wurden, auf die linearen Gruppen gewisser Mannigfaltigkeiten von höherer Dimension, ohne dass hierbei neue Betrachtungen angestellt werden müssten, lediglich auf elementarem, gewissermassen mechanisch-rechnerischem Wege.

In der Theorie der linearen Substitutionen kommt ferner die Transposition derselben in Betracht, vermittelst welcher man die conjugierte Substitution einer gegebenen Substitution bildet. Es fragt sich nun, ob auch die Transposition und die Induction vertauschbare Operationen sind? Oder, was dasselbe ist, ob die inducierten Substitutionen conjugierter Substitutionen abermals conjugiert sind? Es zeigt sich nun, dass dies im Allgemeinen nicht der Fall ist, und nur in dem Falle statt hat, dass wir die arithmetische Ausrüstung der zur Induction verwendeten algebraischen Form in einer gewissen speciellen Weise wählen. Nimmt man nämlich die Zahlencoefficienten entsprechend der von SYLVESTER herrührenden präparierten Form an, so kann bei der Induction nicht nur — wie das schon SYLVESTER* gezeigt hat — die Eigenschaft der Contragredienz, sondern auch die Beziehung conjugierter Formen aufrecht erhalten werden.

Die aus der präparierten Form abgeleiteten inducierten Substitutionen, welche wir der Kürze halber als präparierte inducierte Substitutionen bezeichnen werden, führen endlich zur Erörterung der Frage, ob inducierte Gruppen einer orthogonalen Gruppe abermals orthogonal sind? Beschränkt man sich auf präparierte inducierte Substitutionen, so ist auch diese Frage unbedingt zu bejahen, allein bezüglich nicht präparierter Substitutionen unbedingt zu verneinen.

Den inducierten Substitutionen kommt auch in der Theorie derjenigen allgemeinen Gruppen eine wichtige Rolle zu, die aus automorphen Substitutionen einer quadratischen Form bestehen. Auf die eingehende Ausführung dieser Beziehungen hoffe ich in einer anderen Abhandlung zurückkehren zu können.

---

* SYLVESTER, „Sur les actions mutuelles des formes invariantives". Crelle, Journal, Bd. 83, p. 93.

I. Inducierte Substitutionen zusammengesetzter Substitutionen.

1. Es sei wieder* die algebraische Form n-ten Grades der Unbestimmten

$$x_1, x_2, \ldots, x_k,$$

in nachfolgender Form angesetzt:

$$f(x) = \mu_0 u_0 p_0 + \mu_1 p_1 u_1 + \cdots \mu_{r-1} u_{r-1} p_{r-1}$$
$$\left(r = \binom{n+k-1}{n}\right)$$

in welcher die Reihe der Zahlencoefficienten

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{r-1},$$

d. i. die arithmetische Ausrüstung derselben, der algebraischen Form, noch vorläufig ganz beliebig gewählt werde, die literalen Coëfficienten

$$u_0, u_1, \ldots, u_{r-1}$$

wieder als Unbestimmte gelten und schliesslich

$$p_0, p_1, \ldots, p_{r-1}$$

die Reihe derjenigen verschiedenen Potenzproducte

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_k^{a_k}$$

bedeutet, für die

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$$

ist.

Diese Form sei als die Form n-ten Grades der Unbestimmten x kurz durch $f(x)$ bezeichnet; dieselbe Form kann aber auch als lineare Form der u aufgefasst werden, und in dieser Auffassung möge sie durch $f(u)$ bezeichnet werden. Unterzieht man nun die Form f der linearen Substitution

$$x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \cdots + a_{ik} y_k \quad \ldots \quad (S)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

so möge diese in die transformierte Form

$$F(y) = \mu_0 U_0 P_0 + \mu_1 U_1 P_1 + \cdots + \mu_{r-1} U_{r-1} P_{r-1} \quad (1)$$

übergehen. Deren literale Coefficienten können — wie bekannt — folgendermaassen ausgedrückt werden:

$$U_j = s_{j0} u_0 + s_{j1} u_1 + \cdots + s_{jr-1} u_{r-1}, \quad \ldots \quad I_n(S)$$
$$\left(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ r = \binom{n+k-1}{n}\right)$$

* Siehe Math. u. Naturwiss. Berichte, Bd. XVI, p. 241.

wo die Coëfficienten $s_{\alpha\beta}$ die homogenen inducierten Ausdrücke n-ten Grades der Coëfficienten a_{ij} sind.

Das System dieser linearen Gleichungen ist es, das die inducierte Substitution n-ten Grades von S, d. h. $I_n(S)$, liefert.

Die Gleichung unter (1) können wir, von unserer abgekürzten Bezeichnung Gebrauch machend, auch so schreiben:

$$f(S(x)) = f\{(I_n(S))^{-1}\},$$

wo $I_n((S))^{-1}$ die Inversion der inducierten Substitution $I_n(S)$ bedeutet.

Sei nunmehr

$$x_i = \beta_{i1}y_1 + \beta_{i2}y_2 + \cdots + \beta_{ik}y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

eine beliebige andere lineare Substitution k-ter Dimension, so können wir dem entsprechend schreiben

$$f(T(x)) = f\{(I_n(T))^{-1}(u)\}.$$

Wenn wir nun auf die Form f die durch die Zusammensetzung der Substitutionen S und T gebildete Substitution ST ausüben, so ist zuvörderst wieder

$$f(ST(x)) = f\{(I_n(ST))^{-1}(u)\},$$

da aber andererseits

$$f(ST(x)) = f\{(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}(u)\}$$

ist, darum wird

$$I_n(ST)f(u) = f\{(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}(u)\} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Ist $[I_n(ST)]^{-1}$, die inverse Substitution von $I_n(ST)$, ausführlich geschrieben:

$$u_i = \sigma_{i0}U_0 + \sigma_{i1}U_1 + \cdots + \sigma_{i\nu-1}\sigma_{\nu-1},$$

und $(I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1}$ ausführlich geschrieben

$$u_i = \tau_{i0}U_0 + \tau_{i1}U_1 + \cdots + \tau_{i\nu-1}U_{\nu-1}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, \nu-1)$$

so folgt aus der Gleichung (2) das Bestehen der Gleichungen

$$\mu_0\sigma_{0j}p_0 + \mu_1\sigma_{1j}p_1 + \cdots + \mu_{\nu-1\,j}p_{\nu-1} =$$
$$= \mu_0\tau_{0j}p_0 + \mu_1\tau_{1j}p_1 + \cdots + \mu_{\nu-1\,j}p_{\nu-1};$$
$$(j = 0, 1, \ldots, \nu-1)$$

da aber die Potenzenproducte

$$p_0, p_1, \cdots, p_{\nu-1}$$

linear unabhängig sind, ist diese Gleichung nur so möglich, dass

$$\sigma_{0j} = \tau_{0j},\ \sigma_{1j} = \tau_{1j}, \cdots, \sigma_{\nu-1\,j} = \tau_{\nu-1\,j}$$
$$(j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

ist; dann ist aber

$$\{I_n(ST)\}^{-1} = (I_n(S))^{-1}(I_n(T))^{-1} = (I_n(T)\,I_n(S))^{-1}$$

und, da die Inversionen gleicher Substitutionen wiederum gleich sind, ist

$$I_n(ST) = I_n(T) \cdot I_n(S).$$

Hieraus ergiebt sich der folgende Satz:

*„Die inducierte Substitution eines Productes ist mit dem Producte gleich, das aus den inducierten Substitutionen der Factoren in umgekehrter Reihenfolge gebildet wird."**

Es ist vielleicht nicht überflüssig, diese Verhältnisse an einem speciellen Fall auch durch Berechnung zu erläutern.

Seien die beiden Substitutionen S und T ausführlich geschrieben

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

alsdann ist

$$ST = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix},$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 \\ B_1 &= a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ A_2 &= a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 \\ B_2 &= a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{aligned}$$

ist.

---

* Wird die inverse Substitution von $I_n(S)$ durch $i(S)$ bezeichnet, so ergeben sich Substitutionen, deren Multiplicationsgesetz noch einfacher ist, nämlich:

$$i(ST) = [I_n(ST)]^{-1} = [I_n(T)\,I_n(S)]^{-1} = [I_n(S)]^{-1}\,[I_n(T)]^{-1},$$

so dass

$$i(ST) = i(S)\,i(T)$$

ist.

Die inducierten Substitutionen zweiten Grades von S und T sind die folgenden:

$$I_2(S) = \begin{pmatrix} a_1^2 & 2a_1a_2 & a_2^2 \\ a_1b_1 & a_1b_2 + a_2b_1 & a_2b_2 \\ b_1^2 & 2b_1b_2 & b_2^2 \end{pmatrix},$$

$$I_2(T) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2 \\ \beta_1^2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{pmatrix}.$$

Dann wird die ausführliche Form des Productes $I_2(T)\,I_2(S)$ diese sein:

$$I_2(T)\,I_2(S) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

wo

$$c_{11} = a_1^2\alpha_1^2 + 2a_1b_1\alpha_1\alpha_2 + b_1^2\alpha_2^2 = (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)^2 = A_1^2$$

$$c_{12} = 2[a_1a_2\alpha_1^2 + a_1b_2\alpha_1\alpha_2 + a_2b_1\alpha_1\alpha_2 + b_1b_2\alpha_2^2] =$$
$$= 2(a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_2\alpha_1 + b_2\alpha_1) = 2A_1A_2$$

$$c_{13} = a_2^2\alpha_1^2 + 2a_2b_2\alpha_1\alpha_2 + b_2^2\alpha_2^2 = (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2)^2 = A_2^2$$

$$c_{21} = a_1^2\alpha_1\beta_1 + a_1b_1\alpha_1\beta_2 + a_1b_1\alpha_2\beta_1 + b_1^2\alpha_2\beta_2 =$$
$$= (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_1\beta_1 + b_1\beta_2) = A_1B_1$$

$$c_{22} = 2a_1a_2\alpha_1\beta_1 + a_1b_2\alpha_1\beta_2 + a_1b_2\alpha_2\beta_1 + a_2b_1\alpha_1\beta_2 + a_2b_1\alpha_2\beta_1 +$$
$$+ 2b_1b_2\alpha_1\beta_2 = (a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) + (a_2\alpha_1 +$$
$$+ b_2\alpha_2)(a_1\beta_1 + b_1\beta_2) = A_1B_2 + A_2B_1$$

$$c_{23} = a_2^2\alpha_1\beta_1 + a_2b_2\alpha_1\beta_2 + a_2b_2\alpha_2\beta_1 + b_2^2\alpha_2\beta_2 =$$
$$= (a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) = A_2B_2$$

$$c_{31} = a_1^2\beta_1^2 + 2a_1b_1\beta_1\beta_2 + b_1^2\beta_2^2 = (a_1\beta_1 + b_1\beta_2)^2 = B_1^2$$

$$c_{32} = 2[a_1a_2\beta_1^2 + a_1b_2\beta_1\beta_2 + a_2b_1\beta_1\beta_2 + b_1b_2\beta_2^2] =$$
$$= 2(a_1\beta_1 + b_1\beta_2)(a_2\beta_1 + b_2\beta_2) = 2B_1B_2$$

$$c_{33} = a_2^2\beta_1^2 + 2a_2b_2\beta_1\beta_2 + b_2^2\beta_2^2 = (a_2\beta_1 + b_2\beta_2)^2 = B_2^2$$

so dass

$$I_2(T)\,I_2(S) = \begin{pmatrix} A_1^2 & 2A_1A_2 & A_2^2 \\ A_1B_1 & A_1B_2 + A_2B_1 & A_2B_2 \\ B_1^2 & 2B_1B_2 & B_2^2 \end{pmatrix},$$

das ist aber in der That die inducierte Substitution der Substitution ST, so dass also

$$I_2(T)\,I_2(S) = I_2(ST)$$

ist.

2. Durch vollständige Induction überzeugt man sich, dass

$$I_n(S_1 S_2 \dots S_{m-1} S_m) = I_n(S_m)\,I_n(S_{m-1}) \dots I(S_2)\,I(S_1);$$

setzt man hierin

$$S_1 = S_2 = \cdots S_m = S,$$

so ergiebt sich:

$$I_n(S_m) = [I_n(S)]^m;$$

dies kann durch den nachstehenden Satz ausgedrückt werden:

Die inducierte Substitution der m-ten Potenz (m ist eine positive ganze Zahl) *einer linearen Substitution ist gleich der m-ten Potenz der inducierten Substitution.*

3. *Die inducierte Substitution der Einheits-Substitution.* Als Einheits-Substitution (identische Substitution) k-ter Dimension, E_k, sei die lineare Substitution

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (E_k)$$

Da

$$f(E_k(x)) = f(x) = f(u)$$

und andererseits

$$f(E_k(x)) = I_n(E_k)\,f(u),$$

so muss

$$I_n(E_k)\,f(u) = f(u)$$

sein, woraus man wieder vermöge der linearen Unabhängigkeit der Potenzproducte

$$p_0, p_1, \cdots, p_{\nu-1}$$

schliesst, dass

$$I_n(E_n) = E_{\binom{n+k-1}{n}}$$

ist, d. h., dass jede inducierte Substitution der Einheits-Substitution wiederum eine Einheits-Substitution ist.

4. *Die inducierte Substitution der inversen Substitution.* Sei

$$ST = E_k,$$

so dass

$$T = S^{-1}$$

ist, dann folgt aus den Identitäten

$$I_n(ST) = I_n(E_i) = E_{\binom{n+k-1}{n}}$$

und

$$I_n(ST) = I_n(T)\, I_n(S),$$

dass

$$I_n(T)\, I_n(S) = E_{\binom{n+k-1}{n}},$$

und hieraus

$$I_n(S) = [I_n(S)]^{-1},$$

d. h.

$$I_n(S^{-1}) = [I_n(S)]^{-1};$$

hiernach *ist die Inducierte der inversen Substitution gleich der inversen Substitution der inducierten Substitution.*

Da ferner

$$I_n(S^{-m}) = I_n[(S^{-1})^m] = [I_n(S^{-1})] = \{[I_n(S)^{-1}]\}^m = [I_n(S^m)]^n$$

ist, *darum bleibt der auf die inducierte Substitution der Potenzsubstitution bezügliche Satz auch für den Fall gültig, dass der Exponent eine beliebige ganze Zahl ist.*

Nebenher bemerkt, folgt aus den Sätzen, die sich auf die Potenzen von Substitutionen und die Einheit-Substitution beziehen, sogleich, dass jede inducierte Substitution einer cyklischen Substitution wieder cyklisch ist. Ist nämlich

$$C^a = E_k,$$

so ist auch

$$I_n(C^a) = I(E_k),$$

d. h.

$$\{I_n(C)\}^a = E_{\binom{n+k-1}{n}},$$

woraus der cyklische Charakter von $I_n(C)$ in Evidenz tritt.

5. *Inducierte Gruppen.*

Sei nunmehr

$$S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_j, \ldots \quad (G)$$

die aus beliebigen homogenen linearen Substitutionen k-ter Dimension bestehende Gruppe, dann kann zu jeder dieser Substitutionen je eine inducierte Substitution n-ten Grades gebildet werden, so dass sich die Reihe der Substitutionen von $\binom{n+k-1}{n}$-ter Dimension ergiebt:

$$I_n(S_1), I_n(S_2), \ldots, I_n(S_i), \ldots, S_n(S_j), \ldots \quad [I_n(G)]$$

Von dieser Reihe, $I_n(G)$, können wir jetzt leicht beweisen, dass sie wieder den Gruppencharakter hat. Sind nämlich $I_n(S_i)$ und $I_n(S_j)$ zwei beliebige Substitutionen der Reihe $I_n(G)$, dann ist ihr Product

$$I_n(S_i)\, I_n(S_j) = I_n(S_j S_i)$$

ebenfalls in der Reihe $I_n(G)$ enthalten, da ja mit S_j und S_i zugleich auch $S_j S_i$ in G vorkommt und $I_n(G)$ die sämmtlichen inducierten Substitutionen von G enthält.

Die Gruppe $I_n(G)$ möge als die *inducierte Gruppe* der *Inductor-Gruppe* G benannt werden. Die gefundene Thatsache lässt sich durch folgenden Satz ausdrücken:

Die inducierten Substitutionen der Elemente einer aus homogenen linearen Substitutionen bestehenden Gruppe bilden abermals eine Gruppe, die mit der ursprünglichen Gruppe isomorph ist.

6. *Ist G die allgemeinste lineare Gruppe, dann ist der zwischen G und $I_n(G)$ bestehende Isomorphismus meriedrisch, und zwar auf die Weise, dass während einer jeden Substitution von G in $I_n(G)$ eine und nur eine Substitution entspricht, jeder Substitution der Gruppe $I_n(G)$ in G n Substitutionen entsprechen.*

Ist nämlich

$$I_n(S) = A$$

und S' eine beliebige andere Substitution, für die gleichfalls

$$I_n(S') = A$$

ist, dann hat man

$$I_n(S')\,\{I_n(S)\}^{-1} = E_r;$$

da jedoch

$$\{I_n(S)\}^{-1} = I_n(S^{-1})$$

und

$$I_n(S')\, I_n(S^{-1}) = I_n(S^{-1}S')$$

ist, so muss

$$I_n(S^{-1}S') = E_r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

sein. Dieses Resultat veranlasst uns dazu, dass wir uns mit der Gleichung

$$I_n(C) = E_r$$

eingehender befassen, in der wir die Substitution C als Unbekannte betrachten. Die Substitution C kann in der Form

$$x_i = c_i' y_1 + c_i'' y_2 + \cdots + c_i^{(k)} y_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k)$$

geschrieben werden, so dass als die eigentlichen Unbekannten des Problems: die Coëfficienten

$$c_i^{(j)}\qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k)$$

erscheinen. Wird die Substitution C auf irgendeine Form n-ten Grades ausgeübt, so wird diese im Sinne der Relation

$$I_n(C) = E,$$

diese Form in sich selbst transformieren. Benützen wir als algebraische Form n-ten Grades die n-te Potenz

$$f(x) = f(u) = (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k)^n,$$

in welcher die Coëfficienten

$$u_1, u_2, \ldots, u_k$$

Unbestimmte seien. Wird hierauf die Substitution C angewendet, so muss die transformierte Form mit der ursprünglichen identisch sein, d. h. es muss die Relation

$$\{(u_1 c_1' + u_2 c_2' + \cdots + u_k c_k')x_1 + (u_1 c_1'' + u_2 c_2'' + \cdots + u_k c_k'')x_2 + \cdots + \\ + (u_1 c_1^{(k)} + u_2 c_2^{(k)} + \cdots + u_k c_k^{(k)})x_k\}^n \equiv (u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k)^n$$

identisch bestehen. Dann muss aber zugleich

$$\begin{aligned} (u_1 c_1' + u_2 c_2' + \cdots + u_k c_k')^n &= u_1^n \\ (u_1 c_1'' + u_2 c_2'' + \cdots + u_k c_k'')^n &= u_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ (u_1 c_1^{(k)} + u_2 c_2^{(k)} + \cdots + u_k c_k^{(k)})^n &= u_k^n \end{aligned}$$

sein, was bei der Unbestimmtheit der u nur so möglich ist, dass

$$\begin{aligned} c_1'^n = 1,\quad & c_2' = 0, \ldots, c_k' = 0 \\ c_1'' = 0,\quad & c_2'' = 1, \ldots, c_k'' = 0 \\ \cdots\cdots & \cdots, \cdots \\ c_1^{(k)} = 0,\quad & c_2^{(k)} = 0, \ldots, (c_k^{(k)})^n = 1 \end{aligned}$$

ist.

Hieraus ergiebt sich für das Coëfficientensystem das Resultat, dass ausser der in der Hauptdiagonale stehenden Elemente, die n-te Einheitswurzeln sind, alle übrigen Elemente gleich Null sind. C hat demnach diese Form:

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon_k \end{pmatrix},$$

wo

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$$

n-te Einheitswurzeln sind. Diese letzteren lassen aber auch noch eine nähere Bestimmung zu. Da nämlich C die Form f in sich selbst transformiert, muss die Relation

$$\sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_k!}\, \varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_k^{i_k}\, u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_k^{i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k} =$$
$$= \sum \frac{n!}{i_1!\, i_2! \dots i_k!}\, u_1^{i_1} u_2^{i_2} \dots u_k^{i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_1} \dots x_k^{i_k}$$

identisch bestehen, woraus wieder hervorgeht, dass

$$\varepsilon_1^{i_1} \varepsilon_2^{i_2} \dots \varepsilon_k^{i_k} = 1,$$

wofern

$$i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$$

ist: dann ist aber

$$\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^{n-1} = 1,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

oder wenn an beiden Seiten mit ε_β multipliciert wird,

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n)$$

ist, so dass sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$I_n(C) = E$$

in der Form

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \varepsilon^\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon^\mu & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \varepsilon^\mu \end{pmatrix}$$

erscheinen, worin ε eine primitive Einheitswurzel bedeutet. Wenn wir also Γ_1 kurzweg mit Γ bezeichnen, so liefert die Reihe der Substitutionen

$$E_k, \Gamma, \Gamma^2, \dots, \Gamma^{n-1}$$

die sämmtlichen Lösungen der Gleichung

$$I_n(C) = E_k.$$

Wenn also vermöge des Isomorphismus von $I_n(G)$ und (G) der Substitution A in $I_n(G)$ die Substitution S in der Gruppe G entspricht, so sind, wie aus der Gleichung unter (I) und aus den Betrachtungen über die Gleichung $I_n(C) = E_r$ ersichtlich ist, die sämmtlichen der Substitution A in der Gruppe G entsprechenden Substitutionen in der Reihe

$$S,\ \Gamma S,\ \Gamma^2 S,\ \ldots,\ \Gamma^{n-1} S$$

enthalten. Demzufolge ist der Isomorphismus, der zwischen dem Inductor G und den inducierten Gruppen $I_n(G)$ besteht, in der That solcher Art, dass er zwischen den Substitutionen dieser beiden Gruppen eine ein-$(n-1)$-deutige Beziehung herstellt.

7. Die im Vorhergehenden gefundenen Sätze führen zu einem wichtigen Uebertragungsprincip, dessen Ursprung in der einfachen Bemerkung zu finden ist, dass die Inducierte irgendeiner endlichen Gruppe wiederum endlich ist. So können z. B. das Analogon der bekannten endlichen Gruppen des binären Gebietes, die der cyklischen, der Diëder-, Tetraëder-, Oktaëder-, Ikosaëder-Gruppen bezüglich gewisser höherer Dimensionen ohne Benützung irgendwelcher neuen Betrachtungen lediglich durch Bildung inducierter Gruppen aufgestellt werden.

Wie es aber unmittelbar ersichtlich ist, giebt der Uebergang auf die inducierte Gruppe bezüglich irgendwelcher Classe von Gruppen ein Uebertragungsprincip von niederer Dimension auf eine von höherer Dimension, da die Dimensionenzahl der inducierten Substitution $\binom{n+k-1}{n}$ ist, wenn nur $n>1$ ist, grösser als die Dimensionenzahl k der ursprünglichen Substitution.

II. Inducierte Substitutionen conjugierter Substitutionen.

Wählt man in der Form

$$f = \mu_0, u_0 p_0 + \mu_1 u_1 p_1 + \cdots + \mu_{r-1} u_{r-1} p_{r-1},$$

die bei der Induction eine vermittelnde Rolle inne hat, die Zahlencoëfficienten

$$\mu_0,\ \mu_1,\ \ldots,\ \mu_{r-1}$$

ganz willkürlich, so können die einfachsten Eigenschaften sowohl

der Formen, als auch der mit ihnen inducierten Substitutionen analytisch oft nur auf complicierte Weise ausgedrückt werden, oder sie verschwinden auch oft gänzlich. Wird z. B. die Form

$$f = u_0 x_1^3 + \binom{3}{1} u_1 x_1^2 x_2 + \binom{3}{2} u_2 x_1 x_2^2 + \binom{3}{3} x_3 x_2^3$$

zu Grunde gelegt, so ist die inducierte Substitution dritten Grades $I_3(S)$ der Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S)$$

ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + 3\alpha_1^2\alpha_2 \quad\quad u_1 + 3\alpha_1\alpha_2^2 \quad\quad u_2 + \alpha_2^2 \quad u_3 \\
U_1 &= \alpha_1^2\beta_1 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_2 + \alpha_2^2\beta_2 u_3 \\
U_2 &= \alpha_1\beta_2^2 u_0 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \alpha_2\beta_2^2 u_3 \\
U_3 &= \beta_1^3 \quad u_0 + 3\beta_1^2\beta_2 \quad\quad u_1 + 3\beta_1\beta_2^2 \quad\quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3,
\end{aligned}$$

während die inducierte Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ y_1 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S')$$

der conjugierten Substitution S, $I_3(S')$ ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + 3\alpha_1^2\beta_1 \quad\quad u_1 + 3\alpha_1\beta_1^2 \quad\quad u_2 + \beta_1^3 \quad u_3 \\
U_1 &= \alpha_1^2\alpha_2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_2 + \beta_1^2\beta_2 u_3 \\
U_2 &= \alpha_1\alpha_2^2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \beta_1\beta_2^2 u_3 \\
U_3 &= \alpha_2^3 \quad u_0 + 3\alpha_2^2\beta_2 \quad\quad u_1 + 3\alpha_2\beta_2^2 \quad\quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3
\end{aligned}$$

ist. Wie also hieraus ersichtlich ist, sind die inducierten Substitutionen der conjugierten Inductoren S und S', nämlich $I_3(S)$ und $I_3(S')$ nicht conjugiert. Die Beziehung conjugierter Substitutionen bleibt demnach bei der Induction nicht aufrechterhalten. Die eingehendere Untersuchung überzeugt uns aber davon, dass diese sonderbare Erscheinung bloss die Folge der ungeeigneten arithmetischen Ausrüstung der zur Induction verwendeten algebraischen Form ist. Wird nämlich die algebraische Form so präpariert, wie dies bereits SYLVESTER gezeigt hat, dass man nämlich als Zahlencoëfficienten nicht die Polynomial-Coëfficienten

selbst, sondern deren Quadratwurzeln wählen, so können wir die Beziehung conjugierter Substitutionen der beiden Formen bei der Induction aufrecht erhalten.

Wird f in folgender Form:

$$f = u_0 x_1^3 + \sqrt{\binom{3}{1}}\, u_1 x_1^2 x_2 + \sqrt{\binom{3}{2}}\, u_2 x_1 x_2^2 + \sqrt{\binom{3}{3}}\, u_3 x_2^3,$$

gewählt; dann ist $I(S)$, die inducierte Substitution von S, ausführlich geschrieben:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_1^2\alpha_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_1\alpha_2^2 \quad u_2 + \alpha_2^3 \quad u_3\\
U_1 &= \sqrt{3}\alpha_1^2\beta_1 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_2 + \sqrt{3}\alpha_2^2\beta_2 u_3\\
U_2 &= \sqrt{3}\alpha_1\beta_1^2 u_0 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \sqrt{3}\alpha_2\beta_2^2 u_3\\
U_3 &= \beta_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\beta_1^2\beta_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\beta_1\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3
\end{aligned}$$

$I_3(S')$, die inducierte Substitution der Substitution S' aber wird ausführlich geschrieben diese sein:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \alpha_1^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_1^2\beta_1 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_1\beta_1^2 \quad u_2 + \beta_1^3 \quad u_3\\
U_1 &= \sqrt{3}\alpha_1^2\alpha_2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + \alpha_1^2\beta_2) u_1 + (2\alpha_1\beta_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1^2) u_2 + \sqrt{3}\beta_1^2\beta_2 u_3\\
U_2 &= \sqrt{3}\alpha_1\alpha_2^2 u_0 + (2\alpha_1\alpha_2\beta_2 + \alpha_2^2\beta_1) u_1 + (2\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2^2) u_2 + \sqrt{3}\beta_2\beta_2^2 u_3\\
U_3 &= \alpha_2^3 \quad u_0 + \sqrt{3}\alpha_2^2\beta_2 \quad u_1 + \sqrt{3}\alpha_2\beta_2^2 \quad u_2 + \beta_2^3 \quad u_3
\end{aligned}$$

so dass es ersichtlich ist, dass die inducierten Substitutionen der conjugierten Substitutionen wieder conjugiert sind.

Die mittels präparierter Formen abgeleiteten Substitutionen werden wir kurzweg präparierte inducierte Substitutionen nennen.

Beschränkt man sich auf präparierte inducierte Substitutionen, so können wir den folgenden Satz aufstellen:

*Conjugierten Inductoren entsprechen als Inducierte wieder conjugierte Substitutionen.**

Diesen Satz hat in dieser Fassung zuerst LE PAIGE aufgestellt und erwiesen (Math. Annalen, Bd. 15, p. 206). Der Beweis

* Die Beziehung conjugierter Substitutionen kann nach der Induction nur dann aufrecht erhalten werden, wenn die bei der Induction verwendete algebraische Form von der SYLVESTER'schen präparierten Form sich nur durch einen constanten Factor unterscheidet. Diesen Satz konnte ich nur nach längeren Rechnungen beweisen, da derselbe aber in dem Folgenden nicht vorkommt, so konnte ich von der Mittheilung desselben hier absehen.

LE PAIGE's führt aber nur durch langwierige Berechnungen zum Ziele. Im Folgenden möchte ich den Satz auf eine neue Weise beweisen, so dass die Richtigkeit desselben fast ohne rechnerischen Aufwand in Evidenz tritt.

1. Um spätere Unterbrechung zu vermeiden, möge folgender Hülfssatz vorangestellt werden:

Hülfssatz. Damit die linearen Substitutionen

$$U_i = r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{i\nu-1}u_{\nu-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1) \quad \ldots \quad (R)$$

und

$$V_i = s_{i0}u_0 + s_{i1}u_1 + \cdots + s_{i\nu-1}u_{\nu-1} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1) \quad \ldots \quad (S)$$

conjugiert seien, ist es nothwendig und hinreichend, dass

$$U_0v_0 + U_1v_1 + \cdots + U_{\nu-1}v_{\nu-1} = V_0u_0 + V_1u_1 + \cdots + V_{\nu-1}u_{\nu-1}. \quad (II)$$

sei. Sind nämlich R und S conjugierte Substitutionen, d. h.

$$r_{ij} = s_{ji}, \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

so sind die bilinearen Formen

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} r_{ij}u_jv_i$$

und

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=0}^{\nu-1}\sum_{j=0}^{\nu-1} s_{ji}u_jv_i$$

identisch; da aber:

$$\mathfrak{R} = \sum_{i=0}^{\nu-1}(r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{i\nu-1}u_{\nu-1})v_i = \sum_{i=0}^{\nu-1} U_iv_i$$

und

$$\mathfrak{S} = \sum_{j=0}^{\nu-1}(s_{j0}v_0 + s_{j1}v_1 + \cdots + s_{j\nu-1}v_{\nu-1})u_j = \sum_{j=0}^{\nu-1} V_ju_j,$$

so muss

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} U_iv_i = \sum_{j=0}^{\nu-1} V_ju_j$$

identisch bestehen, also ist die Bedingung (II) als nothwendig erwiesen.

Es muss nur noch gezeigt werden, dass sie auch hinreichend ist. Setzen wir nämlich voraus, dass die Bedingung (II) erfüllt ist, so muss die Relation

$$\sum_{i=0}(r_{i0}u_0 + r_{i1}u_1 + \cdots + r_{iv-1}u_{v-1})\,v_i =$$
$$= \sum_{j=0}(s_{j0}v_0 + s_{j1}v_1 + \cdots + s_{jv-1}v_{v-1})\,u_j$$

identisch bestehen, das bedeutet aber, dass die bilinearen Formen

$$\sum_{i=0}^{v-1}\sum_{j=0}^{v-1} r_{ij}u_jv_j \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{v-1}\sum_{j=0}^{v-1} s_{ji}u_jv_i$$

identisch sind; somit muss

$$r_{ij} = s_{ji}$$

sein, d. h. die Substitutionen R und S müssen conjugiert sein.

2. *Beweis des Hauptsatzes.* Der Einfachheit halber beschränke ich mich wieder auf binäre Formen, es sei hierbei jedoch besonders hervorgehoben, dass sämmtliche Betrachtungen auch auf irgendwieviel Unbestimmte enthaltende Formen angewendet werden können.

Es seien

$$f = u_0x_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}u_1x_1^{n-1}x_2 + \sqrt{\binom{n}{2}}u_2x_1^{n-2}x_2^2 + \cdots + u_nx_2^n =$$
$$= (a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n$$

und

$$g = v_0x_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}}v_1x_1^{n-1}x_2 + \sqrt{\binom{n}{2}}v_2x_2^{n-2}x_2^2 + \cdots + v_na_2^n =$$
$$= (b_1x_1 + b_2x_2)^n = b_x^n$$

zwei präparierte Formen; die eingeführten Symbole a_1, a_2, b_1, b_2 werden durch die Gleichungen:

$$u_i = \sqrt{\binom{n}{1}}\,a^{n-i}a_2^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \ldots\ldots\ (3)$$

$$v_i = \sqrt{\binom{n}{1}}\,b_1^{n-1}b_2^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad \ldots\ldots\ (4)$$

definiert.

Wendet man auf f

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 y_1 + \beta_1 y_2 \\ x_2 &= a_2 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S')$$

und auf g die conjugierte Substitution von S

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ x_2 &= \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \end{aligned} \quad \ldots\ldots \quad (S')$$

an, dann seien die transformierten Formen

$$\begin{aligned} f(S(x)) &= U_0 y_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}} U_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + U_n y_2^n = \\ &= [(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) y_1 + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2) y_2]^n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} g(S(x)) &= V_0 y_1^n + \sqrt{\binom{n}{1}} V_1 y_1^{n-1} y_2 + \cdots + V_n y_2^n = \\ &= [(b_1\alpha_1 + b_2\beta_1) y_1 + (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)]^n, \end{aligned}$$

so dass die transformierten Coëfficienten vermittelst der Symbole a und b folgendermaassen ausgedrückt werden können:

$$U_i = \sqrt{\binom{n}{1}} (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^{n-1} (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad \ldots \quad \text{(III)}$$

$$V_i = \sqrt{\binom{n}{1}} (b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)^{n-i} (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n) \quad \ldots \quad \text{(IV)}$$

Der Beweis unseres Hauptsatzes kann nun in einigen Worten geführt werden. Wir gehen von der Identität

$$\begin{aligned} &[(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2) b_1 + (a_1\beta_1 + a_2\beta_2) b_2]^n = \\ &= [(b_1\alpha_1 + b_2\beta_1) a_1 + (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2) a_2]^n \end{aligned}$$

aus. Indem wir dieselbe ausführlicher hinschreiben, kommen wir auf die folgende Identität:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \left\{ \sqrt{\binom{n}{1}} (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2)^{n-i} (a_1\beta_1 + a_2\beta_2)^i \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} b_1^{n-i} b_2^i \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sqrt{\binom{n}{1}} (b_1\alpha_1 + b_2\beta_1)^{n-i} (b_1\alpha_2 + b_2\beta_2)^i \cdot \sqrt{\binom{n}{1}} a_1^{n-i} a_2^i \right\}, \end{aligned}$$

die mit Rücksicht auf die Identitäten unter (3), (4), (III) und (IV) so geschrieben werden kann:

$$U_0 v_0 + U_1 v_1 + \cdots + U_n v_n = V_0 u_0 + V_1 u_1 + \cdots + V_n u_n;$$

diese Gleichheit zeigt aber schon im Sinne des vorausgeschickten Hilfssatzes, dass die Substitutionen $I_n(S)$ und $I_n(S')$ conjugiert sind, dass also in der That

$$I_n(S') = \{I_n(S)\}'$$

ist.

3. *Der* Sylvester*'sche Satz über contragrediente Substitutionen.*

Der Inhalt dieses Satzes besteht darin, dass bei Benützung präparierter Formen nach der Induction die Contragredienz erhalten bleibt. Der Beweis ist auf Grund des Vorhergegangenen sehr einfach. Sei die Substitution S ausführlich geschrieben

$$y_i = \sum_{(i=1,2,\ldots,k)} s_{i1}x_1 + s_{i2}x_2 + \cdots + s_{ik}x_k; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (S)$$

sei ferner die Determinante der Substitution: $|S|$ und die Subdeterminante des Elementes s_{ij}, dann kann die mit S contragrediente Substitution T auf folgende Weise geschrieben werden

$$y_i = \sum_{(i=1,2,\ldots,k)} \frac{S_{i1}}{|S|}x_1 + \frac{S_{i2}}{|S|}x_2 + \cdots + \frac{S_{ik}}{|S|}x_k; \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

da aber

$$x_i = \sum_{(i=1,2,\ldots,k)} \frac{S_{1i}}{|S|}y_1 + \frac{S_{2i}}{|S|}y_2 + \cdots + \frac{S_{ki}}{|S|}y_k$$

die Umkehrung von S, d. i. S^{-1} und diese Substitution die conjugierte Substitution von T ist, darum kann die contragrediente Substitution von S, d. i. T durch die Gleichung

$$T = [S^{-1}]'$$

ausgedrückt werden.

Wenden wir nun auf beiden Seiten die Operation der präparierten Induction I_n an, so tritt durch die Identitäten

$$I_n(T) = I_n\{[S^{-1}]'\} = [I_n(S^{-1})]' = \{[I_n(S)]^{-1}\}'$$

in Evidenz, dass $I_n(T)$ und $I_n(S)$ contragredient sind, womit zugleich auch der Sylvester'sche Satz bewiesen ist.

III. Inducierte Gruppen orthogonaler Gruppen.

Die Bedeutung der inducierten Substitutionen in der Invariantentheorie liegt darin, dass man im Falle ihrer Anwendung

* S. Crelle, Journal, Bd. 85, p. 91—! 3; ferner Hurwitz: „Zur Invariantentheorie", Mathematische Annalen, Bd. XLV. p. 394.

bei der Untersuchung von Formen invarianten Charakters sich ausschliesslich auf lineare Grundformen beschränken kann. Die moderne Invariantentheorie beschränkt sich nicht mehr darauf, dass sie bloss die zur allgemeinsten linearen Gruppen gehörigen Formen invarianten Charakters zum Gegenstand ihrer Untersuchung macht, sondern sie erstreckt sich vielmehr auch auf die Bestimmung von Invariantensystemen specieller Gruppen. Unter diesen speciellen Gruppen nimmt die orthogonale Gruppe, vermöge ihrer häufigen Anwendbarkeit in der Geometrie und Mechanik, einen besonderen Platz ein. Und nun fragt es sich, ob beim Aufbau der Invariantentheorie dieser orthogonalen Gruppen jene Vortheile erhalten bleiben, welche die Anwendung inducierter Substitutionen bietet? Sind die inducierten Gruppen der orthogonalen Gruppen wieder orthogonal, so wird die Antwort auf die gestellte Frage bejahend sein. Das wird in der That der Fall sein, so oft bei der Herleitung der inducierten Gruppen eine präparierte algebraische Form verwendet wird. Auf Grund des Vorhergegangenen können wir nämlich den folgenden Satz leicht beweisen:

1. *Die präparierten inducierten Substitutionen einer orthogonalen Substitution sind ebenfalls orthogonal.*

Sei

$$y_i = c_{i1}y_1 + c_{i2}y_2 + \cdots + c_{ik}y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (S)$$

orthogonal, d. h. zwischen ihren Coëfficienten sollen die Bedingungsgleichungen

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (1)$$

bestehen, in denen δ_{ij} Null oder Eins ist, je nachdem j von i verschieden oder damit übereinstimmend ist. S^{-1}, die Inversion der orthogonalen Substitution S kann — wie bekannt — so geschrieben werden:

$$x_i = c_{1i}y_1 + c_{2i}y_2 + \cdots + c_{ki}y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

und da dies zugleich die conjugierte Substitution von S ist, so genügt orthogonale Substitution der Gleichung

$$S^{-1} = S' \qquad (I)$$

Wie leicht ersichtlich, ist (I) nicht allein die nothwendige, sondern auch die hinreichende Bedingung für die Orthogonalität einer linearen Substitution. Wird nämlich der Bedingung (I) Genüge geleistet, so ist zugleich auch die Gleichung

$$S'S = E_k$$

befriedigt, d. h. die Composition der Coëfficientensysteme

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{k1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{1k} & c_{2k} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

führt auf das Einheitssystem, also

$$c_{1i}c_{1j} + c_{2i}c_{2j} + \cdots + c_{ki}c_{kj} = \delta_{ij},$$

dann ist aber S orthogonal.

Wenn wir nunmehr auf beide Seiten der Gleichung (I) die Operation I_n anwenden und berücksichtigen, dass I_n das Zeichen der präparierten inducierten Substitution ist, dann folgt aus den Identitäten

$$\begin{aligned} I_n(S^{-1}) &= I_n(S') \\ I_n(S^{-1}) &= [I_n(S)]^{-1} \\ I_n(S') &= [I_n(S)]', \end{aligned}$$

dass

$$[I_n(S)]^{-1} = [I_n(S)]'$$

ist, woraus aber schon auf Grund des in (I) ausgedrückten Satzes, $I_n(S)$ sich als orthogonale Substitution erweist.

Vielleicht ist es nicht überflüssig, auch diesen Satz an einem Beispiel zu erläutern.

Sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

orthogonal, dann sind die zwischen den Coëfficienten bestehenden Bedingungsgleichungen:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = 1.$$

Die präparierte inducierte Substitution zweiten Grades von S ist

$$I_2(S) = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \sqrt{2}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 \\ \sqrt{2}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 & \sqrt{2}\alpha_2\beta_2 \\ \beta_1^2 & \sqrt{2}\beta_1\beta_2 & \beta_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

dann ist es, da

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = \alpha_1^4 + 2\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^4 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 = 1$$
$$c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 1$$
$$c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = \beta_1^4 + 2\beta_1^2\beta_2^2 + \beta_2^4 = (\beta_1^2 + \beta_2^2)^2 = 1$$
$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = \sqrt{2}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) = 0$$
$$c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = \alpha_1^2\beta_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_2^2\beta_2^2 = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 = 0$$
$$c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = \sqrt{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = 0$$

ist, unmittelbar ersichtlich, dass $I_2(S)$ ebenfalls orthogonal ist.

Endlich bemerken wir noch, dass die Determinantengleichung

$$|I_n(S)| = |S|^{\binom{n+k-1}{k}}$$

die folgenden zwei Sätze liefert:

Die Inducierte einer geraden orthogonalen Substitution (deren Determinante + 1 ist) *ist wieder gerade.*

Die inducierte Substitution n-ten Grades einer ungeraden orthogonalen Substitution von k-ter Dimension (deren Determinante — 1 ist) *ist eine gerade oder ungerade orthogonale Substitution, je nachdem der Binomial-Coëfficient*

$$\binom{n+k-1}{k}$$

gerade oder ungerade ist.

13.

UEBER DIE FACTORENZERLEGUNG DER CHARAKTERISTISCHEN GLEICHUNG DER INDUCIERTEN SUBSTITUTION.

Von GUSTAV RADOS,
corr. Mitgl. der ung. Akademie und Prof. am Polytechnikum Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 12. Dezember 1898.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö“ (Mathematischer u. Naturwissenschaftlicher Anzeiger) Bd. XVII. p. 66—78.

Sind

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$$

die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varphi_k(\lambda) \quad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} & \cdots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

der linearen Substitution

$$x_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ik}y_k \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k),$$

so können die Wurzeln der zur inducierten Substitution ν-ten Grades dieser Substitution, zu

$$U_j = r_{j0}u_0 + r_{j1}u_1 + \cdots + r_{j\nu-1}u_{\nu-1} \qquad \left[j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-1;\ \nu=\binom{n+k-1}{n}\right]$$

gehörigen charakteristischen Gleichung

$$\Phi_{k\,n}(y) \quad \begin{vmatrix} r_{00}-y & r_{01} & \cdots & r_{0\nu-1} \\ r_{10} & r_{11}-y & \cdots & r_{1\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{\nu-10} & r_{\nu-11} & \cdots & r_{\nu-1\nu-1}-y \end{vmatrix} = 0$$

— wie bekannt* — aus dem Produkte

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_n}$$

hervorgehen, indem man darin an Stelle der Indexcombination

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

die sämmtlichen Combinationen mit Wiederholung der Elemente $1, 2, \cdots, k$ der Reihe nach setzt.

Die vorliegende Arbeit bezieht sich auch auf die charakteristische Gleichung

$$\Phi_{kn}(y) = 0,$$

von der auf Grund des in den einleitenden Zeilen citierten Satzes bewiesen werden soll, dass bei jedem Werthe von n (insoferne es grösser als 1 ist) und unabhängig von k stets *reducibel* ist. Die Zahl der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ kann sogar immer auf analytischem Wege vermittelst einer Formel bestimmt werden, wie das der im Folgenden zu beweisende Satz zeigt:

Die Anzahl ϱ_{kn} der irreducibeln Factoren der charakteristischen Function $\Phi_{kn}(y)$ ergiebt sich stets durch die Formel:

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Omega_k^{(n)}(0),$$

wo an Stelle von $\Omega_k(x)$

$$\Omega_k(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots + \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)};$$

zu setzen ist; im Falle, dass $k \geq n$ ist, ist ϱ_{kn}, die Zahl der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$, von k unabhängig und ergiebt sich durch die Formel

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\,\Psi^{(n)}(0),$$

wo $\Psi(x)$ die mit Hülfe des unendlichen Productes $\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^\alpha}$ definierte transcendente analytische Function bedeutet.

Nebenbei heben wir als vom Standpunkte der Algebra interessantes Nebenresultat hervor, dass die irreducibelen Factoren

* S. die Abhandlung des Autors unter dem Titel „Inducierte lineare Substitutionen" Bd. XVI. p. 241—262 dieser Berichte.

von $\Phi_{k\,n}(y)$ nichts anderes sind, als die Polynome derjenigen Resolventen der Gleichung $k$ten Grades

$$\varphi_k(\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln die aus den Wurzeln der Gleichung $\varphi_k(\lambda) = 0$ gebildeten Potenzproducte sind. Unter diesen Resolventen befindet sich die bezüglich der Lösung der Gleichung wichtigste, nämlich die GALOIS'sche, insofern n auf geeignete Weise gewählt wird. Hierzu genügt es, dass

$$n \geqq \frac{k(k+1)}{2}$$

sei. Hiermit ist zur Bildung des GALOIS'schen Resolventen ein neuer Weg erschlossen, auf dem man in principiell einfacherer Weise, als bisher zur Kenntniss dieses Resolventen gelangen kann, insoferne man auf diesem Wege selbst die übergangsweise Benützung von Irrationalen und aus diesen gebildeten symmetrischen Ausdrücken vermeiden kann und unter den auszuführenden Operationen blos die Factorenzerlegung der zur inducierten Substitution $\frac{k(k+1)}{2}$ten Grades gehörigen charakteristischen Function aus dem Gebiete rationaler Operationen heraustritt.

I.

1. Im Sinne des eingangs citierten Satzes kann jede Wurzel der Gleichung $\binom{n+k-1}{n}$-ten Grades

$$\Phi_{k\,n}(y) = 0$$

in der Form

$$y = \lambda_1^{l_1} \lambda_2^{l_2} \cdots \lambda_q^{l_q}$$

geschrieben werden, wofern

$$l_1 + l_2 + \cdots + l_q = n \qquad (q = 1, 2, 3, 4, \ldots, k)$$

ist. Unter den Exponenten $l_1, l_2, \ldots, l_q$ können auch gleiche vorkommen. Es sei

$$l_1 = \cdots = l_{\alpha_1} = m_1$$
$$l_{\alpha_1+1} = \cdots = l_{\alpha_1+\alpha_2} = m_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1} = l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+2} = \cdots = l_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r} = m_r,$$

so dass

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r = u$$

ist, dann kann y in der folgenden Form geschrieben werden:

$$y = (\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha_1})^{m_1}(\lambda_{\alpha_1+1}\lambda_{\alpha_1+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_2} \ldots$$
$$\ldots (\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1}\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r})^{m_r}.$$

Bestimmen wir nun diejenige Permutationsgruppe Γ der Elemente

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,$$

deren Substitutionen y unverändert lassen. Es kann dies auf folgende Weise geschehen. Es seien

$$G_1 = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\alpha_1}] = (t'_1, t'_2, \ldots t'_{\alpha_1!})$$
$$G_2 = [\lambda_{\alpha+1}, \lambda_{\alpha_1+2}, \ldots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2}] = (t''_1, t''_2, \ldots t''_{\alpha_2!})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G_r = [\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}+1}, \ldots, \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r}] = (t_k^{(r)}, t_2^{(r)}, \ldots, t_{\alpha_r!}^{(r)})$$
$$G_{r+1} = [\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+1}, \ldots, \lambda_k] = (t_1^{(r+1)}, t_2^{(r+1)}, \ldots, t_{(k-\alpha_1+\cdots+\alpha_r)!}^{(r+1)})$$

der Reihe nach die symmetrischen Gruppen der in den eckigen Parenthesen enthaltenen Elemente, dann ist die Gruppe Γ die aus der Zusammensetzung der Gruppen $G_1, G_2, \ldots G_{r+1}$ entstehende Gruppe, d. h.

$$\Gamma = [G_1, G_2, \ldots G_r, G_{r+1}].$$

Die Ordnung ν dieser Gruppe ergiebt sich nunmehr auf Grund dessen, dass das Product

$$t'_{\beta_1} t'_{\beta_2} \ldots t^{(r)}_{\beta_r} t^{(r)}_{\beta_{r+1}}$$

jede Substitution von Γ und jede nur einmal wiedergiebt, wenn wir darin für

$$\beta_1 = 1, 2, \ldots, \alpha_1!$$
$$\beta_2 = 1, 2, \ldots, \alpha_2!$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_r = 1, 2, \ldots, \alpha_r!$$
$$\beta_{r+1} = 1, 2, \ldots, (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!$$

setzen.

Die Substitutionen $t_\alpha^{(i)}$ und $t_\beta^{(k)}$ sind nämlich immer vertauschbar, d. h.

$$t_\alpha^{(i)} t_\beta^{(k)} = t_\beta^{(k)} t_\alpha^{(i)}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, \alpha_i;\ \beta = 1, 2, \ldots, \alpha_k;\ i = 1, 2, \ldots, r+1;\ i \lesseqgtr k);$$

folglich kann jede Substitution der Gruppe Γ in der Form

$$t'_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t^{(r)}_{\beta_r} t^{(r+1)}_{\beta_{r+1}}$$

geschrieben werden.

Es ist ferner leicht zu erweisen, dass die Gleichung

$$t'_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t^{(r+1)}_{\beta_{r+1}} = t'_{\gamma_1} t''_{\gamma_2} \ldots t^{(r+1)}_{\gamma_{r+1}} \qquad (a)$$

nur dann statt hat, wenn

$$\beta_1 = \gamma_1,\ \beta_2 = \gamma_2,\ \ldots,\ \beta_{r-1} = \gamma_{r+1}.$$

Aus der Gleichung (a) folgt nämlich, dass

$$t'^{-1}_{\gamma_1} t'_{\beta_1} = t'_{\gamma_2} t'_{\gamma_3} \ldots t^{(r+1)}_{\gamma_{r+1}} \left(t^{(r+1)}_{\beta_{r+1}}\right)^{-1} \left(t^{(r)}_{\beta_r}\right)^{-1} \ldots (t'_{\beta_2})^{-1}$$

ist, da aber die auf der rechten Seite stehende Substitution die Elemente

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{\alpha_1}$$

unverändert lässt, so muss

$$(t'_{\gamma_1})^{-1} t'_{\beta_1} = 1,$$

d. h.

$$t'_{\beta_1} = t'_{\gamma_1},$$

oder

$$\beta_1 = \gamma_1$$

sein. Dann kann aber (a) so geschrieben werden:

$$t''_{\beta_2} t'''_{\beta_3} \ldots t^{(r+1)}_{\beta_{r+1}} = t''_{\gamma_2} t'''_{\gamma_3} \ldots t^{(r+1)}_{\gamma_{r+1}};$$

wird die vorher benützte Schlussweise r-mal angewendet, so ergiebt sich schliesslich, dass (a) in der That nur dann bestehen kann, wenn

$$\beta_1 = \gamma_1,\ \beta_2 = \gamma_2,\ \ldots,\ \beta_{r+1} = \gamma_{r+1}$$

ist, dann ergeben aber die Producte

$$t'_{\beta_1} t''_{\beta_2} \ldots t^{(r+1)}_{\beta_{r+1}}$$
$$(\beta_i = 1, 2, \ldots, \alpha_i;\ i = 1, 2, \ldots, r, r+1)$$

alle Substitutionen der Gruppe Γ in der That einmal und nur einmal, und auf diese Weise ist die Ordnung der Gruppe Γ,

$$\nu = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_r! (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!.$$

Die Anzahl derjenigen Werthe aber, die der Ausdruck

$$y = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{\alpha_1})^{m_1} (\lambda_{\alpha_1+1} \lambda_{\alpha_1+2} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2})^{m_2} \ldots$$
$$\ldots (\lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r+1+1} \ldots \lambda_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r})^{m_r}$$

bei Anwendung sämmtlicher Substitutionen der symmetrischen Gruppe k-ten Grades annimmt:

$$\pi = \frac{k!}{\nu} = \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_r! (k - \alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_r)!}.$$

Sind diese Werthe

$$y_1, y_2, \ldots, y_\pi$$

so ist

$$G(y) \equiv \prod_{i=1}^{\pi} (y - y_1) \equiv y^\pi + A_1 y^{\pi-1} + \cdots + A_\pi = 0$$

die Gleichung, die y befriedigt, die in ihr enthaltenen Coëfficienten

$$A_1, A_2, \ldots, A_\pi$$

sind als symmetrische Functionen der Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,$$

durch die Coëfficienten der Gleichung

$$\varphi_k(\lambda) = 0$$

und somit auch mit Hülfe der Elemente a_{ik} rational ausdrückbare Grössen. Insoferne die Elemente a_{ik} unbestimmt bleiben, ist $G(y)$ irreducibel, so dass wir in $G(y)$ einen der irreducibeln Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ kennen lernen.

Auf diese Weise ist es klar, dass jeder einzelnen aus positiven Zahlen bestehenden Lösung der diophantischen Gleichungen unter (1) je ein irreducibeler Factor der charakteristischen Gleichung $\Phi_{kn}(y)$ entsprechen wird und umgekehrt. Die Anzahl dieser irreducibelen Factoren stimmt also mit der Anzahl derjenigen Zerlegungen in gleiche oder verschiedene positive

Zahlen überein, in denen die Anzahl der Terme k nicht überschreitet.*

Die Anzahl der Zerlegungen der Zahl n in a positive Glieder können wir auch auf analytischem Wege angeben. Wenn wir nämlich die rationale Funktion

$$\omega_a(x) = \frac{x^a}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^a)}$$

in der Umgebung der Stelle $x=0$ nach Potenzen von x entwickeln, dann giebt in dieser der Coëfficient von x^n den präcisen Werth von l_a,** so dass also

$$C_a = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\omega_a(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \omega_a^{(n)}(0)$$

ist; ϱ_{kn}, die Zahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{kn}(y)$, kann also folgendermaassen dargestellt werden

$$\varrho_{kn} = C_1 + C_2 + \cdots + C_k =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n\omega_1(x)}{dx^n} + \frac{d^n\omega_2(x)}{dx^n} + \cdots + \frac{d^n\omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dx^n}\{\omega_1(x) + \omega_2(x) + \cdots + \omega_k(x)\}\right]_{x=0};$$

bezeichnet man also die rationale Function

$$\omega_1(x) + \omega_2(x) + \cdots + \omega_k(x)$$

---

* Die einfache Bemerkung, dass die aus der Gradzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ gebildete Summe mit dem Grade der $\Phi_{kn}(y)$ selbst gleich ist, führt zu dem analytisch-zahlentheoretischen Resultat, dass

$$\Sigma \frac{k!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_r!(k-\alpha_1-\cdots-\alpha_r)!} = \binom{n+k-1}{k}$$

ist, wo die Summe sich auf die Zahlen $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ bezieht und auf jede positive Lösung der diophantischen Gleichungen

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_r\alpha_r = n$$
$$(r=1, 2, \ldots, k)$$

erstreckt werden muss. In diesen diophantischen Gleichungen sind $m_1, m_2, \ldots, m_r$ beliebige nicht negative Zahlen.

** S. Euler, Introductio in analysin infinitorum. Caput XVI. De partitio numerorum. p. 263.

mit $\Omega_k(x)$, **so dass**

$$\Omega_k(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \cdots + \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

ist, so kann man endlich die Anzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{kn}(y)$ **in der folgenden Form darstellen:**

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Omega_k(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\Omega(0).$$

2. **Ist** $k \geq n$, **so liefern sämmtliche positive Lösungen der diophantischen Gleichungen**

$$l_1 + l_2 + \cdots + l = n$$
$$(q = 1, 2, \ldots, k)$$

die sämmtlichen möglichen Zerlegungen der ganzen Zahl n. **Die Anzahl sämmtlicher Zerlegungen von** n **können wir, wie das schon** EULER* **gezeigt hat, in der Weise erhalten, dass wir die transcendente Function**

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha}$$

in der Umgebung der Nullstelle in eine Potenzreihe entwickeln und den Coëfficienten von x^n **nehmen. Folglich ist im vorliegenden Falle die Anzahl der irreducibelen Factoren**

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\left[\frac{d^n \Psi(x)}{dx^n}\right]_{x=0} = \frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(0)$$

und, wie ersichtlich, *ist diese Zahl von k ganz unabhängig.*

Als interessantes Nebenresultat heben wir hervor, dass, so oft $k > n$ **ist, auch**

$$\varrho_{kn} = \frac{1}{n!}\Omega_k^{(n)}(0) = \frac{1}{n!}\Psi^{(n)}(0),$$

ist, woraus wir das Resultat erhalten, dass

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha}$$

---

* S. EULER, Intr. in analysin infr. p. 269.

die Product-Darstellung der transcendenten Function

$$\Omega(x) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{x^\alpha}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^\alpha)}$$

ist.

3. Ist $n = \frac{k(k+1)}{2}$, so wird unter den Ausdrücken

$$y = \lambda_1^{l_1}\lambda_2^{l_2}\cdots l_q^{l_k}$$
$$(l_1 + l_2 \cdots + l_q = n)$$

auch

$$V = x_1 x_2^2 x_3^2 \ldots x_k^k$$

vorkommen, da

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} = n$$

ist. Der auf diese Weise bestimmte Ausdruck nimmt bei den sämmtlichen Vertauschungen der Wurzeln

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$$

Werthe in der Anzahl von $k!$ an, in Folge dessen der dem V entsprechende irreducibele Factor der charakteristischen Function $\Phi_{kn}(y)$ das Polynom der GALOIS'schen Resolvente der Gleichung k-ten Grades

$$\varphi_k(\lambda) = 0$$

liefert.

Ist also $k \geqq \frac{n(n+1)}{2}$, so ist das Vorkommen des Polynoms der GALOIS'schen Resolventen unter den irreducibelen Factoren der charakteristischen Function $\Phi_{kn}(y)$ unbedingt gesichert.

Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung der GALOIS'schen Resolvente das folgende neue Verfahren. Vor allem stellen wir eine derjenigen Substitutionen dar, deren charakteristische Gleichung jene gegebene Gleichung k-ten Grades

$$f(x) = 0$$

ist, deren GALOIS'sche Resolvente wir suchen. Sodann bilden wir deren inducierte Substitution $\frac{k(k+1)}{2}$-ten Grades und zerlegen die charakteristische Function dieser inducierten Substitution in ihre irreducibelen Factoren. Unter diesen liefern diejenigen höchsten Grades Polynome vom GALOIS'schen Resolventen.

II.

Es sollen noch die erhaltenen Resultate an einigen speciellen Fällen erläutert werden.

1. Es sei z. B. $k = 4$ und es sei die Anzahl der irreducibelen Factoren von

$$\Phi_{41}(y),\ \Phi_{42}(y),\ \Phi_{43}(y),\ \Phi_{44}(g),\ \Phi_{45}(y),\ \Phi_{46}(y),\ \Phi_{47}(y),\ \ldots$$

zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bilde man den rationalen Bruch

$$\Omega_4(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \\ + \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)};$$

man entwickele nun diese Function in der Umgebung der Stelle $x = 0$ nach Potenzen von x, so ergiebt sich

$$\Omega_4 x = x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 + 11x^7 + 15x^8 + 18x^9 + \cdots,$$

so dass die Zahlen der in den Zerlegungen enthaltenen irreducibelen Factoren die folgenden sein werden:

$$\varrho_{41} = 1,\ \varrho_{42} = 2,\ \varrho_{43} = 3,\ \varrho_{44} = 5,\ \varrho_{45} = 6,\ \varrho_{46} = 9,\ \varrho_{47} = 11, \ldots$$

2. Ist $k \geq n$, so liefern die Coëfficienten der Potenzreihe

$$\Psi(x) = \prod_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^\alpha} =$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \\ + 42x^{10} + 56x^{11} + 77x^{12} + 101x^{13} + 135x^{14} + 176x^{15} + 239x^{16} + \cdots,$$

die Anzahl der irreducibelen Factoren von $\Phi_{kn}(y)$, so dass diese Anzahlen für alle nicht negative g die folgenden sind:

für	$\Phi_{g+11}(y)$	ist die Anzahl d. irreducibelen Factoren						ϱ_{g+11}	$=1$
»	$\Phi_{g+22}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+22}	$=2$
»	$\Phi_{g+33}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+33}	$=3$
»	$\Phi_{g+44}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+41}	$=5$
»	$\Phi_{g+55}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+55}	$=7$
»	$\Phi_{g+66}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+66}	$=11$
»	$\Phi_{g+77}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+77}	$=15$
»	$\Phi_{g+88}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+88}	$=22$
»	$\Phi_{g+99}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+99}	$=30$
»	$\Phi_{g+1010}(y)$	»	»	»	»	»	»	ϱ_{g+1010}	$=42$ etc.

(T)

3. Es sei die lineare Substitution

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 \\ x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 \\ x_3 &= \alpha_3 y_1 + \beta_3 y_2 + \gamma_3 y_3 \end{aligned} \qquad (S)$$

gegeben und seien λ_1, λ_2, λ_3 die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\varphi_3(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_2 - \lambda & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dann wird sich die inducierte Substitution zweiten Grades von S durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
U_0 = \alpha_1^2 \; & u_0 + \alpha_2^2 \; u_1 + \alpha_3^2 \; u_2 + 2\alpha_1\alpha_2 \; u_3 + \\
& + 2\alpha_1\alpha_3 \; u_4 + 2\alpha_2\alpha_3 \; u_5 \\
U_1 = \beta_1^2 \; & u_0 + \beta_2^2 \; u_1 + \beta_3^2 \; u_2 + 2\beta_1\beta_2 \; u_3 + \\
& + 2\beta_1\beta_3 \; u_4 + 2\beta_2\beta_3 \; u_5 \\
U_2 = \gamma_1^2 \; & u_0 + \gamma_2^2 \; u_1 + \gamma_3^2 \; u_2 + 2\gamma_1\gamma_2 \; u_3 + \\
& + 2\gamma_1\gamma_3 \; u_4 + 2\gamma_2\gamma_3 \; u_5 \\
U_3 = \alpha_1\beta_1 u_0 & + \alpha_2\beta_2 u_1 + \alpha_3\beta_3 u_2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) u_3 + \\
& + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1) u_4 + (\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2) u_5 \\
U_4 = \alpha_1\gamma_1 u_0 & + \alpha_2\gamma_2 u_1 + \alpha_3\gamma_3 u_2 + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1) u_3 + \\
& + (\alpha_1\gamma_3 + \alpha_3\gamma_1) u_4 + (\alpha_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) u_5 \\
U_5 = \beta_1\gamma_1 u_0 & + \beta_2\gamma_2 u_1 + \beta_3\gamma_3 u_2 + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) u_3 + \\
& + (\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1) u_4 + (\beta_2\gamma_3 + \alpha_3\gamma_2) u_5
\end{aligned}$$

ergeben. Die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi_{32}(y) = 0,$$

also der charakteristischen Gleichung dieser inducierten Substitution sind

$$\lambda_1^2, \; \lambda_2^2, \; \lambda_3^2, \; \lambda_1\lambda_2, \; \lambda_1\lambda_3, \; \lambda_2\lambda_3;$$

die Anzahl der irreducibelen Factoren aber, wie das die zweite Reihe der Tabelle unter (T) zeigt, ist 2.

Den ersten irreducibelen Factor werden im Sinne des Vorhergegangenen die Werthe

$$\lambda_1^2, \; \lambda_2^2, \; \lambda_3^2, \; \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

den zweiten aber die Werthe

$$\lambda_1\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3,\ \lambda_2\lambda_3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

zu Null machen.

Die in der Reihe (1) stehenden Werthe sind aber nichts anderes als die Wurzeln der zum Quadrate der Substitution S, nämlich zu S^2, gehörigen charakteristischen Gleichung; wenn also

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2 + \gamma_1\alpha_3 & c_{21} &= \alpha_2\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \gamma_2\alpha_3\\
c_{12} &= \alpha_1\beta_1 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\beta_3 & c_{22} &= \alpha_2\beta_1 + \beta_2^2 + \gamma_2\beta_3\\
c_{13} &= \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 & c_{23} &= \alpha_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_3 + \gamma_2\beta_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{31} &= \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3\\
c_{32} &= \alpha_3\beta_1 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\beta_3\\
c_{33} &= \alpha_3\gamma_1 + \beta_3\gamma_2 + \gamma_3^2
\end{aligned}$$

gesetzt wird, so sind die in der Reihe (1) enthaltenen Werthe die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} c_{11}-y & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22}-y & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}-y \end{vmatrix} = 0.$$

Die in der Reihe (2) gefassten Werthe aber sind nichts anderes, als die Wurzeln der zur adjungierten Substitution zweiten Grades der Substitution (S) gehörigen Gleichung. Wenn also

$$\begin{aligned}
\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2 &= A_1 & \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2 &= B_1 & \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 &= \Gamma_1\\
\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3 &= A_2 & \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3 &= B_2 & \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 &= \Gamma_2\\
\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 &= A_3 & \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 &= B_2 & \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 &= \Gamma_3
\end{aligned}$$

ist, dann sind die in Reihe (2) enthaltenen Werthe die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} A_1-y & B_1 & \Gamma_1\\ A_2 & B_2-y & \Gamma_2\\ A_3 & B_3 & \Gamma_3-y \end{vmatrix} = 0.$$

Infolgedessen gelangen wir zur folgenden expliciten Zerlegung der Function $\Phi_{23}(y)$:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha_1^2-y & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 & 2\alpha_1\alpha_3 & 2\alpha_2\alpha_3 \\
\beta_1^2 & \beta_2^2-\gamma & \beta_3^2 & 2\beta_1\beta_2 & 2\beta_1\beta_3 & 2\beta_2\beta_3 \\
\gamma_1^2 & \gamma_2^2 & \gamma_3^2-y & 2\gamma_2\gamma_1 & 2\gamma_1\gamma_3 & 2\gamma_2\gamma_3 \\
\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1-y & \alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1 & \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2 \\
\alpha_1\gamma_1 & \alpha_2\gamma_2 & \alpha_3\gamma_3 & \alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1 & \alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1-y & \alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2 \\
\beta_1\gamma_1 & \beta_2\gamma_2 & \beta_3\gamma_3 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1 & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2-
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix} c_{11}-y & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22}-y & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33}-y \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1-y & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2-y & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3-\gamma \end{vmatrix}$$

14[I].

BEITRÄGE ZUR FRAGE DER FETTBILDUNG IN DER LEBER.

Von Dr. PAUL von PLÓSZ, Professor a. d. Universität Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 16. Januar 1899.

Aus „Mathematikai és természettudományi Értesitö" (Mathematischer und naturwissenschaftlicher Anzeiger) Bd. XVII p. 157—168.

1. Mittheilung.

Die Rolle und das Schicksal der Kohlehydrate im Organismus ist eine alte Frage des Stoffwechsels. Indem ich über die, in dieser Richtung in der letzten Zeit gemachten Untersuchungen spreche, halte ich es für meine Pflicht die ausgiebige Hilfe der Herrn Dr. KARL DOKTOR und Dr. EUGEN POZSONYI zu erwähnen; ich verdanke diesen Mitarbeitern hauptsächlich die Verfertigung der vielen mikroskopischen Präparate.

Bevor es bekannt war, dass auch im gesunden Organismus Zucker und Kohlehydrat vorkommt, drehte sich die Frage immer nur darum, ob sich im Organismus aus den durch die Nahrungsmittel eingeführten Kohlehydraten Fett bildet oder nicht?

Die Frage bezüglich der Rolle der Kohlehydrate fand eine theilweise Lösung als CLAUDE BERNARD[1] und mit ihm, beinahe zu gleicher Zeit HENSEN[2] im Jahre 1867 das Glycogen der Leber entdeckten.

Nach dieser Entdeckung wurde es bald klar, dass sich aus den eingeführten Kohlehydraten Glycogen bildet.

Mit der Entdeckung des Glycogens entstand auch die Frage der vitalen und postmortalen Glycogene, welche den Gegenstand

so vieler Untersuchungen bildete und von welcher man sagen kann, dass sie auch heute noch nicht ganz geklärt ist.

Ueber den Ursprung des Glycogens haben zahlreiche und verschiedenartige Versuche ergeben, dass dieses sich sowohl aus den Kohlehydraten der Nahrungsmittel, wie auch aus den eiweisshältigen Stoffen bildet, ja dass vielleicht sogar die Fette, besonders das darin enthaltene Glycerin, auch Glycogen bilden, obwohl in Bezug auf das Glycerin die Experimentaluntersuchungen noch zu keinem endgiltigen Resultat geführt haben.

Die Bildung des Glycogens aus Kohlehydraten ist nicht nur vom chemischen Standpunkte anzunehmen, sondern auch das Experiment zeigt, dass die Umwandlung rasch unmittelbar nach der Resorption erfolgt.

Unter vielen derartigen Versuchen will ich mich bei dieser Gelegenheit auf die Versuche SALAMON'S[3] berufen, welcher zuerst fand, dass, wenn man in die Mesenterialvene des Kaninchens Zucker einspritzt, dieser Zucker bei gehöriger Versuchsanordnung die Leber nicht passiert, sondern daselbst zurückgehalten wird und sich als Glycogen anhäuft. Dass das im Darmkanal resorbierte Kohlehydrat sich in der Leber als Glycogen anhäuft, beweisen, ausser den erwähnten Versuchen, zahlreiche andere Beobachtungen, so dass diese Thatsache als feststehend zu betrachten ist.

Die Untersuchungen, welche das Schicksal der Kohlehydrate behandeln, haben auch nachgewiesen, dass die mit den Nahrungsmitteln eingeführten Kohlehydrate die Hauptquelle des Fettes im Organismus darstellen.

Durch diese Versuche ist es daher zur Gewissheit geworden, dass aus den Kohlehydraten im Organismus einerseits Glycogen, anderseits Fett gebildet wird. Wenn wir den Verlauf der Ernährung mittels Kohlehydraten betrachten, so sehen wir, dass das Fett diejenige Substanz ist, welche sich allmählig in immer grösserer Menge im Körper anhäuft, während die Menge des Glycogens über eine gewisse Grenze nicht zunimmt, und im allgemeinen bedeutend hinter der Fettanhäufung zurück bleibt. Die vergleichende Bestimmung des Glycogens und des Fettes bei einem gemästeten Thiere zeigt, dass die Menge des Fettes diejenige des Glycogens 10—20fach übersteigt.

In Anbetracht, dass das Fett und Glycogen aus denselben Quellen, nämlich aus den Kohlehydraten der Nahrung stammen, entsteht die weitere Frage über das Verhältniss und die Bildungsweise der beiden Verbindungen.

Es fragt sich, ob sich dieselben neben einander, oder das eine aus dem andern bildet. In diesem letzteren Falle müsste man annehmen, dass das Glycogen zuerst entsteht und aus diesem Fett gebildet wird. Dies vorausgesetzt wäre das Glycogen als ein Uebergangsprodukt zu betrachten, aus welchem nach und nach Fett entsteht und daher kommt es auch, dass die Menge des Glycogens nur bis zu einem bestimmten Grade ansteigt und dort constant bleibt, während das aus ihm gebildete Fett, welches nicht den Charakter des Uebergangsproduktes besitzt, sich anhäuft.

Der erste Vertreter der Ansicht, dass aus Kohlehydraten sich Fett bilde, war LIEBIG[5] der durch Versuche, Beobachtungen und theoretische Ableitungen die Ansicht begründete, dass das Fett nicht nur aus dem durch die Nahrung eingeführten Fette, sondern auch aus den eiweisshaltigen Stoffen und Kohlehydraten gebildet werden kann. Die LIEBIG'sche Auffassung wurde bekämpft durch DUMAS[6], BOUSSINGAULT[7], PAYEN[8], MILNE-EDWARDS[9], ferner PETTENKOFER[10] und VOIT[11], dann STOHMANN[12], KÜHN[13] und Anderen; gewann jedoch immer mehr Anhänger.

Man erkannte nach und nach, dass ausser den Fett enthaltenden Nahrungsmitteln auch die eiweisshaltigen Nahrungstoffe eine Quelle des Fettes darstellen; später wurde auch nachgewiesen, dass die Kohlehydrate als Hauptquelle der Fettbildung zu betrachten sind. So haben TSCHERINOFF[14], WEISKE und WILDT[15], LAWES und GILBERT[16], SOXHLET[17], SCHULZE[18], HENEBERG[19], MEISSL und STROHMER[20], TSCHERWINSKY[21], CHANIEWSKI[22], MUNK[23], ERWIN VOIT[24] und LEHMANN[25], dann RUBNER[26] und endlich PFLÜGER[27] grösstentheils durch neue, auf verschiedene Art zusammengestellte Versuche endgiltig festgestellt, dass sich auch aus den Kohlehydraden Fett bildet.

Ich glaube, dass hier besonders noch HANRIOT'S[28] Versuche hervorzuheben sind, der gefunden hat, dass nach Einführen von Kohlehydraten der Respirationsquotient an Werth steigt, d. h. dass das Verhältniss des durch das Athmen aufgenommenen

Sauerstoffs und der ausgeathmeten Kohlensäure sich so ändert, dass während bei dem hungernden Thiere der Quotient $\frac{CO_2}{O} = 0.83$ — 0·86 ist, nach Fütterung mit Kohlehydraten die ausgeschiedene Menge CO_2 derart zunimmt, dass der Werth des Quotienten sich über die Einheit erhebt (1·1—1·28). Die Thatsache ist zunächst dadurch zu erklären, wenn angenommen wird, dass sich aus dem Zucker Kohlensäure und Wasser abspalten und sich auf diese Weise Fette bilden.

Nach HANRIOT's Ansicht soll dies so schnell geschehen, dass die in den Organismus eingeführte Stärke und Zucker sich schon nach 4—5 Stunden, bei Abspaltung der Kohlensäure und des Wassers mit quantitativer Genauigkeit in Fett umwandelt. Diese Auffassung entspricht nicht ganz jenen Kenntnissen, welche wir über das Entstehen und die Rolle des Glycogens als sicher begründet betrachten; da nach diesen angenommen werden muss, dass wenigstens ein Theil der Kohlehydrate nach der Resorption in der Leber sofort in Glycogen verwandelt wird, und dieses Glycogen dort einige Zeit beständig ist. Im Ganzen und Grossen kann sie jedoch mit meinen, später zu beschreibenden, Beobachtungen in Einklang gebracht werden, da diesen zufolge bei Ernährung mit Stärke oder Zucker in der Leber Glycogen und mit diesem Fett auftritt, die Fettbildung demnach der Resorption unmittelbar folgt.

Alle Erfahrungen weisen dahin, dass bei reichlicher Ernährung mit Kohlehydraten im Organismus Fett angehäuft wird. Die Erfahrung zeigt sogar auch, dass die Quantität des gebildeten Fettes grösser ist, als diejenige, welche *auf Umwegen durch Ersparniss gewisser Albuminderivate* aus dem zugleich eingeführten Eiweisse entstehen könnte.

Das eingeführte Eiweiss kann nämlich bei Mastthieren im Ganzen genommen geringer sein als das täglich gebildete Fett, wobei auch noch in Betracht gezogen werden muss, dass das Eiweiss Stickstoff und Schwefel enthält, welche keinen Bestandtheil des Fettes bilden und welche demnach aus dem Eiweiss abgerechnet werden müssen. Dies alles lässt es unzweifelhaft erscheinen, dass das Fett, wenn es auch theilweise aus dem Ei-

iss stammt, sich doch grösstentheils aus den Kohlehydraten det.

Die Art und Weise der Bildung ist indessen bis jetzt noch ht bekannt, weder die Art der chemischen Umwandlung, noch r Ort der Bildung ist festgestellt.

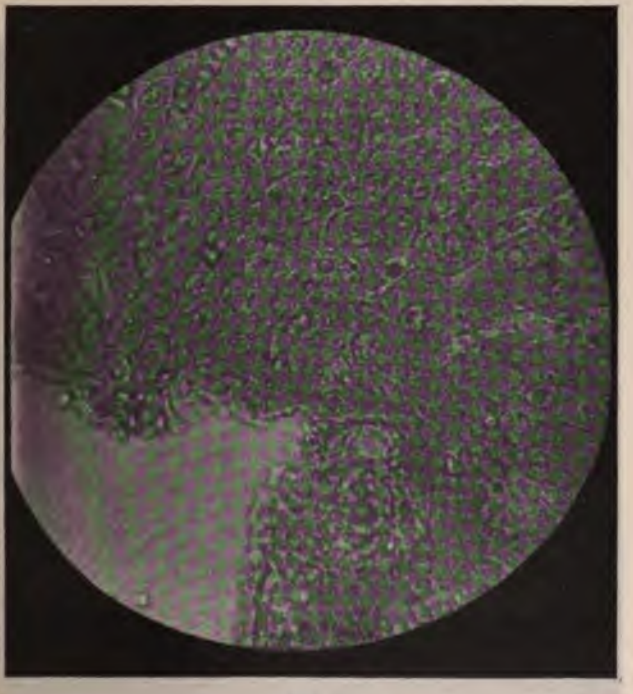


Fig. 1.

II. Kaninchen. Aus der Leber des Thieres nach 7tägigem Hungern. Enthält keinerlei Fett. Zeiss'sches Mikroskop Project-Ocular Nr. 2, Objectiv Nr. E. 370fache Vergrösserung.

Pavy[29] hat in seinem Kampfe gegen die Existenz der vitalen ycogene behauptet, dass die in den Darmkanal eingeführten hlehydrate schon während der Resorption in Fett umgewandelt d als solches resorbiert werden; ja er behauptete sogar, dass s Glycogen der Leber nicht aus den Kohlehydraten, sondern s Eiweiss entsteht. Derselbe stützte seine Behauptung auf die obachtung, dass er in den Darmzotten eines mit Hafer gefütterten

Kaninchens Fetttropfen vorfand, welche sich durch Osmiumsäure schwarz färbten, während diese Fettkörner in den Darmzotten des hungernden Kaninchens fehlten.

Ich habe diese Beobachtungen, welche auf die Fettbildung neues Licht zu werfen versprachen und desshalb von grosser Tragweite schienen, zum Gegenstand neuer Versuche gemacht.

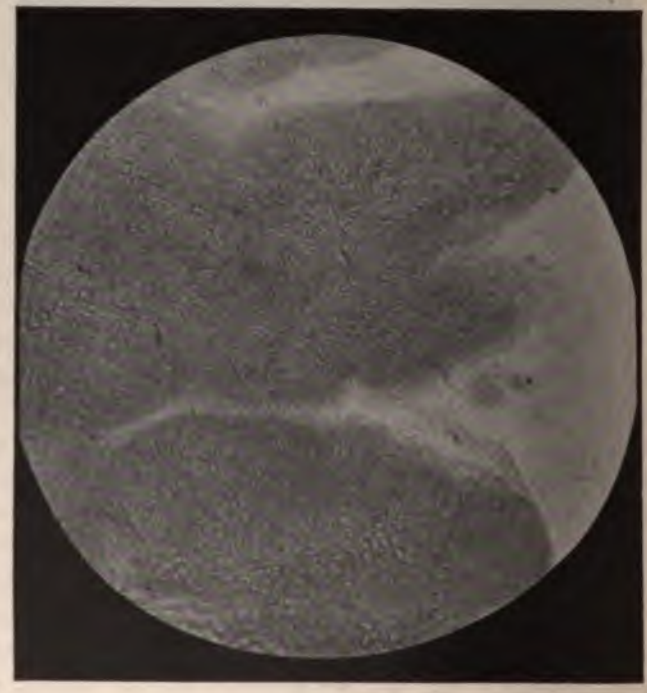


Fig. 2.

Dasselbe Versuchsthier; aus dessen Dünndarme (hungerte 7 Tage). Enthält kein Fett. Vergrösserung wie die in Fig. 1.

An PAVY's Versuchen ist auszusetzen, dass er nicht mit solchen Nahrungsmitteln arbeitete, welche frei von Fett waren denn der Hafer enthält wie bekannt im Durchschnitt 4—4.50% Fett; ferner ist daran auszusetzen, dass er ein solches Nahrungsmittel anwandte, welches ausser Stärke auch noch Eiweiss enthält. Es war daher, um diese Fehler zu vermeiden, nöthig in

er Reihe neuer Versuche den Einfluss der Ernährung durch rke auf die Fettbildung in den Wänden des Darmes und in Leber zu bestimmen. Zu diesem Zwecke haben wir in einer he von Versuchen fettfreien Hafer, in einer zweiten Reihe ie fettfreie Stärke, in einer dritten aber eine reine Trauben-kerlösung als Nahrungsmittel angewendet, um auf diese Weise

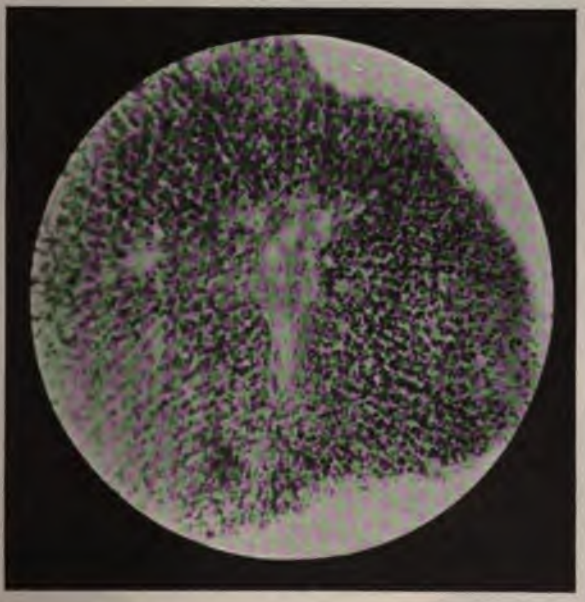


Fig. 3.

Kaninchen. Aus dessen Leber (nach 7tägigem Hungern $5\frac{1}{2}$stündige Nährung mit Hafer und Stärke). Gefüllt mit Fett.

ss'sches Mikroskop Nr. 2, Project-Ocular und Objectiv C. 150fache Vergrösserung.

Einfluss des Fettes und des Eiweisses auf die Fettbildung zlich auszuschliessen.

Das Resultat der Versuche war folgendes:

1. Nach 5—6—10 Tage dauernden Hungerns schwindet im Kaninchen sowohl aus den Zotten des Darmes als auch aus n Leberzellen jene fettartige Substanz, welche unter dem Mi-roskop mittels Hyperosminsäure die Fettreaktion zeigt. (S. Fig. und 2).

2. Wenn wir dem Kaninchen, welches mehrere Tage gehungert hat — dessen Leber demnach in Bezug auf die Reaction mit Osminsäure fettfrei war — fettfreien Hafer gaben und es fünf bis sieben Stunden darnach tödteten, zeigten sich die Darmzotten bei Behandlung mit Osmiumsäure fettfrei, in der Leber

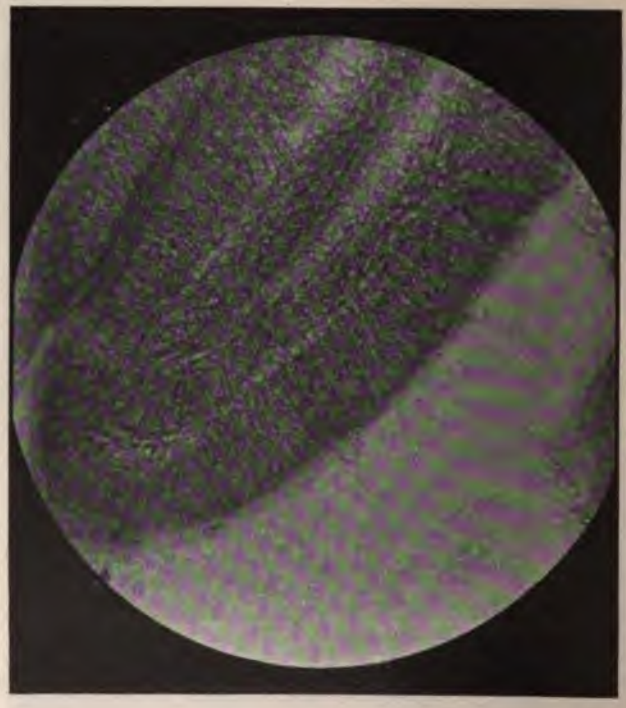


Fig. 4.

XII. Kaninchen. Dünndarm (nach 5tägigem Hungern 4 Stunden hindurch mit Zucker genährt). Enthält kein Fett.

Zeiss'sches Mikroskop Nr. 2, Project-Ocular und Objectiv Nr. E. 370fache Vergrösserung.

hingegen war, nach Behandlung mit Osmiumsäure Fett zu finden. (S. Fig. 3.)

Ebenso traten in der Leber Fettkörner auf, wenn wir statt Hafer *reine fettfreie Stärke* oder bei einem anderen Versuche eine *reine fettfreie Zuckerlösung* in den Darmtrakt *einführten*; in beiden Fällen blieb dabei die Darmwand frei von Fett. (S. Fig. 4).

Nachdem unter solchen Umständen in der Leber sich auch Glycogen ablagert, wie das allgemein bekannt ist, so zeigen uns die Versuche, dass aus den *in den Darmkanal eingeführten Kohlehydraten in der Leber Glycogen und zugleich Fett gebildet wird.*

Die Glycogen- und die Fettbildung treten demnach gleichzeitig auf, oder einander unmittelbar folgend.

Wenn man die Möglichkeiten, die hier obwalten, in Betracht zieht, könnte angenommen werden, dass der Verlauf entweder

Fig. 5.

XVIII. Kaninchen. Dünndarm (5tägiges Hungern, darnach 5stündige Ernährung mit gewöhnlichem Hafer). Voll mit Fett.

Zeiss'sches Mikroskop Project-Ocular Nr. 2 und Objectiv Nr. C. 150fache Vergrösserung.

ein derartiger ist, dass sich aus den Kohlehydraten parallel Glycogen und Fett in der Weise bildet, dass aus einem Theil des Kohlehydrates Glycogen, aus dem anderen Fett entsteht, oder aber dass aus dem entstandenen Glycogen sofort die Fettbildung beginnt.

Das Vorhandensein des Fettes wurde bei diesen Versuchen vorerst bloss durch die mikroskopischen Befunde und auf dem Wege der mikrochemischen Reaction nachgewiesen.

Vielfache Versuche und Beobachtungen zeigen, dass diese kleineren und grösseren Kügelchen, welche durch Hyperosmium-

säure schwarz gefärbt werden, aus Fett bestehen. Es kann theoretisch nicht geleugnet werden, dass ausser dem Fett auch andere Substanzen vorhanden sein können, welche durch Hyperosmiumsäure schwarz gefärbt werden; indessen ist bisher diese mikrochemische Reaction, als für das Fett characteristisch, allgemein angenommen.

Die vorliegenden Versuche scheinen selbst auch dafür zu sprechen, dass die mit Hyperosmiumsäure gefärbte Substanz mit dem Fett identisch ist, und zwar deshalb:

1. Weil in den Epithelzellen der Darmzotten des mit nicht entfetteten, folglich Fett enthaltenden, Hafers gefütterten Kaninchens, mit Osmiumsäure sich färbende Fettkügelchen zu finden sind (s. Fig. 5), und eben solche sich in der Leber neben dem Glycogen vorfinden.

2. Sind in den Darmzotten des mit entfetteter Stärke genährten Kaninchens durch Osmiumsäure sich schwarz färbende Fetttropfen nicht zu finden, in der Leber dagegen sind sie vorhanden.

3. Bei den hungernden Kaninchen sind weder in den Darmzotten, noch in der Leber Fetttropfen zu finden.

Es wäre wichtig ausser der mikrochemischen Reaction und dem mikroskopischen Verhalten auch auf chemischem Wege die Fette sowohl qualitativ als quantitativ nachzuweisen. Die Untersuchung stösst jedoch auf Schwierigkeiten, welche durch den Lecithingehalt der Leber bedingt sind.

In Ermangelung genügender thatsächlicher Grundlage muss man zwar auf weitergehende theoretische Ableitungen verzichten; wir halten es indessen für erwähnenswerth, dass der Prozess, durch welchen sich aus dem Zucker Fett bildet, im Ganzen genommen nicht auf oxydationalem, sondern reductionalem Wege vor sich geht; denn sowohl die höheren Fettsäuern, als auch deren Glyceride, die neutralen Fette, enthalten im Ganzen genommen im Verhältnisse zu den Kohlenstoff- und Wasserstoffatomen weniger Sauerstoff, als die Kohlenhydrate.

Daraus folgt, dass, indem sich aus den Kohlehydraten Triglyceride bilden, dies ein Desoxydations-Prozess ist. Wir brauchen hier also kein freies Oxygen, was mit dem Umstande vollkommen

übereinstimmt, dass die Leber den grössten Theil des Blutes aus der Porta bekommt, welche Venenblut führt, welches die Capillaren des Darmkanales schon passierte.

In den Wänden des Darmkanals, wo sauerstoffhaltiges Blut circuliert, bildet sich aus den Kohlehydraten kein Fett, dagegen entsteht es in der mit oxygenarmem Blute versorgten Leber.

Litteratur.

1. Cl. Bernard: Sur le mécanisme physiologique de la formation du sucre dans le foie. Compt. rendus.

2. V. Hensen: Ueber Zuckerbildung in der Leber. Virchows Archiv Bd. XI. Neue Folge Bd. I. S. 395.

3. G. Salomon: Ueber Glycogenbildung in der Leber. Virchows Archiv 1874. LXI. 343—377.

4. Huber: czitálva Comptes Rendus T. XVI. P. 663.

5. Liebig: Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Pharm. Centralbl. 1843. No. 13. — Annal. de Chem. et Pharm. XLV. — Thierchemie. — Comptes Rendus T. XVI. 1842. — Zeitschr. f. Biologie Bd. VI. In Voit's Abhandlung citiert. — Fettbildung aus Kohlehydraten. Berl. klin. Wochenschr. No. 31. 1878.

6, 7, 8. Dumas; Comptes Rendus. — Dumas Boussingault und Payen: Ueber die Fettbildung bei den Grasfressern und über die Entstehung der Milch. Pharmaceut. Centralbl. 1843. No. 40. — Annal. de Chim. et de Physiol. Trois. Sér. T. VIII. Mai 1843. — Boussingault: Pharm. Centralbl. 1843. pag. 629. — Payen: Comptes Rendus T. XVII. 1843.

9. Milne-Edwards: Comptes Rendus T. XVII. 1843.

10, 11. Pettenkofer und Voit: Annalen d. Chemie u. Pharmacie II. Suppl. Bd. 1862. — C. v. Voit: Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Chemisches Centralbl. 1868. — Ueber die Entwicklung der Lehre von der Quelle der Muskelkraft und einiger Theile der Ernährung seit 25 Jahren. Zeitschr. f. Biol. Bd. VI. 1870. — Ueber die Fettbildung im Thierkörper. Sitzungsbericht. d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. 1885.

12. Stohmann: Journal f. Landwirtschaft. 1868 und 1869.

13. G. Kühn: Landwirtschaftl. Versuchsstation. Bd. X.

14. Michael Tscherinoff: Ueber die Abhängigkeit des Glycogengehaltes der Leber von der Ernährung. Moleschott X. Bd. 1870.

15. H. Weiske und E. Wildt: Untersuchungen über die Fettbildung im Thierkörper. Zeitschr. f. Biol. X. 1874.

16. Lawes J. B. and Gilbert J. H.: On the formation of the fat in the animal body. Journ. of Anat. and Physiol. 1877.

17. F. Soxhlet: Versuche über Fettbildung im Thierkörper. Zeitsch. d. landw. Verein in Bayern. 1881.

18. B. Schulze: Ueber Fettbildung im Thierkörper. Landw. Jahrbücher 1882.

19. W. Henneberg: Ueber Fleisch- u. Fettproduction in verschiedenem Alter und bei verschiedener Ernährung. Zeitschr. f. Biologie, Bd. 17. S. 295. 1882.

20. E. Meissl und F. Strohmer: Ueber die Bildung von Fett aus Kohlehydraten im Thierkörper. Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wissenschaften 88. III. Abth. 1883.

21. N. Tscherwinsky: Zur Frage über die Fettbildung im thierischen Organismus. Landw. Versuchsstationen 29. 317. 1883.

22. St. Chaniewski: Ueber Fettbildung aus Kohlehydraten im Thierorganismus. Zeitschr. f. Biologie 20.

23. Imm. Munk: Die Fettbildung aus Kohlehydraten beim Hunde. Virchow's Archiv 101. 1885.

24, 25. Erwin Voit u. C. Lehmann: Sitzungsber. d. k. bayr. Acad. d. Wissensch. 1885.

26. Max Rubner: Ueber Fettbildung aus Kohlehydraten im Körper des Fleischfressers. Zeitschr. f. Biologie 22. 1886.

27. E. Pflüger: Ueber Fleisch u. Fettmästung. Pflüg. Arch. Bd. 52. S. 1. 1892. — Die Ernährung mit Kohlehydraten und Fleisch oder auch mit Kohlehydraten allein in 27 von Pettenkofer und Voit ausgeführten Versuchen beurtheilt. Ibidem 5. 239.

28. Hanriot: Sur l'assimilation des hydrates de carbone. Comptes Rendus T. 114. No. 7 1892.

29. Dr. F. W. Pavy: Die Physiologie der Kohlehydrate 1895.

14[II].

BEITRÄGE ZUR FRAGE DER FETTBILDUNG IN DER LEBER.

Von Dr. PAUL von PLÓSZ, Professor a. d. Universität Budapest.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 13. Februar 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítő". (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, p. 183—188.

2. Mittheilung.

In der Sitzung vom 16. Januar d. J. hatte ich die Ehre, der Akademie über die Resultate derjenigen Versuche zu berichten, welche ich, mit Hilfe der Herren Dr. Karl Doctor und Dr. Eugen J. Pozsonyi, angestellt habe, und welche als Resultat ergeben haben, dass, bei Ernährung durch Kohlehydrate, ganz kurze Zeit nach dem Einführen der Kohlehydrate, in der Leber gleichzeitig mit dem Glycogen Fettkügelchen gebildet werden.

Dieses Versuchsresultat scheint mit unseren übrigen, in dieses Fach schlagenden Kenntnissen, in mehrfacher Beziehung zu stehen; welche Beziehungen und die davon abzuleitenden Consequenzen nach meiner bescheidenen Ansicht wichtig genug sind, um die Aufmerksamkeit der geehrten Akademie darauf zu lenken.

Nach dem erwähnten Ergebniss scheint die Folgerung am nächsten liegend, dass das nach Einführen des Kohlehydrates, in der Leber auftretende Fett unmittelbar aus dem Kohlehydrate selbst gebildet wird, so dass die Molekule des Kohlehydrates selbst den Stoff zur Fettbildung liefern.

Diese Folgerung ist nicht nur die am nächst liegende, sie ist auch mit allen unseren in dies Fach schlagenden Kenntnissen

in Uebereinstimmung, und überdies müssen wir sie schon deshalb als Hypothese aufstellen, weil diese Voraussetzung den mit dem Schicksal der Fettbildung und der Kohlehydrate sich befassenden Versuchen eine neue Richtung eröffnet und diesen als neue Grundlage dienen kann.

Wenn wir die Zusammensetzung der Kohlehydrate und des Fettes vergleichen, so sehen wir, dass die Molekule der sogenannten neutralen Fette im Vergleiche zu den in ihnen enthaltenen Carbonium- und Hydrogenelementen weniger Oxygen enthalten, als die Molekule der Kohlehydrate. Indem sich also aus den Kohlehydraten Fett bildet, muss ein solcher Process vor sich gehen, welcher in seinem Endresultate desoxydational ist.

Dieser Desoxydation entsprechend ist die Verbrennungswärme der Fette, mit ihrem absoluten Gewichte verglichen, auch grösser, als diejenige der Kohlehydrate.

Dieser Thatsache gegenüber müssen wir die Frage aufstellen, auf welche Weise diese Desoxydation zu Stande kommt, und welche Quelle die dazu nöthige Kraft liefert.

Wenn wir die Fettbildung begleitenden Umstände prüfen, fallen uns vor allem diejenigen Beobachtungen ins Auge, welche dahin weisen, dass, indem aus dem Kohlehydrate Fett gebildet wird, aus den Kohlehydrat-Molekulen sich Kohlendioxyd abspaltet. Wir begegnen in der Litteratur mehreren Daten, die sich hierauf beziehen (HANRIOT, HARLEY, LAVES, LEO, WEINTRAUD und mehrere), von welchen ich mich hauptsächlich nur auf zwei stützen will. Die eine stammt von HANRIOT*, die andere von VAUGHAN HARLEY**. — Beide Daten zeigen, dass sich nach Einführung von Kohlehydraten der Respirations-Quotient vergrössert. Das heisst, die Ausscheidung der Kohlehydrate im Organismus nimmt zu, während die Oxygenaufnahme unverändert bleibt. Bei mehreren Versuchen HARLEY's war sogar nach Einführen von Kohlehydrat neben der vermehrten Ausscheidung der Kohlensäure eine Verminderung der Oxygenaufnahme wahrnehmbar. Es scheint somit, als ob in Folge der Wärmeregulierung

* HANRIOT: Comptes rendus 1892. Vorgelegt und mit Anmerkungen begleitet von GAUTIER.

** VAUGHAN HARLEY: Journal of Physiology. Vol. XV, 1894.

diejenige Wärmeentwickelung, welche die Fettentwickelung begleitet, die Verlangsamung anderer oxydationalen Processe nach sich ziehen würde.

HANRIOT's Versuche wurden der Pariser Akademie von GAUTIER vorgelegt und von der Bemerkung begleitet, dass die durch das Einführen von Kohlehydraten gesteigerte Kohlensäureausscheidung, ohne die entsprechende Oxygenaufnahme, darauf hinweist, dass die Fette aus den Kohlehydraten dadurch entstehen, dass sich Kohlendioxyd davon abspaltet. Diese Abspaltung des Kohlendioxydes setzt er in eine Parallele mit den anaërobiotischen Gährungsprocessen.

Diese Art der Fettbildung stimmt mit allen den Umständen, welche das Aufsaugen der Kohlehydrate und das Umgestalten in Fett begleiten, vollkommen überein. Die Kohlehydrate gelangen aus dem Darmtrakte in die Leber und wandeln sich dort in Glycogen und Fett um. Keiner dieser Processe bedarf des freien Oxygens; freies Oxygen ist aber in der Leber nur in kleiner Menge vorhanden, denn die Leber erhält das Blut hauptsächlich durch die Vena portae, diese aber bringt solches Blut, welches die Capillaren des Magens und des Darmtraktes schon durchsetzt und den grössten Theil seines freien Oxygens dort zurück gelassen hat.

Die Leber ist folglich ein, gerade zu solchen, kein freies Oxygen heischenden, Processen geeignetes Organ.

Und man muss es als wahrscheinlich betrachten, dass in der Leber auch noch mehr derartige Processe vor sich gehen.

Derartige Abspaltungsprocesse, bei welchen die Aufnahme freien Oxygens keine Rolle spielt, welche folglich, in des Wortes gewöhnlicher Bedeutung, nicht auf Oxydation basieren, wurden so lange nicht mit Aufmerksamkeit verfolgt, bis PASTEUR die Anaërobiosis und die anaërobiotische Gährung entdeckte.

Durch die Anaërobiosis stellte er fest, dass sich bei dieser neben vollständiger Ausschliessung von freiem Oxygen Mikroorganismen entwickeln und vermehren und die zur organischen Funktion nothwendige Kraft ausschliesslich aus dem Abspaltungsprocesse nehmen.

Derartige Abspaltungsprocesse, welche mit anaërobiotischer Gährung verbunden sind, wurden seither in grosser Anzahl be-

kannt. Eine solche anaërobiotische Gährung geht z. B. vor sich, indem aus dem Zucker Milchsäure gebildet wird, eine solche ist z. B. jene, wenn das Ureum durch Aufnahme der Elemente des Wassers in Kohlensäure und Ammoniak zersetzt wird, eine solche ist z. B. die gewöhnliche alkoholische Gährung selbst, bei welcher der Zucker in Kohlensäure und Alkohol zersetzt wird.

Um etwaige Zweifel zu vermeiden, muss ich bemerken, dass das Ferment, welches zu einer solchen Gährung nothwendig ist, während des Gährungsprocesses nicht nur nicht geringer wird, sondern sogar zunimmt. Seine Menge ist folglich am Schlusse der Gährung ebenso gross oder mehr, als zu Beginn derselben in die Lösung der abzuspaltenden Menge hinein gelangte; der Umstand, dass das Ferment von aussen zu der gährenden Flüssigkeit gelangte, änderte nichts an dem Satze, dass die bei der Gährung nothwendigen gesammten Kräfte ohne freien Sauerstoff und ohne Mithilfe einer äusseren Kraft allein nur durch den Abspaltungsprocess gedeckt werden.

Wenn die Fettbildung in der That unmittelbar aus den Kohlehydraten, nebst Abspaltung der Kohlensäure, vor sich geht, so zeigt der Process mehrfache Analogien, mit allen jenen bei Anaërobiosis zu Stande kommenden Gährungsarten des Zuckers, welche von einer Abspaltung von Kohlensäure begleitet werden; zur richtigen Beleuchtung dieses Processes berufe ich mich auf das bekannteste Beispiel, auf die alkoholische Gährung des Zuckers. Bei dieser wird, ebenso wie bei der Fettbildung, Kohlensäure ausgeschieden; hier wie dort entstehen solche Verbindungen, welche im Verhältnisse zu ihrem absoluten Gewichte eine grössere Verbrennungswärme aufweisen, als die ursprüngliche Substanz, d. i. der Zucker.

Indessen ist, die alkoholische Gährung in Betracht gezogen, die Verbrennungswärme der gesammten Gährungsproducte geringer als die der abgespaltenen Substanz war. Das heisst, die Verbrennungswärme eines Zuckermolekuls ist in Grammmolekulen gerechnet 669,020 Cal., also grösser als die der daraus gebildeten zwei Grammmolekule Alkohol, welche zusammen 630,200 Cal. (STOHMANN) oder 660,928 Cal. (FRANKLAND) ausmachen.

Nachdem bei solchen Spaltungsprocessen der Unterschied zwischen der Verbrennungswärme der sich abspaltenden und der durch Abspaltung hervorgebrachten Verbindungen uns ein Maass von der Energie giebt, welche durch den Abspaltungsprocess frei wurde, sind wir im Stande die bei der alkoholischen Gährung frei werdende Quantität von Energie zu berechnen.

Bei der Fettbildung können wir hingegen, da wir nicht wissen, wie viele Molekule Kohlehydrat zur Bildung je eines Molekuls von neutralem Fett erfordert werden, auch die durch den Process frei gewordene Energie nicht in Zahlen ausdrücken. Doch ist es als unzweifelhaft anzunehmen, dass, während bei der Fettbildung aus den Kohlehydraten Kohlensäure abspaltet, bei diesem exothermischen Processe Energie frei wird und deshalb das zu Stande gekommene Fettmolekul weniger gebundene Energie enthält, d. h. seine Verbrennungswärme kleiner ist, als die der Verbrennungswärme jener gesammten Kohlehydratmolekule war, aus welchen das eine Molekul neutralen Fettes gebildet wurde.

Es ist demnach als unzweifelhaft zu betrachten, dass, indem aus den Kohlehydraten Fett gebildet wird und Kohlensäure sich abspaltet, *Energie* frei wird.

Der Organismus gewinnt daher, indem er aus den Kohlehydraten Fett bildet und diese in seinen Depôts aufspeichert, durch diesen Process einen doppelten Vortheil: erstens erhält er bei der Umbildung des Fettes Wärme, zweitens bringt er in sein Reservoir eine derartige Substanz, welche, ihr absolutes Gewicht gerechnet, eine grössere Menge Verbrennungswärme besitzt, als sie das Kohlenhydrat besessen hat. Die Verbrennungswärme eines Grammes Fett ist nämlich im Durchschnitte genommen 9412 Cal., während diejenige eines Grammes Zucker 3939 Cal. ist. Im Falle der Oxydation liefert somit das Fett bei gleichem Gewichte mehr Energie als der Zucker geliefert hätte, aus welchem es entstanden ist.

Die Auffassung, dass aus den Kohlehydraten unmittelbar nach der Aufsaugung in der Leber Fett gebildet wird, lässt die Fettbildung in einem von dem bisherigen vollständig abweichenden Lichte erscheinen. Sie zeigt uns nämlich, dass das Fett nicht aus dem Ueberschusse der Nahrung gebildet wird, nicht nur dann zu

Stande kommt, wenn die Nahrung in überflüssiger Menge in den Organismus eingeführt wird, sondern dass nach Einführen von Kohlehydraten, nach jeder einzelnen Mahlzeit Fett entsteht; nur in einem Falle, wenn es benöthigt wird, wird das Fett gleich verbraucht, während in dem anderen Falle, wenn es nicht nothwendig ist, es in den verschiedenen Fettreservoiren als Schmeer und Speck aufgespeichert wird. Der Process ist also in beiden Fällen qualitativ immer derselbe, nur quantitativ unterscheidet sich der eine vom andern.

Die erwähnten Versuche verlegen die aus den Kohlehydraten entstehende Fettbildung in die Leber, was aber die Möglichkeit durchaus nicht ausschliesst, dass ausser in der Leber auch in anderen Organen ein ähnlicher Process zu Stande kommen kann; inzwischen müssen wir es als unzweifelhaft ansehen, dass bei dieser Art der Fettbildung als Hauptorgan die Leber zu betrachten ist.

Diese neue Lehre über die Fettbildung ändert nicht nur unsere physiologischen Ansichten in vieler Beziehung, sondern sie greift auch in unsere pathologischen Auffassungen ein, besonders aber wirkt sie wesentlich umgestaltend und ergänzt unsere bis jetzt gehegten Ansichten über diabetische Erkrankungen.

Mit Bezug auf die Erklärung der diabetischen Erkrankungen erhielt in letzterer Zeit die Ansicht das Uebergewicht, dass bei Diabetikern die Hyperglycaemie des Blutes, d. h., das stufenweise Zunehmen des Zuckergehaltes, nicht aus der Ueberproduction des Zuckers stamme, sondern von der Abnahme der Fähigkeit im Organismus den Zucker zu zersetzen, herrührt; dazu kommt noch, dass der diabetische Organismus nicht im Stande ist, den Zucker in der Weise umzugestalten (wahrscheinlich in Fett umzubilden), dass er der Bahn des Blutes entzogen und zu späterem Verbrauche aufbewahrt werde.

Nach dem Erkennen der Fettbildung in der Leber wird die Erklärung der Diabetes in der Weise umgestaltet, dass nach dieser Theorie die Hyperglycaemie dadurch zu Stande kommt, dass die Leber den aus dem Darmtrakt oder von irgendwo anders hergebrachten Zucker nicht im Stande ist, in Fett umzugestalten und der Zucker infolge dessen sich in der Blutbahn anhäuft, d. h.,

dass eine Hyperglycaemie zu Stande kommt, welche dann die Meliturie zur Folge hat.

Die unmittelbare Ursache der Hyperglycaemie müssen wir also in dem ungenügenden Functionieren der Leber, d. i. in ihrer Functionsstörung *suchen.*

Diese weitgehende Folgerung kann aus der Lehre von der Fettbildung in der Leber direct abgeleitet werden, sobald wir annehmen, dass das nach dem Einführen von Kohlehydraten in der Leber zum Vorschein kommende Fett unmittelbar aus den Kohlehydraten gebildet wird, sobald wir also diese Voraussetzung annehmen, welche wir der Theorie der Fettbildung in der Leber zu Grunde legten.

Mit dieser Auffassung stimmt auch jene Thatsache überein, welche von Mehreren aufgefunden und constatiert worden, dass bei Diabetikern nach Aufnahme von Kohlehydraten der Werth des Respirationscoëfficienten nicht grösser wird, was in gesundem Zustande immer eintritt, wie ich dies zu Beginn dieser Zeilen zu bemerken hatte.

Bei Diabetikern nimmt nämlich, nach Einnehmen von Kohlehydraten, die Kohlensäureausscheidung nicht zu, was den Beweis liefert, dass sich beim Diabetiker aus dem Zucker kein Fett bildet.

Ich kann mich an dieser Stelle nicht in eine eingehende Erörterung einlassen, inwiefern diese neue Auffassung mit den bisher aufgestellten Theorien über das Wesen der Diabetik übereinstimmt oder hiervon abweicht; ich will nur noch einmal betonen, was ich schon vor dem bemerkt habe, dass vor der Hand die theoretische Möglichkeit nicht ausgeschlossen werden kann, nach welcher auch in anderen Organen und Zellen eine ähnliche Fettbildung vorkommen könne, und so die Störung der Fettbildung in anderen Organen die Ursache der Hyperglycaemie werden könne.

Nachdem aber alle Daten dahin weisen, dass die Leber das Hauptorgan ist, welches aus den Kohlehydraten Fett bildet, so müssen wir vor allem die Functionsstörung dieser als die Ursache der Hyperglycaemie betrachten.

Es versteht sich von selbst, dass, indem wir auf Grund der Fettbildung in der Leber den Ursprung der Hyperglycaemie mit der Functionsstörung der Leber in Verbindung bringen, diese

gestörte Function derselben nur als die unmittelbare Ursache betrachten, welche selbst wieder von den im Organismus vorkommenden vielfachen anderen Ursachen abhängen kann.

Die Umgestaltung, welche die Lehre von der Fettbildung in der Leber, sowohl in den Auffassungen der Physiologie als auch der Pathologie hervorbringt, eröffnet den experimentellen Untersuchungen ein weites Feld und eine neue Richtung; die Resultate meiner, in dieser Richtung fortgesetzten Versuche, werde ich mir seiner Zeit gestatten der geehrten Akademie vorzulegen.

15.

SECUNDÄRE KATHODENSTRAHLEN.

Von ALOIS SCHULLER.

O. ö. Prof. der Physik an dem Königl. ungar. Polytechnikum zu Budapest, ord. Mitglied der ungar. Akademie der Wissenschaften.

Vorgetragen in der Sitzung der Akademie den 18. Juni 1900.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö" (Math. u. Naturwiss. Anzeiger der Akademie, Bd. XVIII, p. 257—267, 1900).

Der Zweck dieser Zeilen ist, einiges Licht auf das Wesen jener Kathodenstrahlen zu werfen, welche aus dem sogenannten LENARD'schen Fenster austreten.

Hr. LENARD hat in einer äusserst werthvollen Abhandlung* nachgewiesen, dass aus einer, von Kathodenstrahlen getroffenen, möglichst dünnen Aluminium-Folie Kathodenstrahlen in allen Richtungen und namentlich auch von der Rückseite derselben austreten. LENARD selbst betrachtet die Kathodenstrahlen als Vorgänge im Aether und ist der Ansicht, die von der Rückseite der Aluminium-Lamelle kommenden Strahlen seien durch die Aluminiumschicht gegangen. Dem gegenüber meinen andere Forscher, die Kathodenstrahlen entstünden aus der Bewegung materieller Theilchen und wären nicht im Stande, durch feste Körper zu dringen; diese fassen die dem Fenster entstammenden Kathodenstrahlen als solche auf, welche in der Aluminium-Oberfläche entstehen.** Neuere Erfahrungen, sowie auch die zu beschreibenden secundären Kathodenstrahlen scheinen die letztere Auffassung zu begünstigen.

---

* LENARD, Wied. Ann. 51. p. 225. 1894.

** G. G. STOKES, Manchester Memoirs 41. Part IV. 1896/97. 26 p.

Die secundären Kathodenstrahlen, von denen hier die Rede ist, entstehen in folgender Weise.

Die primären Kathodenstrahlen entstammen der Kathode K (Fig. 1) und fallen auf das isolierte oder zur Erde abgeleitete Metallblech a, gerade so, wie in den zur Erzeugung der Röntgenstrahlen gebräuchlichen Focus-Lampen, nur dass die Antikathode a nicht mit der Anode A verbunden ist. Solange die Verdünnung

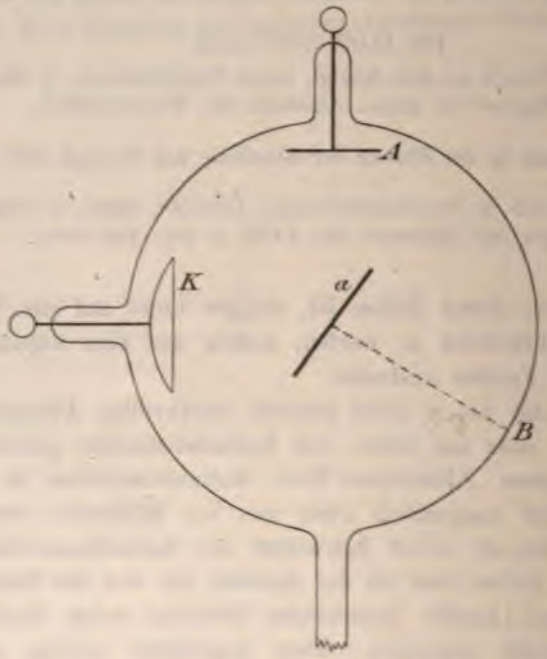


Fig. 1.

nicht genug vorgeschritten ist, überwiegt das Fluorescenz-Licht der primären Kathodenstrahlen derart, dass ausser den bekannten Erscheinungen nichts zu bemerken ist, sobald aber die Funkenstrecke zwischen Anode und Kathode in Luft 2—3 cm überschreitet, gewahrt man hinter der Antikathode auf der Glasoberfläche neu auftretendes Fluorescenz-Licht, welches mitunter, bei geeigneter Form der Antikathode scharfe Grenzen zeigt und dann besonders auffallend ist. Man überzeugt sich

leicht davon, dass dieses Fluorescenz-Licht von regelmässigen Kathodenstrahlen herrührt, die aber nicht von der Kathode, sondern von der Antikathode ausgehen, denn dieselben Formen treten auch dann auf, wenn die Antikathode mit der Kathode leitend verbunden wird, nur ist das Licht im letzteren Falle intensiver.

Zur Fixierung der in Rede stehenden Formen, die mit der Form der Antikathode stark wechseln, empfiehlt sich der folgende Weg. Man verbinde vorerst die Antikathode mit der Anode, wie bei den Röntgen-Lampen. In diesem Falle zeigt das Fluorescenz-Licht, welches beim Thüringer Glase grün ist, seine einfachste Form, wovon uns gegenwärtig nur der wesentlich verkleinerte Schatten der Antikathode interessiert, offenbar eine Folge der elektrostatischen Anziehung, welche die positiv geladene Antikathode auf die streifend vorüberschiessenden Kathodenstrahlen ausübt. Alsdann schalten wir die Kathode gänzlich aus und verbinden die Antikathode *a* mit dem negativen Pole der Maschine; dabei übernimmt die Antikathode die Rolle der Kathode und es erscheinen auf der von *K* abgewendeten Seite jene Formen, die den Gegenstand unserer Aufmerksamkeit bilden sollen. Die auf der entgegengesetzten Seite auftretenden Kathodenstrahlen erleiden bei der folgenden Schaltung wesentliche Verschiebungen. Verbinden wir nun Kathode und Antikathode, so bleiben einige der Formen, namentlich auf der von der Kathode abgewendeten Seite in der Umgebung von *B*, bestehen, und diese sind es, welche wir auch dann beobachten, wenn die Antikathode isoliert oder mit der Erde leitend verbunden ist. Dreht man die Antikathode, so bewegen sich diese Formen in demselben Sinne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit. — Bei grösserer Schlagweite (10 bis 12 cm in Luft) begünstigt die Ableitung zur Erde die Bildung der secundären Kathodenstrahlen.

Zur Erzeugung der secundären Kathodenstrahlen kann die Antikathode aus verschiedenen Metallen (*Al*, *Pt*, *Cu* u. s. w.) bestehen; auch fertige Röntgen-Lampen liefern dieselben, falls man die Antikathode nicht mit der Anode verbindet. Flächen von einigen Quadratcentimeter Ausdehnung erweisen sich wirksamer als kleine, und besonders geeignet sind diejenigen Formen der

Antikathode, welche als selbstständige Kathode wirkend (zweite Schaltung) scharf begrenzte Lichterscheinungen liefern.

Die secundären Kathodenstrahlen unterliegen den magnetischen Kräften und haben auch sonst dieselben Eigenschaften, wie primäre Kathodenstrahlen.

Jedesmal, so oft die Antikathode diese secundären Kathodenstrahlen, welche ich zur Unterscheidung von den, aus dem LENARD'schen Fenster stammenden divergenten Strahlen als regelmässige Kathodenstrahlen bezeichnen will, aussendet, ist der Schatten der Antikathode, den die primären Kathodenstrahlen entwerfen, bedeutend grösser, als einer leuchtenden Kathode entsprechen würde. Die an der Antikathode vorüberziehenden Kathodenstrahlen sind offenbar abgelenkt, und zwar in dem Sinne, wie es einer negativen Ladung der Antikathode entsprechen würde, ebenso bei isolierter, wie auch bei einer mit der Erde leitend verbundenen Antikathode. Der Schatten der Antikathode ist immer scharf begrenzt, aber mehr oder weniger verzerrt, wohl eine Folge der ungleichen Vertheilung der ablenkenden Elektricität. Man bemerkt gewöhnlich einen doppelten oder mehrfachen Schatten, ähnlich der von GEITLER* beschriebenen Erscheinung, und zwar zeigt sich der mehrfache Schatten auch dann, wenn als Elektricitäts-Quelle eine vielplattige Influenz-Maschine dient.

Die Existenz der hier beschriebenen secundären Kathodenstrahlen giebt zu einigen wichtigen Folgerungen Anlass. Vor allem gewinnt dadurch jene Ansicht über das Wesen der Röntgenstrahlen, welche ich vor einigen Jahren veröffentlicht habe**, eine wesentliche Stütze. Den Ausgangspunkt meiner hierauf bezüglichen Mittheilung bildet die Annahme äusserst rascher Ladungen der Antikathode, die in so kurzer Zeit erfolgen, dass sie sich selbst in guten Leitern der Elektricität anfangs nur auf die von den Kathodenstrahlen getroffenen Stellen beschränken, dass also die Zeit zur Ableitung der Elektricität nicht ausreicht. Die Existenz derartiger Ladungen wird durch die secundären Kathoden-

* Wied. Ann. 65. p. 123. 1898.

** Zur Deutung der Röntgenstrahlen. Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn 14. p. 63. 1898.

strahlen sozusagen über allen Zweifel erhoben, wie könnten sonst Kathodenstrahlen von der Antikathode ausgehen? Den Ladungen muss ein so bedeutendes Potential entsprechen, dass dadurch Kathodenstrahlen erzeugt werden können, und von besonderer Wichtigkeit ist, dass die Ladungen auch dann noch auftreten, wenn die Antikathode zur Erde abgeleitet ist.

Noch wichtiger dürfte sein, dass die secundären Kathodenstrahlen auf das Wesen der vom LENARD'schen Fenster austretenden Kathodenstrahlen schliessen lassen. Wenn es nämlich wahr ist, dass eine zur Erde abgeleitete Antikathode, als welche auch ein LENARD'sches Aluminium-Fenster zu betrachten ist, unter dem Einflusse auffallender Kathodenstrahlen eine Quelle neuer Kathodenstrahlen bildet, so gewinnt die Ansicht an Wahrscheinlichkeit, nach welcher die LENARD'schen Kathodenstrahlen nicht durch die Aluminiumlamelle dringen, sondern in der Oberfläche derselben erzeugt werden. Dieser Auffassung stellt sich aber eine bedeutende Schwierigkeit hemmend entgegen. Es ist nämlich fraglich, ob die secundären Kathodenstrahlen, welche, sowie die primären, die Oberfläche den Kraftlinien entsprechend in senkrechter Richtung verlassen, unter demselben Gesichtspunkte zu behandeln sind, wie die aus dem LENARD'schen Fenster tretenden divergenten Strahlen? Meiner Ansicht nach ist dies auf Grund der folgenden Ueberlegung wirklich der Fall.

Die von der Kathode fortgeschleuderten, mit negativer Elektricität beladenen Theilchen treffen die Antikathode nicht gleichzeitig; dies ist unter anderem schon aus der verschiedenen Weglänge zu folgern. Jedes auffallende Theilchen, resp. jede Gruppe von gleichzeitig auf ein Flächenelement treffenden Theilchen entladet sich beim Anprall theilweise und die zurückprallenden Theilchen haben im Augenblicke der Trennung wahrscheinlich dasselbe Potential, wie die berührte Stelle der Antikathode. Die der letzteren mitgetheilte Elektricität pflanzt sich anfangs im Metall in jeder Richtung fort, bis sie die hintere Oberfläche erreicht hat; im weiteren Verlaufe geschieht die Fortpflanzung nur in den in der Metallmasse möglichen Richtungen, wahrscheinlich hauptsächlich in der Nähe der Oberfläche. Hält man ein einzelnes auffallendes Theilchen, resp. eine Gruppe auf ein Flächenelement b

(Fig. 2) gleichzeitig anprallender Theilchen vor Augen, so ist klar, dass auf der Rückseite des Metalles das höchste Potential in demjenigen Punkte, der am nächsten zu b liegt, resp. auf derjenigen Fläche q auftreten wird, auf der die Elektricität als gleichzeitig eintreffend betrachtet werden kann. An diesen Stellen kann das Potential den zur Bildung von Kathodenstrahlen erforderlichen Werth am ehesten erreichen. Die Fläche q ist nun umso kleiner, je dünner die Schicht ist, so dass bei sehr geringer Dicke die von der Rückseite ausgesandten Kathodenstrahlen gleichsam von einem Punkte ausgehen, daher nothwendig divergent sein werden. Dasselbe gilt für jeden Punkt der Antikathode, auf den Kathodenstrahlen fallen. Die so entstehenden divergenten Kathodenstrahlen verhindern naturgemäss die Anhäufung der Ladung, wodurch die Entwickelung der regelmässigen, auf die Oberfläche senkrechten Kathodenstrahlen beeinträchtigt oder unmöglich gemacht wird. Dieser Vorgang ist bei dicken Antikathoden ausgeschlossen; denn einestheils sind die Ladungen auf der Rückseite der Platte, die von den einzelnen anprallenden Punkten herrühren, infolge der grösseren Vertheilung der Elektricität viel geringer, andererseits sind die Flächen grössten Potentials (q) nicht mehr als Punkte zu betrachten, daher können die secundären Kathodenstrahlen nicht divergent sein, sondern sie müssen sich wie regelmässige verhalten. Inzwischen ist natürlich eine Dicke vorauszusehen, bei der gewisse einfallende Kathodenstrahlen gemischte secundäre Kathodenstrahlen hervorrufen, so dass zwar alle Richtungen vertreten sind, aber die Intensität in der Richtung der regelmässigen Kathodenstrahlen überwiegt. Möglich, dass dieser Fall auch bei dem LENARD'schen Fenster auftritt, quantitative Messungen dürften aber nicht leicht anzustellen sein, da die einfallenden Kathodenstrahlen die Aluminiumfolie bei der erforderlichen geringen Dicke (ca. 0,003 mm) sehr leicht beschädigen.

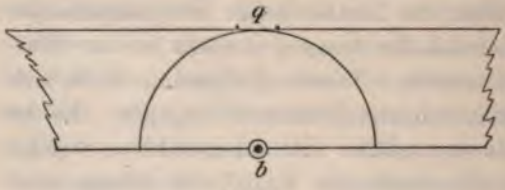


Fig. 2.

Das bisher Entwickelte bezieht sich auf Erscheinungen im Vacuum und lässt sich nach meiner Meinung nicht auf die vom LENARD'schen Fenster in den lufterfüllten Raum tretenden Strahlen ausdehnen. Denn wenn die Kathodenstrahlen wirklich in Bewegung befindliche materielle Theilchen sind, wenn dieselben also nicht als Vorgang im Aether aufzufassen sind, so können in gewöhnlicher Luft Kathodenstrahlen von namhafter Länge ebensowenig gedacht werden, wie in tropfbar-flüssigen oder festen Körpern; denn in der Luft würden Kathodenstrahlen schon auf kurzen Strecken mit so vielen materiellen Theilchen zusammentreffen, dass ihre ungehinderte Ausbreitung ausgeschlossen erscheint. Meiner Ansicht nach hätte man also die aus dem LENARD'schen Fenster in die Luft tretende sog. Strahlung als eine von den Kathodenstrahlen verschiedene Erscheinung aufzufassen. Und wirklich pflanzen sich die LENARD'schen Strahlen in Luft nicht einmal annähernd geradlinig fort, die Luft bildet ein trübes Medium.* Die Ablenkbarkeit durch magnetische Kräfte, welche den Kathodenstrahlen eigen ist, konnte hier nicht einmal versucht werden, da ja eigentliche Strahlen in Luft, sowie auch in anderen Gasen unter gewöhnlichem Druck, überhaupt nicht beobachtet werden können.

Nach der hier vertretenen Auffassung ist den Kathodenstrahlen eine strahlenförmige Ausbreitung zuzuschreiben; dieselbe wäre, der Trägheit der Materie entsprechend, genau geradlinig, wenn elektrische und magnetische Kräfte ausgeschlossen wären. Die Bahn wird aber, von äusseren Kräften abgesehen, durch die Ladungen der bewegten Theilchen, von welchen die Kathodenstrahlen nicht befreit werden können, ein wenig modificiert, indem dadurch elektrische und magnetische Kräfte auftreten. Die Kathodenstrahlen werden vielleicht am präcisesten dadurch charakterisiert, dass der Transport der Elektricität durch Massenbewegung elektrostatischen Ursprunges, nicht durch Leitung erfolgt. Dringen Kathodenstrahlen in Gase von gewöhnlichem Druck, so tritt an ihre Stelle eine anders geartete Entladung, bei der die Elektricität nicht bloss durch die Bewegung materieller Theilchen, sondern

* LENARD, Wied. Ann. 51. p. 235. 1894.

vorwiegend durch den Austausch zwischen benachbarten Körpertheilen, also durch Leitung, befördert wird, ähnlich wie es wahrscheinlich im sogenannten positiven Licht der GEISSLER'schen Röhren der Fall ist. Ich meine, dass man da nicht mehr von Kathodenstrahlen sprechen kann, dass man also diese Bezeichnung auf die strahlenförmige Ausbreitung beschränken sollte. Dasselbe gilt von der Ausbreitung des Lichtes in trüben Medien, wo die Bezeichnung als Strahlen ebenfalls nicht zutreffen würde.

Unsere Auffassung giebt auch darüber Aufschluss, weshalb von den durch Kathodenstrahlen getroffenen Gefässwänden immer divergente Kathodenstrahlen ausgehen. Die anprallenden negativelektrischen Theilchen der Kathodenstrahlen verursachen auf den getroffenen Stellen des Glases locale Ladungen, welche sich wegen der geringen Leitfähigkeit und der kurzen Ladungszeit auf sehr kleine Flächen beschränken, die resultierenden Kathodenstrahlen werden sich also gerade so nach allen Richtungen ausbreiten, als wenn die Entladung aus einzelnen Spitzen erfolgen würde. Das auffallende, die Ladung bewirkende Theilchen selbst dürfte dabei dem regelmässigen Reflexions-Gesetz gehorchen, welches durch die elektrischen Kräfte wohl nur wenig verändert wird, während die materiellen Bestandtheile der übrigen Kathodenstrahlen von dem auf der Glasoberfläche condensierten Gase geliefert werden. Ein Theil der auffallenden Elektricität bleibt wohl am Glase haften, der Rest vertheilt sich auf eine grössere Zahl materieller Theilchen, daher muss die Geschwindigkeit der divergent reflectierten Kathodenstrahlen wesentlich geringer sein, als die der einfallenden. Aus alledem ist zu schliessen, dass es zur Erklärung der divergent reflectierten Kathodenstrahlen nicht nothwendig ist, die Glasoberfläche als rauh zu betrachten, dass sich vielmehr auch eine vollkommen glatte Oberfläche wie eine vollkommen rauhe verhalten müsse.

Die Existenz der von der Glasoberfläche sich lostrennenden, die divergenten Kathodenstrahlen liefernden Gasschichten folgt unter anderem daraus, dass nach dem Erhitzen des Glases die Entladungen leichter erfolgen, und dass die Luftpumpe mehr Gas befördert, als vorher. Es sei hier gelegentlich bemerkt, dass von Kathodenstrahlen vorher getroffenes Glas schwach leuchtet, während

es durch Erwärmung das kondensierte Gas abgiebt. Diese Art der Thermoluminescenz kann, wie es scheint, beliebig lange nach der Einwirkung der Kathodenstrahlen erhalten werden und zwar auch dann noch, wenn das Entladungsrohr schon mit Luft gefüllt ist. Die Luminescenz zeigt sich aber nach jedem Gebrauch nur einmal, erhitzt man nämlich stark genug, so hört das Leuchten auf und wiederholt sich erst, nachdem Kathodenstrahlen von neuem eingewirkt haben. Die Beachtung dieses schwachen Leuchtens erleichtert die Regenerierung zu hart gewordener Röntgen-Lampen wesentlich. Man erhitzt zu dem Zwecke einen Theil der Lampe im Finstern, bis er schwach zu leuchten beginnt. Erhitzt man zu stark, so kann sich der Gasdruck so weit steigern, dass kaum mehr Röntgenstrahlen entstehen; in diesem Falle bessert sich, wie bekannt ist, die Lampe während des Gebrauches, es können die Entladungen mit der Zeit sogar ganz ausbleiben, sodass erneuertes Erhitzen nothwendig wird.

Bei dieser Gelegenheit sei noch bemerkt, dass nach meinen Erfahrungen die Fähigkeit der Kathode, Gase abzugeben, wahrscheinlich in engem Zusammenhange mit der Bildung von Kathodenstrahlen und überhaupt mit dem Zustandekommen von Entladungen steht. Darauf deutet unter anderem, dass in einer möglichst evacuierten Röhre, in der die Entladungen in Folge von anhaltendem Gebrauche ausbleiben, in der also der Widerstand des Gases scheinbar sehr gross ist, bei Umkehrung der Strom-Richtung die Entladungen sofort und zwar bei verhältnissmässig geringer Schlagweite wieder einsetzen. Es hat den Anschein, als würde die Kathode während des Gebrauches jenen Gasvorrath verlieren, der zur Bildung der Entladung erforderlich ist. Eine ähnliche Veränderung, Emission und Absorption von Gasen, mag auch die Wanderung des geschichteten Lichtes in GEISSLER'schen Röhren verursachen. Auf die Bildung der Kathodenstrahlen üben auch andere Umstände einen Einfluss aus, besonders elektrostatische Ladungen der Gefässwände und wahrscheinlich auch die Beschaffenheit des Gases, ob chemische Verbindung oder Gemisch der Bestandtheile, deshalb konnte ich den Einfluss der Gashülle bisher nicht ausser Zweifel setzen.

Würde es gelingen, den Einfluss der Gasentwicklung auf das

Zustandekommen der Kathodenstrahlen unzweifelhaft festzusetzen, so würde die von Hr. LENARD angegebene Thatsache, dass aus dem Fenster Kathodenstrahlen ausgehen, während mit dem Inductor unmittelbar verbundene Elektroden keinen Strom durchgehen lassen, sofort verständlich werden; auf der Oberfläche des Fensters findet sich eben noch die erforderliche Gasschicht, oder die Verbindung, deren Zersetzung Gas zu liefern im Stande ist, während die längere Zeit hindurch gebrauchte Kathode ihres Gasvorrathes schon beraubt ist.

Aus dem Vorerwähnten kann man schliessen, dass das Aussetzen der Entladungen im Vacuum keinen Beweis dafür liefert, dass nicht genügend Materie vorhanden wäre, sondern anderen Einflüssen zuzuschreiben ist. Zur weiteren Unterstützung dieser Folgerung seien noch die beiden folgenden Umstände erwähnt.

Verwendet man im Apparat (Fig. 1) eine bewegliche Antikathode, nämlich ein auf einem Drahte lose hängendes Blech und wird die Verdünnung so weit gesteigert, dass die Entladungen scheinbar ausbleiben, so bemerkt man auf den Gefässwandungen einzelne intensive Lichtflecken und zugleich vollführt die bewegliche Antikathode heftige Bewegungen. Diese, auch schon von Anderen beobachteten Erscheinungen zeigen, dass in dem Gefässe doch noch irgend eine elektrische Veränderung, eine Art Entladung erfolgt. Es gelang mir überhaupt nicht, ein so vollkommenes Vacuum herzustellen, bei welchem keinerlei Anzeichen einer Entladung aufgetreten wären.

Der andere zu erwähnende Umstand besteht darin, dass in einer Röhre, in der zwischen den Elektroden keine regelmässigen Entladungen mehr erfolgen, der ganze innere Raum aufleuchtet, wenn ein Funken-Inductor in der Nähe in Thätigkeit gesetzt wird. Der Gasinhalt ist also nicht so gering, dass von Lichterscheinungen begleitete Entladungen nicht zu Stande kommen könnten. Das Aussetzen der regelmässigen Entladungen zwischen den Elektroden erfolgt, wie bekannt, auch dann, wenn man das Vacuum mit einer Quecksilberluftpumpe in der Sommerhitze erzeugt. In diesem Falle übt der Quecksilberdampf im Vacuum einen verhältnissmässig bedeutenden, einer Quecksilbersäule von wenigstens 0,001 mm entsprechenden Druck aus, es kann also gewiss nicht

behauptet werden, der Mangel an Materie verhindere die Entladungen.

Diese Betrachtungen gestatten noch einen wichtigen Schluss. Wenn nämlich in den möglichst vollkommen evacuierten Gefässen die Menge der zurückgebliebenen Gase zu elektrischen Entladungen und damit verknüpfter Lichtausstrahlung ausreicht, so ist wohl kaum zu bezweifeln, dieselbe Gasmenge könne auch die Fortpflanzung des Lichtes vermitteln. Giebt man dies zu, so entfällt eine der wesentlichsten Stützen der Aethertheorie, nämlich die, dass sich das Licht im materielosen leeren Raume fortpflanzen könne. Da unsere Erfahrungen keinen Anhalt für die letztere Behauptung bieten, so erscheint die Annahme des Aethers als eines von der Materie trennbaren Mediums unbegründet. Derzeit kann nur von einem mit der Materie untrennbar verbundenen Aether die Rede sein, ein solcher bedeutet aber nichts weiter, als gewisse Eigenschaften der bekannten Stoffe.

Anmerkung. Ohne die Frage der Aetherhypothese erschöpfen zu wollen, möchte ich noch das Folgende erwähnen.

Zur Begründung der Aetherhypothese werden u. a. die Querschwingungen des Lichtes herangezogen. Von der Vorstellung elastischer Schwingungen ausgehend stellt man das Dogma auf, dass in Gasen transversale Schwingungen ausgeschlossen seien, daher das Medium der Schwingungen ein anderes sein müsse, welches man Aether nennt. Man scheint nicht bemerkt zu haben, dass diese Schlussweise ihre Grundlage verliert, sobald man sich auf den Boden der elektromagnetischen Lichttheorie stellt. Es dürfte nämlich von vornherein nicht ausgeschlossen sein, dass sich in den materiellen Partikelchen vollziehende elektrische Schwingungen als transversale fortpflanzen können. Aber auch vom Standpunkte der Elasticitäts-Theorie des Lichtes kann man die Richtigkeit des obigen Dogmas bezweifeln. Es ist nämlich bekannt, dass sich jeder Körper um so elastischer erweist, je rascheren Schwingungen er unterworfen wird. Körper, die bei langsamen Impulsen keine Spur einer Elasticität aufweisen, sondern in fortschreitende Bewegung gerathen, erweisen sich in Bezug auf hohe Töne als sehr vollkommen elastisch. Ist es da, angesichts des enormen Sprunges von akustischen zu Lichtschwingungen, nicht denkbar, dass sich die gewöhnlichen Stoffe, namentlich auch die Gase, den Lichtschwingungen gegenüber schon als vollkommen elastische feste Körper erweisen? Man könnte dieser Auffassung die unvollkommene Elasticität der bekannten Stoffe entgegenhalten; doch auch dieser Einwand ist leicht zu beseitigen. Denn elastische Nachwirkungen treten nur bei festen Körpern auf, deren Theilchen gegen einander sehr wenig beweglich sind und auch da nur,

wenn einzelne Theile in Richtung der Scheerungsfestigkeit zu stark in Anspruch genommen sind. Handelt es sich dagegen um kleine Formveränderungen, bei welchen benachbarte Körpertheile nicht bleibend von einander losgerissen werden, oder beschränkt man sich auf reine Volumänderungen, so erweisen sich alle Stoffe als vollkommen elastisch. Besonders augenfällig ist dies bei Gasen und tropfbar-flüssigen Körpern, deren Volumen bekanntlich bloss vom jeweiligen Zustande, nicht von der Vorgeschichte, abhängt.

Zieht man alles dies in Betracht, so scheint die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass die dem Aether zugeschriebenen Eigenschaften den bekannten Stoffen selbst zukommen.

16.

THERMOELEKTROMOTORISCHE KRAFT EINIGER METALLOXYDE UND SULFIDE IN VERBINDUNG MIT EINANDER UND MIT EINFACHEN METALLEN BEI 100° TEMPERATURUNTERSCHIED DER BERÜHRUNGSSTELLEN.

Von Dr. ANTON ABT,
Professor an der Universität zu Kolozsvár (Klausenburg).

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 18. December 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö“ (Math. und Naturwiss. Anzeiger, Band XVIII, p. 25—43).

I. Theil. Litteratur.

Schon SEEBECK, der Erfinder der Thermoelektricität, hat seine grundlegenden Versuche* nicht nur auf die Metalle, sondern auch auf deren Legierungen und auf einige Erze ausgedehnt. Durch diese wurden die Bedingungen der Thermoelektricität festgestellt, nämlich Temperaturdifferenz an den Berührungsstellen und metallische Berührung, die beim Zusammenlöthen am vollkommensten ist. Auch ergab sich daraus, dass mit der Temperaturdifferenz die elektromotorische Kraft oder, wie er sich ausdrückte, die magnetische Spannung der sich berührenden Metalle zunimmt, so z. B., wenn eines der Metalle bis zum flüssigen Zustand erwärmt wird, wobei nach seinen Beobachtungen die magnetische Polarität dieselbe bleibe, wie bei geringerem Temperaturunterschiede des Thermoelementes, und nur die magnetische Spannung

* „Ueber die magnetische Polarisation der Metalle und Erze durch Temperaturdifferenz.“ Denkschrift der Königl. Acad. 1822 u. 1823. — Ann. der Phys. u. Chem. Bd. VI. p. 1, 133 u. 253.

zunimmt. Er hatte also die Umkehrung des thermoelektrischen Stromes bei einer bestimmten höheren Temperatur, wie es scheint, nicht beobachtet.

Zugleich hatte SEEBECK die magnetische Reihe der von ihm untersuchten Körper festgestellt, von der er behauptete, dass die Glieder dieser Reihe den Gesetzen der VOLTA'schen Spannungsreihe nicht folgen, dass aber die magnetische Polarisation einer aus mehreren gleichen Thermoelementen bestehenden Thermosäule unter gleichen Verhältnissen ebenso die eines Thermoelementes übertrifft, wie die Polarisation einer VOLTA'schen Säule die eines einzelnen galvanischen Elementes übertrifft.

Ferner beobachtete er, dass die Stellung der Metalle in der magnetischen Spannungsreihe mit der Temperatur, namentlich bei höheren Temperaturen, eine Verschiebung erleide; dass in einer Leitung aus demselben Metalle durch Temperaturdifferenz elektrische Strömung erzeugt wird; und schliesslich, dass der thermoelektrische Strom zu Beginn der Erwärmung der einen Berührungsstelle am stärksten war, dann aber schnell abnahm, sowie die Wärme sich durch Leitung in dem Thermoelemente fortpflanzte.

Bei seinen Versuchen hatte SEEBECK die durch Temperaturdifferenz erzeugte magnetische Spannung durch die in Graden ausgedrückte Ablenkung einer Declinationsnadel bestimmt, ohne die Intensität des thermoelektrischen Stromes durch eine bestimmte Einheit auszudrücken. Schon aus diesem Grunde und wegen der geringen Empfindlichkeit seiner Messmethode konnte seine magnetische Reihe den Gesetzen der Spannungsreihe nicht folgen.

Genaue Intensitätsmessungen thermoelektrischer Ströme hatte zuerst BECQUEREL* im Jahre 1826 ausgeführt. Die eine Löthstelle eines Kupfereisenelementes wurde mit schmelzendem Eis umgeben, während die andere in eine Glasröhre eingeschmolzen in Quecksilber tauchte, dessen Temperatur mit einer Spirituslampe allmählich erhöht und von 5 zu 5 oder von 10 zu 10 Graden die Ablenkung der Galvanometernadel beobachtet. Das

* Seine diesbezüglichen Untersuchungen hatte er am 13. März 1826 der Pariser Akad. der Wiss. vorgelegt. Compt. rend. — Ann. de chim. et de phys. tome XXXI, p. 371, 1826 und tome XLI, p. 353, 1829.

von ihm benutzte Galvanometer war mit einem astatischen Nadelsystem versehen. Die Graduierung des Instrumentes behufs Intensitätsmessungen der thermoelektrischen Ströme hatte er durch Versuche nach dem Principe ausgeführt, dass zwei, drei oder vier Stromkreise von demselben Durchmesser bei gleichbleibender Stromstärke eine zwei-, drei- oder viermal grössere Wirkung erzeugen, als ein Stromkreis, dass also die beobachteten Ablenkungen der Zahl der Stromkreise proportionalen Stromintensitäten entsprechen. Als constante Ströme, die bei diesen Messungen nothwendig waren, benutzte er die SEEBECK'schen Thermoströme.

Durch diese Versuche hatte er dargethan, dass die elektromotorische Kraft (la force électro-dynamique) der Thermoelemente bis zu einer gewissen Grenze der Temperaturdifferenz der beiden Löthstellen nahezu proportional zunimmt. So z. B. bei *Cu-Fe* von 0° bis 140°, bei *Cu-Ag* von 0° bis 160°. Dabei entging ihm nicht die wichtige Thatsache, dass bei Eisen in Berührung mit einem anderen Metalle die Stromrichtung bei einer gewissen Temperatur ihr Vorzeichen ändert. Zu dieser Beobachtung sagt er: „Et peut-être le fer n'est-il pas le seul métal qui jouisse de cette propriété." Die von ihm aufgestellte thermoelektrische Reihe ist:

—	Bismuth	Blei	Silber	Eisen	
	Platin	Zinn	Kupfer	Antimon	
	Quecksilber	Gold	Zink		+

Schon SEEBECK hatte folgende Reihe aufgestellt:

Bismuth	Titan	Chrom	Kupfer No. 3 (Cäment Cn.)
Nickel	Messing No. 1	Molybdän	Wolfram
Kobalt	Gold No. 1 (Ung. Goldm.)	Kupfer No. 2 (aus dem Handel)	Cadmium
Palladium	Kupfer No. 1 (aus dem Handel)	Rhodium	Stahl
Platin	Messing No. 2	Iridium	Eisen (best. geschm.)
Uran	Quecksilber (reinstes)	Gold No. 2	Arsenik
Kupfer No. 0 (rein)	Blei	Silber	Antimon
Mangan	Zinn	Zink	Tellur

Wie sehr die Stellung einzelner Metalle in der thermoelektrischen Reihe bei höheren Temperaturen sich ändert, ergab sich aus folgender Reihe von SEEBECK:

Bismuth	Stahl	Kupfer No. 2
Nickel-Legierung	Stabeisen	Gold No. 2
Palladium	Messing No. 1	Zink
Platin	Kupfer No. 0	Silber
Blei	Kupfer No. 1	Antimon
Zinn	Gold No. 1	

Aus dieser Verschiebung einzelner Glieder in der thermoelektrischen Reihe bei hohen Temperaturen folgt auch die Umkehrung des Stromes für die betreffenden Metalle, nur hatte er die Temperaturdifferenz, bei welcher die Umkehrung stattfindet, nicht beobachtet. Diese Beobachtungen wurden erst später durch andere ausgeführt.

Bei einem Thermoelemente aus Zink und einer Legierung aus 3 Theilen Kupfer und 1 Theil Antimon beobachtete er bei andauernder Erhitzung der Berührungsstelle die Umkehrung der Polarität noch unter dem Schmelzpunkte (360°) des Zinkes, während dieselbe Legierung in Berührung mit Kupfer selbst bei hohen Temperaturen keine Umkehrung der Polarität zeigte.

Bemerkenswerth ist ferner, dass BECQUEREL geeignete Thermoelemente zur Bestimmung hoher Temperaturen verwendete, wobei er von der Voraussetzung ausging, dass die elektromotorische Kraft des Elementes mit der Temperatur proportional zunimmt, was freilich nur annähernd der Fall ist. So fand er bei der Flamme einer Spirituslampe die Temperaturen in dem oberen blauen Theile, dann in dem weissen leuchtenden und in dem dunkeln inneren Theile derselben 1350°, 1080°, 780°.

Eine grosse Zahl eingehender Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten der Metalle, Erze und Krystalle hat HANKEL ausgeführt. Schon in seiner 1844 veröffentlichten Arbeit hatte er für geringe Temperaturunterschiede von nicht weniger als 75 Körpern deren Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe bestimmt.

Nachdem er seine Untersuchungen auch bei höheren, bis zur

Glühhitze gesteigerten Temperaturen ausführte, machte er ebenfalls die Erfahrung, dass die untersuchten Metalle und Erze ihre gegenseitige Stellung in der thermoelektrischen Reihe ändern, wie dies aus folgender Tabelle ersichtlich ist.

Bei geringer Temperaturdifferenz	Bei hoher Temperaturdifferenz	Bei geringer Temperaturdifferenz	Bei hoher Temperaturdifferenz
—	—	—	—
Bismuth	Bismuth	Kupfer No. 1	Platin No. 2
Neusilber	Kobalt	(Draht)	Silber (12löthig)
Nickel (dicht)	Neusilber	Silber (12löthig)	Eisen
Kobalt	Platin No. 1	Platin No. 2	Kupfer No. 1
Platin No. 1	Nickel (dicht)	Zink	Silber No. 2
(Lamelle)	Arsennickel	Silber No. 2	Kupfer (galv.)
Gold	Messing	Silber No. 1	Silber No. 1
Messing	Gold	Kupfer (galv.)	Zink*
Arsennickel	Zinn	Cadmium	Cadmium
Kupfer No. 2	Blei	Eisen	Antimon
Zinn	Kupfer No. 2	Antimon	+
Blei		+	

Aus seinen Versuchsergebnissen leitete HANKEL folgendes Gesetz ab: „Wenn bei einem Metalle dieser Reihe bezüglich eines andern eine Stromumkehrung stattfindet, so muss dies auch der Fall sein bei allen dazwischen liegenden Metallen bezüglich des einen oder des andern der beiden Metalle.“ So fand er z. B. für Eisen und Kupfer No. 1, dass in Berührung mit Eisen Stromumkehrung stattfindet bei Zink, Silber No. 1 u. 2, galvanischem Kupfer und bei Cadmium; in Berührung mit Kupfer No. 1 hingegen bei 12löth. Silber und bei Platin. Ferner folgerte er aus diesen Beobachtungen den wichtigen Satz, dass die Stromstärke eines Thermoelementes zweier Metalle aus der obigen Reihe gleich ist der Summe der Stromstärken der Thermoelemente aus den dazwischen liegenden Metallen.

Numerische Bestimmungen über die elektromotorische Kraft der Thermoelemente bei verschiedenen Temperaturdifferenzen veröffentlichte er in einer zweiten noch in demselben Jahre erschienenen Arbeit. Bei diesen Bestimmungen wurden die Metalle

* Bei einem Zink- und Silberelement findet die Umkehrung des Stromes schon bei relativ geringer Temperatur statt.

in Draht- oder Bandform verwendet, die nicht dehnbaren in Stangenform gegossen, und die Löthstelle in einer Éprouvette im Sandbade mittels Spirituslampe erwärmt. Temperaturen bis zu 230° bestimmte er mit einem Thermometer, dessen Scala bis 235° R. reichte. Darüber hinausgehende Temperaturen bis 400° wurden mittels eines Platin-Eisen-Elementes, bei welchem die elektromotorische Kraft bis 130° mit der Temperatur proportional zunahm, unter der Voraussetzung der Proportionalität bis 400° durch Rechnung bestimmt.

Zur Messung der thermoelektrischen Ströme verwendete er eine Sinusbussole mit einer aus 6—7 Windungen eines breiten Kupferbandes bestehenden Multiplicatorrolle von geringem Widerstande. Innerhalb dieser befand sich eine an einem Seidenfaden aufgehängte leichte Magnetnadel. Aus der dem Sinus des beobachteten Ablenkungswinkels proportionalen Stromintensität und dem Widerstande des Thermoelementes wurde die elektromotorische Kraft berechnet.

Die Bedeutung der HANKEL'schen Bestimmungen wird dadurch erhöht, dass sich dieselben auch auf die Maxima der elektromotorischen Kräfte und bei einigen Thermoelementen auch auf die Umkehrung der Stromesrichtung beziehen, wie dies aus folgenden Resultaten ersichtlich ist. Den Maximalwerth der elektromotorischen Kraft erreichte ein Thermoelement

aus	Zink	und	Eisen	bei	143° R.
„	Zinn	„	„	„	167° „
„	Galv. Kupfer	„	„	„	169° „
„	Silber	„	„	„	184° „
„	Kupfer No. 1	„	„	„	195° „
„	Gold	„	„	„	206° „
„	Messing	„	„	„	235° „
„	Blei	„	„	wahrscheinlich bei	235—240° R.

Die Temperaturen, bei welchen die Umkehrung der Stromesrichtung erfolgte, also die elektromotorische Kraft gleich Null war, wurde theils aus directen Beobachtungen, theils graphisch aus den Durchschnittspunkten der thermoelektrischen Curven bestimmt. Diese waren

bei	Zink	und	Silber	155°
„	„	„	Galv. Kupfer	171°
„	Gold	„	Messing	224°
„	Zink	„	Eisen	252°
„	Galv. Kupfer	„	„	270°
„	Silber	„	„	295°
„	Gold	„	Kupfer No. 2	330°
„	Kupfer No. 1	„	Eisen	332°

Genaue Messungen über die Stellung in der thermoelektrischen Spannungsreihe hatte auch MATTHIESSEN mit den meisten einfachen Metallen, einigen Legierungen und vielen nicht metallischen Leitern in KIRCHHOFF's Laboratorium ausgeführt. Die Resultate dieser Messungen hatte KIRCHHOFF veröffentlicht*.

In der I. Tabelle dieser Mittheilung sind die nach KIRCHHOFF benannten, nur von der Natur der Metalle abhängigen thermoelektrischen Zahlen der Metalle ausgeführt, wo die des reinen Silbers gleich Null und die des käuflichen Kupfers gleich 1 gesetzt ist. Diese nach den thermoelektrischen Zahlen und ihren Vorzeichen geordnete Reihe enthält 43 verschiedene Körper, darunter 34 einfache Metalle, 4 Legierungen, Gaskohle, rothen Phosphor, Tellur und Selen.

Auf der positiven Seite der Reihe stehen:

Bismuth (käuflich, gepr. Draht)	+ 35,81
„ (rein, „ „)	+ 32,91
Legierung (32 Th. Bism. und 1 Th. Antim.)	+ 29,06
Bismuth (rein, geschm.)	+ 24,96
Bismuthkrystalle (in axialer Richtung) . . .	+ 24,59
„ (in aequat. „) . . .	+ 17,17

In der Mitte der Reihe stehen:

Antimon (rein, gepr. Drath)	+ 0,036
Silber (rein, hart gezogen)	+ 0,000
Gaskohle (aus der Gasfabrik zu Heidelberg) .	— 0,057
Zink (rein, gepr. Dr.)	— 0,208

* Ann. der Phys. u. Chem. Bd. CIII. p. 412, 1858.

Auf der negativen Seite der Reihe stehen:

Rother Phosphor	— 9,600
Antimon (rein, geschm.)	— 9,871
Legierung (12 Th. Bism. und 1 Th. Zinn)	— 13,670
„ (2 Th. Antim. und 1 Th. Zink)	— 22,700
Tellur (rein, geschm.)	— 179,800
Selen (aus d. chem. Laborator. zu Heidelb.)	— 290,000

Bei den Versuchen wurden stets zwei Thermoelemente mit einander verglichen, deren erwärmte und kühl gehaltene Löthstellen auf gleicher Temperatur erhalten wurden, so dass die Temperaturunterschiede der Löthstellen bei beiden Elementen dieselben waren. Die Löthstellen befanden sich in würfelförmigen Gefässen aus Zinkblech, von denen das eine erwärmtes, das andere Wasser von der Lufttemperatur enthielt. Die Berührung der Löthstellen mit dem Wasser wurde durch dünne Kautschukröhren verhütet, worin dieselben eingehüllt waren. Der Zwischenraum der doppelwändigen Gefässe war mit Kohlenpulver ausgefüllt. In dem Stromkreise der beiden Thermoelemente war ein passender Commutator und ein Spiegelgalvanometer eingeschaltet. Die Ablenkung des etwa 1 Pfund schweren Magnetstabes wurde mit Scala und Fernrohr beobachtet.

In den Tabellen II und III sind die Beobachtungsresultate und die abgelesenen Temperaturen zusammengestellt, aus welchen die in Tabelle I angeführten Zahlen bestimmt wurden. Aus diesen Werthen kann das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte zweier Thermoelemente berechnet werden. Die auf diese Weise berechneten Verhältnisszahlen hat MATTHIESSEN mit den aus directen Versuchen erhaltenen Zahlen verglichen und beide gut übereinstimmend gefunden, wie dies aus der Tabelle V ersichtlich ist, aus welcher ich nur einige Fälle hier anführe.

		Beob.	Ber.
Silber, Bismuth (Draht aus d. Handel)	u. Silber, Bismuth	1,088	1,097
„ Kalium	„ „ Palladium	1,542	1,543
„ Blei	„ „ Zinn	1,029	1,027

Auch bei den übrigen Combinationen stimmen die beiden Werthe mit einander gut überein.

1864 wurde von BUNSEN* die elektromotorische Kraft einer einfachen thermoelektrischen Kette aus Kupfer und Buntkupfererz bei hoher Temperatur mit der eines DANIELL'schen Elementes verglichen, wobei die Temperatur der Berührungsstelle mittels einer Gasflamme bis über den Schmelzpunkt des Zinnes gesteigert wurde. Er fand die elektromotorische Kraft des Kupfer-Kupferkies-Elementes bei diesem Temperaturunterschiede 10mal grösser, als die eines Bismuth-Antimon-Elementes bei 100° Temperaturunterschied und gleichem inneren Widerstand. Auch bei einem durch die Flamme eines BUNSEN'schen Brenners erhitzten Elemente aus Platina-Pyrolusit fand er die elektromotorische Kraft so gross, wie die des Kupfer-Kupferkies-Elementes, nämlich gleich $^1/_{10}$ der des DANIELL'schen Elementes.

Auch STEFAN** hat das thermoelektrische Verhalten mehrerer Erze bei hohen Temperaturunterschieden untersucht. Bei diesen Versuchen wurde das Erz auf einen Kupferstreifen gelegt und auf der oberen Seite des Erzes ein Kupferdraht angebracht und diese mit einer Holzklemme an einander gepresst. Ein zweiter Kupferdraht wurde mit dem Kupferstreifen in leitende Berührung gebracht, dann beide Drähte mit einem Galvanometer von grossem Widerstande verbunden und das Ende des Kupferstreifens mit einer Weingeistflamme erhitzt. Zur Herstellung eines Thermoelementes aus zwei verschiedenen Erzen wurde zwischen diesen Stücken ein Kupferstreifen und an den gegenüberliegenden Seiten der Erzstücke Kupferdrähte angebracht, dann diese mittels einer Holzzwinge an einander gepresst. Der Kupferstreifen diente bloss zur Leitung der Wärme bis zu den Berührungsstellen. Die elektromotorische Kraft der so untersuchten 14 Thermoelemente ist in Zahlen angegeben, welche ausdrücken, wie viele dieser Elemente zu einer Kette vereint eine elektromotorische Kraft gleich der eines DANIELL'schen Elementes geben.

Aus diesen Versuchen ergab sich, dass die elektromotorische Kraft zweier Erze je nach Structur und Zusammensetzung sowohl

* Ann. der Phys. u. Chem. Pogg. Bd. CXXIII, p. 505, 1864.

** „Ueber einige Thermoelemente von grosser elektromotorischer Kraft." Anzeiger der Wiener Akad. 1865, No. IX und Ann. der Phys. u. Chem. Bd. CXXIV, p. 632, 1865.

bezüglich der Grösse als des Vorzeichens verschieden sein kann. Den grössten Werth hatte ein Thermoelement aus Bleischweif (zu Galenit gehörig) und Buntkupfererz, von welchen 5,5 zusammen eine elektromotorische Kraft gleich der eines DANIELL'schen Elementes geben, während von den aus bestimmten Legierungen angefertigten MARKUS'schen Elementen eine Säule aus 18 solchen Elementen an elektromotorischer Kraft einem DANIELL'schen Elemente gleichkommt.

Dass die elektromotorische Kraft der Thermoelemente meist nur innerhalb enger Grenzen der Temperaturdifferenz proportional ist, und dass namentlich bei höheren Temperaturen die demselben Temperaturunterschiede entsprechende elektromotorische Kraft bei zunehmender Temperatur abnimmt, dass ferner ein Thermoelement bei einer bestimmten Temperatur den höchsten Werth seiner elektromotorischen Kraft erreicht, welcher dann bei weiterer Zunahme der Temperatur fortwährend bis Null abnimmt, und dann die Richtung des Thermostromes wechselt, ist aus den vielen eingehenden Untersuchungen von GAUGAIN, AVENARIUS, NACCARI und BELLATI, W. THOMSON und TAIT bekannt.

II. Theil. Eigene Bestimmungen.

Da bisher die thermoelektromotorische Kraft der Erze bei geringen, z. B. bei 100°, Temperaturunterschieden nicht bekannt sind, und da mir das zu meinen Untersuchungen über das magnetische Verhalten der Erze gesammelte Material zur Verfügung stand, so entschloss ich mich, dasselbe auch in dieser Richtung zu verwerthen und die thermoelektromotorische Kraft dieser Erze und noch einiger Metalle bei einer Temperaturdifferenz von nahe 100° zu bestimmen. Die zur Untersuchung verwendeten Erze hatten die Form eines vierseitigen Prismas von quadratischem Querschnitt, deren Länge 10 oder 14,6 cm und deren Querschnitt $1{,}4 \times 1{,}4$ cm^2 betrug. Die Metallstäbe und die gepresste Kohle waren von cylindrischer Form.

A) Erwärmungsapparat.

Der Apparat, mit welchem die eine Löthstelle der untersuchten Thermoelemente auf 0° und die zweite auf der Temperatur

der siedenden Wasserdämpfe erhalten wurde, bestand aus folgenden Theilen. Auf einem Brett M (Fig. 1, 2 und 3) befanden sich zwei Träger N, N aus Holz, welche in einem Schlitz des Fussbrettes M einander genähert und dann mittels der Schrauben s, s an M befestigt werden konnten. Auf jedem dieser Träger ist ein cylindrisches Gefäss A aus Gelbblech befestigt. In gleicher Höhe mit diesen und in der Mitte zwischen beiden befindet sich ein drittes cylindrisches Gefäss B aus Gelbblech auf den Eisenträgern l, l befestigt, welches von einem Blechmantel umgeben und mit einem Dampf-Ausströmungsrohre g versehen ist. Die im Längendurchschnitte (Fig. 2) sichtbaren cylindrischen Höhlungen n, welche sich in den die Gefässe querdurchsetzenden Kupferstücken d befinden, dienen zur Aufnahme der zu untersuchenden Stäbe p_1, p_2 (Fig. 1) und die in unmittelbarer Nähe angebrachten Röhren c, in welchen sich etwas Quecksilber befand, zur Aufnahme der aus Jenaer Glas angefertigten Thermometer t_1, t und t_2. Vor jedem Versuche wurden die Gefässe A mit zerstossenem Eise und B mit reinem Wasser gefüllt und letzteres mittels einer Gasflamme zum Sieden gebracht. An den Thermometern t_1 und t_2 wurden die Temperaturen der abgekühlten Enden, am Thermometer t die Temperatur der erwärmten Berührungsstelle der Stäbe p_1 und p_2 abgelesen.

Nachdem das Wasser den Siedepunkt erreicht hatte, wurden die Enden zweier Stäbe p_1 und p_2 aus verschiedenem Material in die Höhlungen n eingeführt, dann die Schrauben s gelüftet, die Träger N soweit, als nöthig, an B herangerückt, dann die Schrauben s angezogen und mittels der Schrauben r, r der Contact zwischen den Stäben und den Kupferstücken d hergestellt. Die Klemmschrauben k, k dienen als Pole der so gebildeten Thermoelemente.

B) Messmethode.

Die Vergleichung der elektromotorischen Kräfte der untersuchten Thermoelemente geschah nach der von KIRCHHOFF modificierten POGGENDORFF'schen Compensationsmethode, deren Vortheile, wie bekannt, darin bestehen, 1) dass die Bestimmung auf einer Längemessung beruht, welche mit grosser Genauigkeit be-

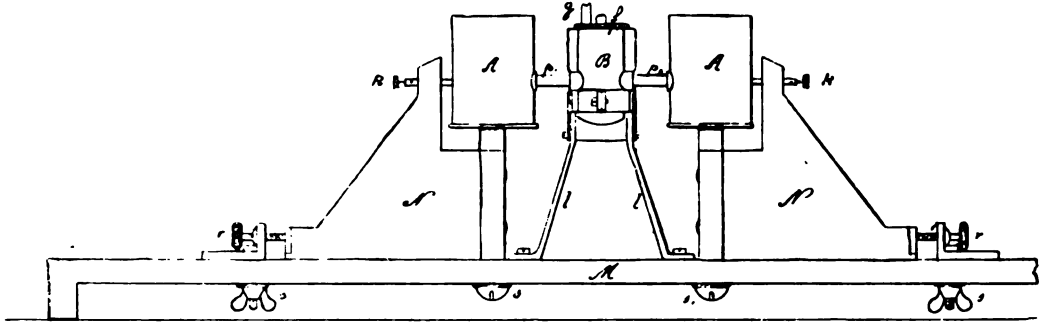


Fig. 1.

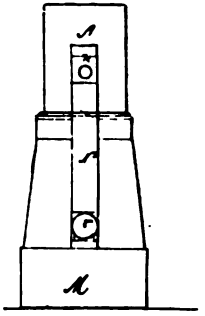


Fig. 3.

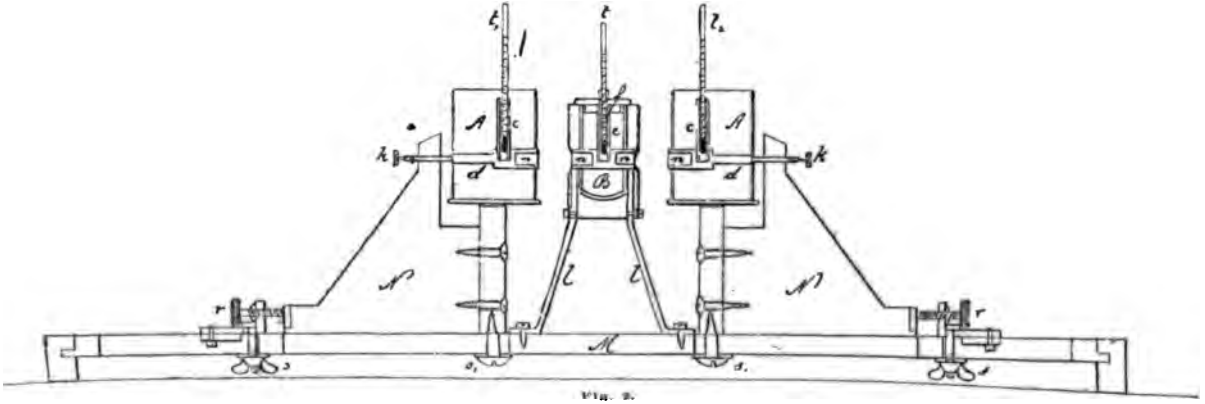


Fig. 2.

werkstelligt werden kann, 2) dass die Nullstellung der Galvanometernadel mit Genauigkeit beobachtet werden kann, 3) dass bei galvanischen Elementen während der kurzen Zeit des Stromschlusses die Polarisation des Elementes auf ein Minimum reduciert wird und endlich 4) dass durch dieselbe das Verhältniss der elektromotorischen Kräfte ohne die Kenntniss der Leitungswiderstände bestimmt werden kann nach der bekannten einfachen Relation

$$\frac{e}{e'} = \frac{a}{a'},$$

in welcher e, e' die elektromotorischen Kräfte der mit einander zu vergleichenden Thermoelemente, a, a' die auf einem gespannten Platindrahte mittels einer Millimeterscala gemessenen respectiven Längen bedeuten, bei welchen die Compensation, respective die Nullstellung der Galvanometernadel erreicht wird.

Zur Messung der Längen a wurde ein aus der Fabrik von SIEMENS & HALSKE bezogener Apparat verwendet. Unterhalb des 1 m langen gespannten Platindrahtes befindet sich die in Millimeter getheilte Scala, längs welcher der bewegliche Contact auf einer Schiene verschoben werden konnte, bis die Nullstellung der Galvanometernadel erreicht war. Sobald dies stattgefunden hatte, wurde der Arm mit dem Platincontact umgeschlagen und die Länge a an der Scala abgelesen.

Zur Beobachtung der Nullstellung diente ein Spiegelgalvanometer nach WIEDEMANN aus EDELMANN's mechanischer Werkstätte.

Die Compensation geschah mittels des Stromes eines DANIELL'schen Elementes.

Nachdem das Thermoelement, respective zwei verschiedene Stäbe, im Erwärmungsapparate eingestellt war, wurden die Polschrauben k, k und die Pole des compensierenden Elementes in erforderlicher Weise mit dem Schlittenapparate und dem Galvanometer verbunden, der Schlitten so lange verschoben, bis die Nullstellung erreicht war, und dann die Länge a abgelesen. Die so erhaltenen Werthe von a habe ich in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Die Compensierung geschah mittels eines DANIELL'schen Elementes, dessen gut amalgamierter Zinkcylinder in Zinksulfat-

Lösung tauchte. Bei der Bestimmung der in Tabelle I angeführten Thermoelemente wurde ein DANIELL'sches Element von kleiner Oberfläche und einer elektromotorischen Kraft gleich 1,06 Volt benutzt. Die zur Bestimmung der Temperaturen verwendeten Thermometer waren aus Jenaer Glas angefertigt und nach halben Graden getheilt.

Zu bemerken ist, dass die elektromotorische Kraft der Thermoelemente, wie schon SEEBECK beobachtet hatte, anfangs den grössten Wert hat, dann aber in Folge der Wärmeleitung abnimmt, und wie aus meinen Beobachtungen sich ergab, nur sehr spät ein Zustand eintrat, bei welchem die Werthe von a sich nur wenig mehr ändern. Die in diesem Zustande beobachteten Werthe von a sind in der Tabelle I, die Maximalwerthe von a in der Tabelle II zusammengestellt.

Da der Strom des Pyrit-Chalkopyrit-Elementes mittels des Stromes des kleinen DANIELL'schen Elementes nicht compensiert werden konnte, so wurde für dieses Thermoelement und des Vergleichs halber auch für das Bismuth-Antimon-Element zur Compensation ein DANIELL'sches Element von grosser Oberfläche verwendet. Die erhaltenen Resultate waren folgende:

Thermoelement	a	t_1	t	t_2
Pyrit-Chalkopyrit	413,1	1,0°	98,6°	0,6°
Bismuth-Antimon	54,1	0,5°	98,4°	1,0°

Aus diesen Versuchsresultaten ist ersichtlich, dass die Metallsulfide und Metalloxyde unter sich und mit einigen einfachen Metallen schon bei diesem geringen Temperaturunterschiede von 98°—99° C. Thermoelemente von verhältnissmässig bedeutender elektromotorischer Kraft liefern. So ist z. B., wenn die elektromotorische Kraft von

Bismuth-Antimon = 1 ist,

die von

Pyrit-Chalkopyrit = 7,62.

Nach den Resultaten der 2. und 6. Reihe ergiebt sich die elektromotorische Kraft des Pyrit-Pyrolusit-Elementes 4,67mal grösser, als die des Bismuth-Antimon-Elementes.

Tabelle I.

Thermoelektromotorische Kraft einiger Metalle, Metalloxyde und Metallsulfide für den Fall, wo die Werthe von a sich nur wenig mehr änderten.

Thermoelement	a	t_1	t	t_2	Thermoelement	a	t_1	t	t_2
Antimon					Pyrrhotit				
und Eisen . . .	50,9	0,9	98,2	1,5	und Bismuth . .	178,0	0,3	98,2	1,5
„ Kohle . . .	62,1	0,3	98,0	1,0	„ Pyrolusit .	366,4	0,4	98,2	0,9
„ Cadmium .	74,7	0,9	98,2	1,0	„ Chalkopyrit	649,5	0,4	98,2	0,9
„ Zink . . .	77,0	1,2	98,2	1,2	Chalkopyrit				
Bismuth					und Pyrolusit .	313,5	1,2	98,4	0,2
und Zink . . .	134,6	0,5	97,9	1,7	„ Bismuth . .	545,2	0,5	98,4	0,4
„ Eisen . . .	145,3	0,5	97,9	0,9	„ Zink . . .	602,6	2,0	98,2	2,0
„ Kohle . . .	153,4	0,5	98,2	0,5	„ Nickel . .	618,8	0,5	98,0	1,5
„ Cadmium .	162,1	0,5	98,1	0,6	„ Kupfer . .	618,8	0,7	98,2	2,0
„ Kupfer . .	170,2	0,6	98,2	0,9	„ Cadmium .	625,1	1,7	98,4	0,7
„ Antimon .	199,7	1,3	98,1	1,5	„ Nickelerz .	629,2	0,2	98,4	0,6
Pyrolusit					„ Kohle . . .	644,6	0,5	98,4	0,0
und Bismuth . .	210,6	0,2	98,8	0,9	„ Pyrrhotit .	648,8	0,5	98,4	0,4
„ Nickel . .	285,1	0,5	98,4	2,0	„ Eisen . . .	667,1	0,7	98,4	2,0
„ Chalkopyrit	309,6	0,4	98,0	0,9	„ Antimon . .	669,3	0,0	98,2	0,5
„ Kohle . . .	315,2	0,2	98,4	2,0	„ Pyrit . . .	konnte nicht compensiert werden			
„ Cadmium .	319,2	0,2	98,0	0,5					
„ Zink . . .	331,1	0,2	98,0	1,7	Pyrit				
„ Kupfer . .	333,6	0,5	97,6	1,2	und Pyrrhotit .	563,2	0,5	98,2	1,8
„ Eisen . . .	353,9	0,5	97,8	1,0	„ Antimon . .	576,3	0,5	98,2	1,8
„ Pyrrhotit .	370,1	0,8	97,8	1,0	„ Kupfer . .	594,5	0,6	98,2	1,9
„ Antimon .	396,9	0,2	98,0	0,6	„ Zink . . .	600,5	0,5	98,2	1,8
Pyrrhotit					„ Cadmium .	612,5	0,5	98,2	1,6
und Eisen . . .	11,0	0,3	98,2	1,0	„ Kohle . . .	615,6	0,0	98,2	1,0
„ Antimon . .	21,7	0,2	98,4	0,7	„ Eisen . . .	635,9	0,5	99,2	2,0
„ Zink . . .	29,7	0,5	98,2	1,0	„ Nickel . .	642,9	1,8	98,2	1,7
„ Kohle . . .	29,9	0,4	98,2	0,5	„ Nickelerz .	675,8	0,5	98,2	1,8
„ Nickelerz .	41,3	0,5	98,2	0,6	„ Bismuth . .	731,9	1,0	98,4	1,0
„ Cadmium .	53,0	0,5	98,2	0,6	„ Pyrolusit .	933,2	0,4	98,2	2,0
„ Kupfer . .	55,0	0,6	98,2	0,7	„ Chalkopyrit	konnte nicht compensiert werden			
„ Nickel . .	59,8	0,3	98,2	1,5					

Die Compensation konnte bei einiger Uebung in ganz kurzer Zeit erreicht werden, so dass während dieser der Strom des Hydroelementes sich kaum merklich änderte.

Da jedoch diese Versuche längere Zeit in Anspruch nahmen, so musste das DANIELL'sche Element öfters von neuem zusammengestellt werden, wobei sich dann trotz aller Sorgfalt, die auf die Amalgamierung des Zinkes und auf die Reinlichkeit und den Concentrationsgrad der Flüssigkeiten verwendet wurde, kleine

Aenderungen der elektromotorischen Kraft ergeben konnten, wel
auf die Versuchsresultate nicht ohne Einfluss waren. Eine wei
Fehlerquelle konnte sich trotz aller Vorsicht bei der Herstell

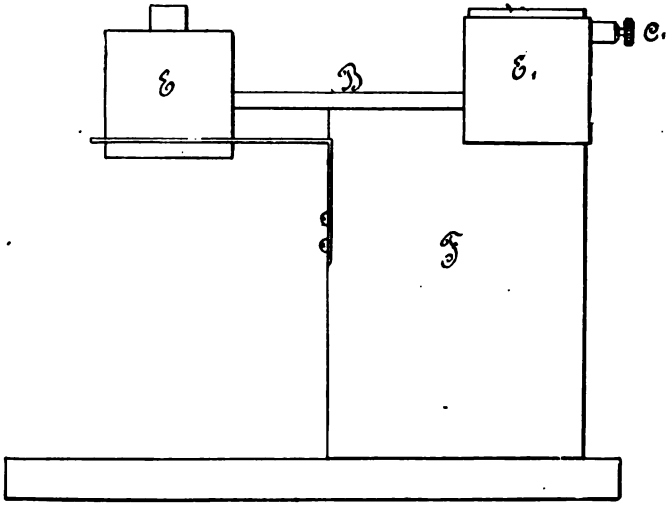


Fig. 4.

des Contacts an den Berührungsstellen auch hieraus ergeben, wel
nur durch Zusammenlöthen oder durch sorgfältige Quecksil
contacte vollständig beseitigt werden können.

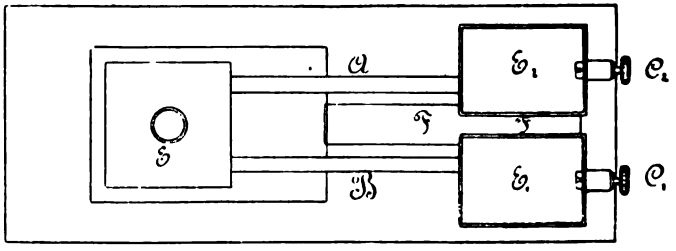


Fig. 5.

In manchen Fällen waren die Differenzen der erhalte
Werthe von a desselben Thermoelementes, respective eines
denselben Metallen zusammengestellten Thermoelementes

gering, in einigen Fällen aber schon etwas grösser. So wurde z. B. für die Combination Bismuth-Antimon für a der Werth von 81 mm beobachtet, dann wieder bei einer neuen Füllung des kleinen DANIELL'schen Compensationselementes 79,4. Die Differenz dieser Werthe ist gleich 1,6 und die Abweichung der einzelnen vom Mittelwerthe (80,2) beträgt 0,8, also nahe 1%.

Bei einem zweiten Bismuth-Antimon-Elemente von der Form Fig. IV und V wurde bei demselben Temperaturunterschiede mit demselben compensierenden DANIELL'schen Elemente und bei derselben Empfindlichkeit des Galvanometers für a der Werth von 78,5 mm erhalten, welcher vom Mittelwerthe des oben erwähnten Bismuth-Antimon-Elementes um 1,7 mm, also um 2%, abweicht. Die untersuchten Metalle wurden so, wie sie im Handel vorkommen, zu den Versuchen verwendet.

Die Zusammenstellung dieses Bismuth-Antimon-Elementes ist aus den Figuren IV und V zu ersehen. B bezeichnet die Bismuthstange, A die Antimonstange, E das Erwärmungsgefäss, E_1 und E_2 die Kühlgefässe, C_1 und C_2 die Verbindungsschrauben, T das Holzgestell und F die isolierende Substanz zwischen den Kühlgefässen. Dieses bei dem hiesigen Universitätsmechaniker angefertigte Thermoelement hat sich zur Erzeugung constanter schwacher Ströme als sehr zweckmässig bewährt. Auch der in Fig. 1, 2 und 3 dargestellte Apparat ist in derselben Werkstätte nach Angabe angefertigt worden.

Auch eine Tellurstange aus dem königl. ung. Hüttenamt zu Selmeczbánya (Schemnitz) habe ich auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersucht. Von diesen Resultaten will ich nur folgende mittheilen:

	a	t_1	t	t_2
Bismuth-Tellur	57,5	2,5	98,0	1,0
„ Antimon . .	81,0	1,0	97,2	2,0
Chalkopyrit-Tellur .	393,8	1,5	98,0	0,4
„ Antimon	421,9	1,2	98,0	1,0

Aus diesen ist ersichtlich, dass dieses Tellur in der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle vor dem Antimon steht, während das reine Tellur nach den Bestimmungen von E. BECQUEREL und denen von MATTHIESSEN weit nach dem Antimon folgt.

Kennt man die elektromotorische Kraft eines Bismuth-Antimon-Elementes in Bezug auf die eines DANIELL'schen Elementes oder auf ein Volt, so lässt sich mit Hilfe der Werthe a die elektromotorische Kraft der untersuchten Thermoelemente in Volt berechnen.

Nach BECQUEREL ist

$$1\,B/A = 0{,}004826\,D,$$

nach meinen Untersuchungen ist

$$1\,B/A = 0{,}004995\,D,$$

wenn man die elektromotorische Kraft eines DANIELL'schen Elementes kurz mit D und die eines Bismuth-Antimon-Elementes mit B/A bezeichnet.

Bei dieser Untersuchung wurde für eine Thermosäule aus 20 Bismuth-Antimon-Elementen bei einer Temperaturdifferenz von nahe 100° nach der Compensationsmethode für a der Werth bestimmt und dann durch 20 dividiert.

Vergleicht man die mitgetheilten Resultate mit einander, so erhält man für die von mir untersuchten Metalloxyde und Metallsulfide folgende Spannungsreihe:

—		
Chalkopyrit	Kupfer	Eisen
Pyrolusit	Cadmium	Pyrrhotit
Bismuth	Nickelerz	Antimon
Zink	Kohle (für Bogenlicht)	Pyrit
Nickel		+

Die Glieder dieser Reihe folgen dem Gesetze der thermoelektrischen Spannungsreihe der Metalle mit hinreichender Annäherung. So findet man z. B.

Pyrolusit/Kohle + Kohle/Pyrit = Pyrolusit/Pyrit
315,2 + 615,6 = 930,8 (beob. 933,2),

ferner

Bismuth/Zink + Zink/Pyrit = Bismuth/Pyrit
134,6 + 600,5 = 735,1 (beob. 731,9).

Von den Untersuchungen, durch welche die grössten Werthe von a gleich nach der Zusammenstellung der Thermoelemente

ermittelt wurden, will ich hier nur jene Versuchsreihen anführen, welche sich auf die Thermoelemente der Metalloxyde und Metallsulfide beziehen. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle enthalten.

Tabelle II.

Thermoelektromotorische Kraft einiger Metalle, Metallsulfide und Oxyde gleich nach der Zusammenstellung des Thermoelementes, wo a den grössten Werth hatte.

Element	a	t_1	t	t_2	Z
Galenit I					
und Chalkopyrit . . .	64,8	0,5	98,9	1,1	0
„ Pyrolusit	228,9	0,1	98,9	0,2	0
„ Pyrrhotit	269,1	1,5	99,1	0,6	4
„ Nickelerz	269,7	0,1	99,0	0,1	4
„ Pyrit	409,5	0,6	99,0	1,2	0
Galenit II und Pyrit .	675,8	0,4	99,0	0,5	0
Pyrit					
und Pyrrhotit	118,1	1,5	99,0	2,1	4
„ Nickelerz	185,4	1,0	99,0	2,1	0
„ Galenit I	409,5	0,6	99,0	1,2	0
„ Chalkopyrit . . .	434,3	0,5	98,8	0,8	4
Chalkopyrit					
und Galenit I	64,8	0,5	98,9	1,1	0
„ Nickelerz	108,1	0,8	99,1	0,4	8
„ Pyrrhotit	112,5	0,4	98,7	0,3	0
„ Pyrolusit	122,0	0,4	98,2	0,2	0
„ Pyrit I	434,3	0,5	98,8	0,8	4
„ Pyrit II	543,3	0,2	98,9	0,6	4
Pyrolusit					
und Nickelerz	108,3	0,6	99,1	0,2	4
„ Chalkopyrit . . .	122,0	0,4	98,2	0,2	0
„ Galenit I	228,9	0,1	98,9	0,2	0
Bismuth					
und Antimon	50,3	0,7	98,2	1,2	8

Es ist daher

für Bismuth-Antimon = 1,0
„ Galenit-Pyrit = 13,4
„ Chalkopyrit-Pyrit = 10,8.

Dieser Werth der elektromotorischen Kraft des aus Chalkopyrit und Pyrit bestehenden Thermoelementes ist bedeutend grösser, als der in Tabelle I angeführte, auch ergiebt sich aus diesen Werthen von a, dass auch die Stellung in der Spannungsreihe für einige dieser Körper eine andere ist, als nach Tab. I.

Es ist daher bei diesem Temperaturunterschiede der Berührungsstellen die elektromotorische Kraft des Galenit-Pyrit-Elementes 13,4mal, die des Chalkopyrit-Pyrit-Elementes 10,8mal grösser, als die eines Bismuth-Antimon-Elementes.

Bei den Versuchsreihen für die grössten Werthe von a wurde zur Compensation ein DANIELL'sches Element von grösserer Oberfläche angewendet, und das Spiegelgalvanometer war von geringerer Empfindlichkeit. Die Zahlen der letzten Rubrik der Tabelle II bezeichnen annähernd die in Minuten ausgedrückte Zeit, in welcher a nach der Einstellung des Elementes in den Apparat den grössten Werth erreichte. Dieses fand bei den meisten Elementen gleich nach der Einstellung statt, aber nicht bei jedem. So z. B. war bei dem Bismuth-Antimon-Elemente unmittelbar nach der Einstellung $a = 193{,}6$, nach 4 Minuten aber nur 181,5. Hingegen war bei dem Nickel-Pyrrhotit-Elemente anfangs $a = 15{,}9$, nach 4 Minuten 16,9, nach 8 Minuten 18,8 und nach 12 Minuten 17,4. Ersteres hatte also gleich bei Beginn, letzteres aber erst später den grössten Werth an elektromotorischer Kraft erreicht.

17.

EINFLUSS DES MAGNETISMUS AUF DIE WÄRME-LEITUNGSFÄHIGKEIT DES EISENS.

Von DESIRÉ KORDA.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Januar 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítő“ (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVII, pp. 169—181.

Ich habe es mir zur Aufgabe gestellt während des näheren Studiums der bekannten Wirkung, welche der magnetische Raum auf das chemische Verhalten der Eisensalze auszuüben im Stande ist, zu untersuchen, ob der magnetische Zustand nicht auch gleichzeitig die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens beeinflusst. Meine Untersuchungen haben mich zu einem positiven Resultate geführt, und es ist mir gelungen, sowohl experimentell als auch auf theoretischem Wege darzulegen, dass in der Richtung der magnetischen Kraftlinien die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens eine geringere wird, ob nun die Richtung der magnetisierenden Kraft eine positive oder negative ist.

Der letztere Umstand lässt uns vermuthen, dass sich die Verringerung mit dem Werthe der magnetisierenden Kraft in paariger Potenz des Verhältnisses äussert. Wie wir sehen werden, ergiebt sich aus den theoretischen Betrachtungen eine quadratisch proportionale Menge, nur dass diese gleichzeitig von dem Werthe des Wärmegrades auch direct abhängt, welch letzterer Umstand deren Verhältnissmässigkeit auf experimentellem Wege nachzuweisen, sehr erschwert.

Die gewonnenen Resultate stellen eine bestimmte Analogie zwischen den ferromagnetischen Körpern und den Eigenschaften der einachsigen Krystalle fest. Ebenso wie bei den Letzteren der Ausdehnungscoëfficient und die Wärmeleitungsfähigkeit in der Richtung der Achse und in der, auf sie senkrecht wirkenden Richtung verschieden ist, so verlieren die magnetisierten Körper auch ihr isotropes Verhalten und nehmen die Eigenschaften der Achse der Krystalle in der Richtung der magnetischen Linien an.

Stellen wir diese in eine Parallele mit jener FRESNEL'schen Erscheinung, nach welcher ein Glasprisma, wenn es in irgend einer Richtung gepresst wird, in der Richtung des Lichtes eine Doppelbrechung zeigt; oder aber mit jenem KERR'schen, bei welchem in dem flüssigen Condensator in Folge der, durch die elektrischen Kraftlinien hervorgebrachten Dyssymmetrie die isolierende Flüssigkeit doppelt brechend wird, und zwar in der Weise, dass ihre optische Achse in die Richtung der Kraftlinien fällt: so wird es sehr wahrscheinlich, dass die magnetisierten Körper in der Richtung der strahlenden Wärmeschwingungen doppelt brechen und gleichzeitig zeigt sich das Resultat unserer Versuche nahe liegend, welches die Veränderung der Wärmeleitungsfähigkeit in der Richtung der magnetischen Linien anzeigt, und welche auf diese Art mit den darauf bezüglichen verwandten Erscheinungen in vollkommenem Einklang zu stehen scheint.

2. Den experimentellen Theil meiner Studien führte ich zuerst auf einer dünnen runden Eisenplatte aus, bei welcher die Wärmequelle ihren Sitz in der Mitte hatte. Bei dieser Einrichtung ist die Erscheinung sehr leicht zu beobachten; bei der nöthigen Vorsicht wird sie sogar so auffallend, dass sie jeden Zweifel an ihrem Vorhandensein ausschliesst. Später, u. z. hauptsächlich vom Gesichtspunkte der quantitativen Beobachtungen, versuchte ich die Wirkung auf Eisenstäbchen, durch welche ich auf die weiter unten zu beschreibende Weise auch pünktlichere Messungen ausführen konnte.

Aus einer etwas dünnern als einen halben Millimeter (0,35 mm) starken Platte aus weichem Eisen, wie man sie zur Armatur von Electromotoren anzuwenden pflegt, liess ich eine im Durchmesser 320 mm messende runde Scheibe schneiden, und daraus

in Zwischenräumen von einem Centimeter eine Skala von concentrischen Kreisen anbringen. In der Mitte wurde eine mit dünnen Wänden versehene Eisenröhre von 90 mm Durchmesser angelöthet, welche im Laufe des Versuches als Wärmequelle diente, auf die einfache Art, dass sie im nöthigen Augenblicke mit heissem Wasser, noch häufiger aber mit heissem Oel gefüllt wurde. Nachdem, in Folge der Abkühlung diese Wärmequelle, im Laufe des Experimentes nicht im Entferntesten als gleichmässig warm betrachtet werden konnte, wurde die erwähnte Röhre bei einer späteren Einrichtung so montiert, dass sie durch die Scheibe durchgeführt wurde und so, nachdem sie noch an beiden Enden geöffnet blieb, konnte ich durch diese während der gewünschten Zeit eine heisse Flüssigkeit von nahezu constanter Temperatur durchfliessen lassen. Damit mir eine bedeutend stärkere Wärmequelle zur Verfügung steht, beabsichtigte ich einige Zeit lang die Kohlenstangen einer electrischen Bogenlampe in der Achse des Rohres anzubringen; ich war aber genöthigt von meinem Vorsatze abzustehen, damit keine magnetischen Räume in der Scheibe entstehen, da diese die Quelle von Fehlern wären.

Vor dem Experimentieren überzog ich die ganze Scheibe mit einer dünnen sehr gleichförmigen Paraffinschichte und befestigte sie an den Polen eines vertical eingerichteten starken FARADAY-BECQUEREL'schen Electromagneten. Die Pole waren kreisförmig, im Durchmesser von 72 mm, der Mittelpunkt sowohl des Nord- als auch des Südpoles war von dem Rande der Scheibe 59 mm entfernt, befand sich also vom Mittelpunkte der Scheibe in einer Entfernung von 102 mm. Grosse Sorgfalt verwendete ich darauf, dass die Pole der Magnete als Metallstangen von einer grösseren Masse, im Laufe des Versuches keine wärmeableitende Wirkung auf die Scheibe ausüben können, denn sonst würde das ganze Resultat des Versuches ein illusorisches gewesen sein. Desshalb wurde die Scheibe von den Polen durch eine gut comprimierte, anderthalb Centimeter dicke, Wollschichte und eine Glimmerblättchenschichte von entsprechender Ausdehnung getrennt. Auf diese Weise konnte der Einfluss jener schädlichen Wärmeableitung thatsächlich vermieden werden, wie dies das Experiment bewiesen hat. Ich befestigte nämlich die Scheibe an den Polen

und goss die heisse Flüssigkeit in die zu ihrer Aufnahme dienende Röhre so lange, bis die Magnetspulen angeregt wurden, und das Schmelzen der Paraffinschichte, welches durch die, auf der Scheibe sich verbreitende Wärme verursacht wurde, in jeder Richtung gleichmässig, folglich genau in concentrischen Kreisen vor sich ging. Der wärmeableitende Einfluss der Pole verschwand daher gänzlich.

Nach einigen Minuten trat der definitive Zustand ein und wir können, mit Hilfe der, durch die concentrischen Kreise gebildeten Skala bestimmen, bis zu welchem Kreise das Paraffin geschmolzen ist.

Nach gänzlicher Auskühlung beginnen wir das Experiment von Neuem, jedoch mit dem wesentlichen Unterschiede, dass wir, indem wir die heisse Flüssigkeit eingiessen, gleichzeitig die Magnetspulen anregen. Diesmal wird also die Eisenscheibe in der Richtung der, die Pole verbindenden Magnetlinie magnetisiert, und, wie wir dies deutlich wahrnehmen können, schmilzt das Paraffin nicht mehr in concentrischen Kreisen, sondern in Form von elliptischen Grenzlinien, und verräth dadurch die in dem Eisen vor sich gegangene Veränderung. Die kleine Achse dieser elliptischen Curve, fällt in die Richtung der Magnetachse, die grosse Achse aber scheint in dem Grenzkreise des vorerwähnten Experimentes genau mit dem auf die Magnetachse senkrecht fallenden Durchmesser übereinzustimmen.

Die Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens sinkt demgemäss in der Längsrichtung der Kraftlinien.

Bei einer Scheibe im Durchmesser von 320 mm hatte der grösste Kreis bis zu welchem das Paraffin, bei Benutzung von heissem Oel, schmolz, einen Durchmesser von 200 mm. Gleichzeitig verfügte die auf der magnetisierten Scheibe gebildete elliptische Curve über eine grosse Achse, während ihre kleine Achse 175 mm betrug. Es trat demnach der Magnetachse entlang eine mehr als 12 percentige Veränderung in der Wärmeleitungsfähigkeit des Eisens ein. Eine lange Reihe von Versuchen führte mich jedesmal sehr nahe zu diesem Werthe und zwar ganz unabhängig von der Richtung des den Magnet anregenden Stromes, oder aber von den Vorzeichen der Magnetpole.

Ich wiederholte dasselbe Experiment auf einer kleineren Scheibe, deren Durchmesser nur 80 mm war. In der Mitte war, um die Wärme zuzuleiten, eine 20 mm dicke Metallstange angebracht, welche durch die Scheibe durchgesteckt war. Die Pole des hierzu benutzten verticalen U-förmigen Elektro-Magneten hatten einen Durchmesser von 24 mm, die Entfernung der Achse aber war 80 mm, sodass der Rand der darauf gelegten Scheibe gerade in die Achse der Pole fiel. Als das Schmelzen des Paraffins auf der magnetisierten Scheibe begann, vollzog es sich zuerst in Gestalt einer Ellipse, als es jedoch an den Rand der Scheibe gelangte, verflachte es sich so, dass die Grenzcurve nicht mehr elliptisch war, sondern vielmehr eine lemniskate-bisquitförmige Gestalt mit der die Magnetachse schneidenden Vertiefung annahm. Das Paraffin schmolz also in einem symmetrischen Theile um die Pole herum nicht, im Gegensatze aber schmolz es in der senkrechten Richtung der Magnetachse und zeigte die Ausbreitung der Wärme an.

3. Wenn die Grenzcurve des Schmelzens zur Darstellung der Erscheinung auch sehr entsprechend war, war sie jedoch zur Ausführung von Messungen nicht zweckmässig. Anderseits wollte ich das gefundene Resultat auch auf andere Weise controlieren. Desshalb benutzte ich bei meinen weiteren Versuchen anstatt der Scheibe ein stangenartiges Eisenstück, und leitete meine Messungen auf Zeit- und Wärmegradmessungen zurück, welche vom Gesichtspunkte der Pünktlichkeit am leichtesten auszuführen sind. Die Zeit mass ich mit einem pünktlichen Chronometer, die Werthe des Wärmegrades bestimmte ich in einem Falle mit Hilfe eines thermoelectrischen Elementes, im andern Falle hingegen durch Aenderung des electrischen Wiederstandes, also mittels einer WHEATSTONE'schen Brücke.

Der Verlauf des Versuches war auf die einfachste Weise der folgende: Ein 7 mm starker Eisendraht war unter einem rechten Winkel gebogen. Auf den 200 mm langen horizontalen Theil desselben war eine magnetisierende Spule angebracht und zwar mit Hilfe der an dem Eisendrahte befestigten Isolierstöpsel in möglichst concentrischer Lage, der 100 mm lang herabhängende Theil des Drahtes diente dagegen zur Aufnahme und

weiteren Leitung der Wärme einer darunter gestellten BUNSEN'schen Lampe. Die Dimensionen der magnetisierenden Spule waren die folgenden: Länge: 138 mm, äusserer Durchmesser: 47 mm, innere Oeffnung: 17 mm, Stärke des Drahtes: 1 mm, gemessener Widerstand: 2,77 Ohm, Zahl der Windungen: 1250. Mit Hilfe der Inductionscurven des Eisens bestimmte ich, dass einem Strome von 0,1 Ampère in die erregende Spule im Eisen ein Inductionswerth von nahezu $B = 12000$ cgs entsprach und 0,5 Ampère $B = 17000$ cgs. Eine grössere Stromstärke konnte ich wegen des Vermeidens der Durchwärmung der Spule nicht anwenden.

Die an dem Ende der Eisendrähte sich einstellenden Temperaturschwankungen zeigte ein thermoelectrisches Element (Platin-Eisen) an, welches mit einem sehr empfindlichen DEPREZ-d'ARSONVAL'schen Galvanometer in Verbindung stand. Das Letztere war Herr Professor MARCEL DEPREZ, so liebenswürdig mir in seinem Laboratorium im Conservatoire des Arts et Métiers zur Verfügung zu stellen.

Die eine verlöthete Stelle des Thermo-Elementes war fortwährend auf Eisstücken gebettet, während die andere an das Ende, des zu prüfenden Eisendrahtes, in Form eines Hackens befestigt war. Um die Wärmestrahlen abzuhalten war die Spule und das Thermo-Element von dem BUNSEN'schen Brenner durch einen Schirm getrennt. Es versteht sich von selbst, dass ich den Apparat nach jedem Versuche vollständig abkühlte.

Die folgenden Zahlen zeigen das Resultat der Messungen:

Zeit	I.	II.	III.
0′	0	0	0
2′	0,5	0,5	0,5
2′ 30″	1,5	1	1
3′	3	2,5	2
3′ 30″	4	3	2,5
4′	5,5	4	3,5
4′ 30″	6,5	5	4
5′	8	6	5

die Zahlen unter I. zeigen die Ausweichungen des Galvanometerfleckens auf der Skala, wenn die Eisenstange nicht magnetisiert

ist, während sich die unter II. auf den 0,1 Ampère, und endlich die unter III. auf den 0,5 Ampère erregenden Strom der magnetisierenden Eisenstange beziehen.

Trotzdem ich alles aufbot, dass die hiezu benützte BUNSEN'sche Lampe, welche mit einer schnell zu entzündenden kleinen Flamme versehen, und leicht zu regulieren war, eine gleichmässige Wärmequelle bilden möge, so können dennoch Zweifel entstehen, ob nicht die dazu benützte Wärmequelle selbst gleichzeitig eine Quelle der Fehler ist, um so mehr als die gefundenen Werthe, wider Erwarten sehr grosse, 30 perzentige Temperaturabnahmen aufwiesen.

Um den, aus dem erwähnten Umstande entstehenden Fehler zu eliminieren, musste ich meine Zuflucht zu einem, an die Nullpunktmethoden erinnernden Vorgehen nehmen; und nachdem sich das Anwenden von Thermo-Elementen zu diesem Zwecke, einerseits wegen der Erscheinung der Inversionstemperatur, anderseits aber wegen der aus dem Parallellaufen der beiden Eisenstangen entstehenden magnetischen Zerstreuung als unbequem erwies, bewerkstelligte ich meine Methode mit Hilfe einer WHEATSTONE'schen Brücke auf die folgende Weise.

An dem rechts- sowie linksseitig 9 mm starken, im ganzen 230 mm langen Schafte eines verticalen Metallkreuzes in Form eines T, befestigte ich einen 7 mm dicken und 115 mm langen verticalen Eisendraht. Der mittlere Theil des Metallkreuzes, welcher aus einer 20 mm dicken und 240 mm langen Kupferstange hergestellt war, war dazu bestimmt, die Wärme der unter ihn gestellten BUNSEN'schen Lampe, dem rechten und linken Theile des dünneren Zweiges und den benachbarten Eisenstangen in gleichem Masse zu vermitteln. Jene dickere Stange war anfangs derart beweglich angebracht, dass man den Wärmeleitungsunterschied, welcher sich bei einem ohne den erregenden Strom ausgeführten Versuche möglicher Weise zwischen den beiden Hälften zeigen könnte, durch Verschiebung nach rechts oder links auf ein Minimum reducieren konnte. Diese Stange wurde danach in ihrer mit Hilfe des Galvanometers bestimmten Lage endgiltig befestigt.

Um die beiden mit Asbestpapier umwickelten Enden des Eisendrahtes war ein haardünner Platindraht gewickelt, welcher ein Platinthermometer bildete, dessen Widerstand bei der Tem-

peratur der Umgebung nahezu 14 Ohm war. Das Wechseln ihres Widerstandes zeigte an der WHEATSTONE'schen Brücke die zufällige Temperaturdifferenz zwischen den beiden freien Enden des Eisendrahtes.

In den zwei benachbarten Aesten der WHEATSTONE'schen Brücke waren die beiden erwähnten Platinfäden eingeschaltet, den dritten Zweig bildete eine Spule mit einem Widerstande von Tausend Ohm, während der vierte Zweig von dem zum Einstellen nothwendigen Messkasten gebildet wurde.

Der Verlauf des Versuches war der folgende. Zuerst stellte ich mit Hilfe des Messkastens das Galvanometer auf den Nullpunkt ein, sodann begann ich die dicke Eisenstange zu erwärmen und beobachtete das Ausweichen des Galvanometers und die dazu nothwendige Zeit. Ich stellte dabei fest, dass nahezu eine halbe Stunde dazu nöthig war, bis der Regime-Zustand eintrat bei welchem das Galvanometer nach einer sehr langsamen Verschiebung den Skalentheil 2,5 anzeigte und über diesen hinaus sich nicht mehr bewegte. Dass diese Ausweichung so gering blieb, habe ich der so sorgfältig erprobten Lage der Kupferstange zu verdanken, welche im Stande war die Differenz zwischen dem rechten und linken Theile grösstentheils auszugleichen.

Nachdem ich den Apparat abkühlen liess, begann ich den Versuch von Neuem und zwar wieder ohne erregenden Strom, und mass genau, wieviel Zeit verging von der Zeit wo ich die BUNSEN'sche Lampe einstellte bis zu dem Augenblicke, in welchem das Galvanometer den Skalentheil 2, folglich den unmittelbar vor dem Rigime-Zustande gelegenen erreichte. Die Messung ergab 18 Minuten 15 Secunden. Hier muss ich bemerken, dass ich auch in dem Falle 18 Minuten zählte, als ich in beide Spulen gleichzeitig einen erregenden Strom sandte.

Der nächste Versuch fand mit einem erregenden Strom von 0,1 Ampère statt und zwar auf die Weise, dass nur die rechtsseitige Eisenstange magnetisiert wurde. Dabei nahm ich wahr, dass der Skalentheil 2 nach 22 Minuten erreicht wurde, also mehr als vierthalb Minuten mehr nöthig waren, um die gegebene Temperaturhöhe zu erreichen, als die Wärme sich mittels magnetisierten Eisens verbreiten musste.

Zu den Controlmessungen diente mir jenes Experiment, bei welchem ich den erregenden Strom von nur 0,1 Ampère Stärke, nicht in die rechts- sondern in die linksseitige Spule sandte. Der gefundene Werth war diesmal 15 einhalb Minuten, folglich eine bedeutend kürzere Zeitdauer als bei den ersten Versuchen, wo keine von den Spulen erregte, was bewiesen hat, dass in dem Falle, wenn keine von den Eisenstangen magnetisiert ist, die Dyssymmetrie zwischen den rechts- und linksseitigen Theilen, welche es nicht gelang vollständig zu eliminieren, von solcher Natur war, dass in Folge davon der rechtsseitige Theil die Wärme besser leitete als der linksseitige.

4. Was die Theorie der oben beschriebenen Erscheinungen anbelangt, kann ich meine diesbezüglichen Schlüsse in dem folgenden zusammenfassen.

Es ist eine bekannte Erscheinung, dass das weiche Eisen, durch das Magnetisiertwerden seine Dimensionen ändert. JOULE bewies schon im Jahre 1847* durch Experimente, dass eine Eisenstange in der Richtung der Magnetlinien eine elastische Verlängerung erleidet und zwar stand diese Ausdehnung so weit sich seine Versuche erstreckten, im Verhältnisse mit dem Quadrate der magnetisierenden Kraft. Ausserdem stellten HELMHOLTZ** einerseits und KIRCHHOFF*** anderseits auch theoretisch fest, dass eine weiche Eisenkugel in gleichmässigem magnetischen Raume in der Richtung der Kraftlinien eine Ausdehnung erleidet und in den dazu normalen Richtungen sich zusammenzieht; und zwar ist nach KIRCHHOFF die maximale Längenveränderung, welche der Radius R einer weichen Eisenkugel in der Richtung der Kraftlinien erleidet von der Grösse

$$\frac{153}{176}\frac{H^2}{2\pi E}R,$$

wo H die magnetisierende Kraft bedeutet, welche von der Kugel weit entfernt, das heisst an einer solchen Stelle zu messen ist, wo die störende Einwirkung der Kugel auf den magnetischen Raum,

* Philosophical Magazine and Journal of Science. p. 30, 76 und 225.
** Wiedemann. Annalen. XIII. p. 385.
*** Wied. Ann. XXIV. p. 52 und XXV. p. 601.

in welchem sie versetzt wurde, schon verschwindend klein ist, ferner bedeutet E die Elastizitätsconstante, deren Werth bei weichem Eisen $1{,}8 \cdot 10^{12}$ c. g. s. ist.

Dieser, sich nur auf schwaches Magnetisieren beschränkende specielle Fall, abgesehen von den ständigen, steht im Einklange mit MAXWELL's* allgemein geltenden Rechnungen, nach welchen neben der magnetisierenden Kraft H und der magnetischen Induction B, die auf der Eisenkugel in Folge des Kraftraumes sich zeigende Wirkung genau so ist, wie wenn ein gleichmässig vertheilter hydrostatischer Druck von $\frac{H^2}{8\pi}$ Grösse, combiniert mit der Grösse $\frac{BH}{4\pi}$ in die Richtung der Kraftlinien fallen und durch Zugspannung auf die Kugel wirken würde.

Wenn also Px, Py, Pz die Componenten der resultierenden Wirkung sind und wenn die Richtung des magnetischen Raumes nach unserer Voraussetzung in die Richtung der Achse x fällt, dann ist nach MAXWELL's Berechnung:

$$\left.\begin{aligned} Px &= \frac{B \cdot H}{4\pi} - \frac{H^2}{8\pi} \\ Py &= Pz = -\frac{H^2}{8\pi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese MAXWELL'sche Formel können wir auch auf die kreisförmige Platte und folglich auch auf die im 2. Punkte versuchsweise geprüfte Eisenscheibe anwenden. Der Ausdruck Px und Py bleibt in diesem Falle unverändert, Pz aber wird $= 0$, wie dies durch das Verfolgen des Ganges der citierten MAXWELL'schen Rechnungen bewiesen werden kann.

Auf ähnliche Weise kann der Ausdruck Px auf dünne stangenähnliche Magnete angewendet werden, vorausgesetzt dass $Py = Pz = 0$ ist. Dies entspricht dem Falle der im 3. Punkte geprüften Eisenfäden.

Wir können also diese MAXWELL'sche Formel dazu benützen, um die Theorie der von uns geprüften Erscheinungen zu entwickeln, und zwar auf die Weise, dass wir sie mit den Grundsätzen der Wärmetheorie in Verbindung bringen. In unserem Falle

* Maxwell. Electricity and Magnetismus. § 642.

können wir einen geschlossenen Kreisprozess ins Auge fassen, wir können daher den ersten Satz mit Recht anwenden, aber gleichzeitig können wir auch einen verkehrten Kreisprozess, und so auch den zweiten Satz der Wärmetheorie anwenden.

5. Erwägen wir zuerst den Fall der magnetisierten Weicheisenkugel. Es sei x die Länge der Stange, H die magnetisierende Kraft und B die entsprechende magnetische Induction von H. Wenn μ die Permeabilität bei dem gegebenen ϑ Wärmegrad der Stange und des in Rede stehenden Werthes von H ist, dann ist nach der Definition μ bekannt:

$$B = \mu H. \quad \cdots \quad (2)$$

Theilen wir nun die Wärmemenge dQ dieser magnetisierten Stange mit, so werden in Folge dessen zweierlei Veränderungen eintreten, es wird nämlich die Länge der Stange durch die Quantität dx verändert und ihr Wärmegrad wird durch den Werth d ebenfalls gehoben.

Wenn bei der constanten Länge der Stange c die specifische Wärme des Eisens ist und q jene Wärmemenge, welche man bei einer gleichmässigen Temperatur der magnetisierten Stange mittheilen müsste, damit diese die Längenveränderung von der Einheit erleidet, dann verbindet die beiden notierten Veränderungen die folgende Relation:

$$dQ = c \cdot d\vartheta + q \cdot dx. \quad \cdots \quad (3)$$

Währenddem indessen die magnetisierte Stange die Längenveränderung dx erleidet, wird im Gegensatze, in der in ihre Richtung fallenden Kraft Px

$$d\mathfrak{L} = Px \cdot dx$$

oder aber in Folge von (1) und (2)

$$d\mathfrak{L} = \left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 \cdot dx. \quad \cdots \quad (4)$$

die äussere Arbeit vollbracht werden.

Wenden wir nun auf unseren Fall nacheinander den ersten und zweiten Satz der Wärmetheorie, mit Rücksichtnahme auf die Ausdrücke (3) und (4) an.

Wenn A das Arbeits-Aequivalent der Wärme und dU die der Zustandsänderung entsprechende innere Arbeit ist, dann ver-

langt der Grundsatz der Erhaltung der Energie, dass die rechte Seite der Gleichung

$$dU = d\mathfrak{L} - A \cdot dQ \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

ein vollständiges Differential sei. Diese rechte Seite wird mit Hilfe von (3) und (4) auf die folgende Weise geschrieben:

$$-A \cdot c \cdot d\vartheta + \left[\left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 - A \cdot q\right] \cdot dx$$

und dafür, dass dieser Ausdruck ein vollkommenes Differential sei ist, die nothwendige und genügende Bedingung die folgende:

$$\frac{\partial}{\partial x}(-A \cdot c) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left[\left(\frac{\mu}{4\pi} - \frac{1}{8\pi}\right) H^2 - A \cdot q\right].$$

Wenn wir bedenken, dass μ die vom Wärmegrad abhängige Menge ist, während wir im Gegensatze dazu durch kein einziges bis jetzt versuchtes Experiment berechtigt sind zu schliessen, dass der Werth von H, welcher sich auf die Luft, oder aber genauer gesagt auf den Aether bezieht, ebenfalls von der Temperatur abhängt, dann gewinnen wir aus den oben erwähnten den folgenden ersten Zusammenhang:

$$A\left(\frac{\partial q}{\partial \vartheta} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{H^2}{4\pi}\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Einen zweiten Zusammenhang zeigt uns der CARNOT'sche Satz, in dessen Sinne die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{dQ}{\vartheta} = \frac{c}{\vartheta}\, d\vartheta + \frac{q}{\vartheta}\, dx \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

ebenfalls ein vollständiges Differential ist, wozu wieder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\vartheta}\right) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{q}{\vartheta}\right)$$

nothwendig ist oder aber nach Ordnung die Bedingung

$$\frac{q}{\vartheta} = \frac{\partial q}{\partial \vartheta} - \frac{\partial c}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

erfüllt ist.

Durch das Vergleichen von (6) und (8) gelangen wir endlich zu dem gesuchten Zusammenhang

$$q = \frac{H^2 \cdot \vartheta}{4\pi A} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \vartheta}, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

welcher die Lösung unseres Problemes enthält.

q ist nämlich das Maass desjenigen Theiles der mitgetheilten Wärme, welche in Folge des magnetischen Zustandes nicht auf die Veränderung der Temperatur verwendet wird, sondern sich in latente Wärme umwandelt. Wie bekannt, wächst, wenn auch nur sehr langsam, zwischen 0° und 600° C fortwährend und zwar in den bezeichneten Grenzen annäherungsweise

$$\frac{\partial \mu}{\partial \vartheta} = 0{,}0002$$

ihrer positiven Quantität entsprechend, demzufolge ist q in denselben Grenzen von positivem Werthe und so wird der der Wärme durch positive Quantität gegebene Theil davon entzogen, damit er in der magnetisierten Eisenstange eine Temperaturerhöhung hervorbringe.

Wenn wir, im Gegentheile zu dem wie wir es gethan, die Q-Wärmequantität der Eisenstange mitgetheilt hätten und dann erst die letztere magnetisiert hätten, dann würde Q zur beständigen Quantität während der Dauer des magnetischen Zustandes, es würde $dQ = 0$ und so erweist sich nach (3)

$$d\vartheta = \frac{-q}{c}\, dx. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Nachdem aber beim Eisen, wie wir dies im 4. Punkte hervorgehoben haben, in Folge des Elektrisierens in den bezeichneten Grenzen eine Ausdehnung in der Richtung der Kraftlinien zu Stande kommt und so dx von positivem Werthe ist, andererseits aber Q, wie wir dies eben früher festsetzten, auch eine positive Quantität ist, c aber schon durch seine Definition ebenfalls, desshalb ist $d\vartheta$ (10) von negativem Werthe, und so würde die Stange in Folge des nachträglichen Magnetisierens eine Verringerung der Temperatur erleiden.

Indem wir das Gesagte zusammenfassen, kommen wir zu dem Schlusse, dass eine magnetisierte Eisenstange bei dem sich einstellenden Endzustande (Regime) über eine geringere Temperatur verfügt, als wenn sie nicht magnetisiert wäre. Nachdem aber andererseits das Mittheilen der Wärme zwischen dem Eisen und seiner kälteren Umgebung im proportionalen Verhältnisse zu dem Temperaturunterschiede steht, so geschieht in Folge dessen das

Ausbreiten der Wärme durch das magnetisierte Eisen in geringerem Maasse als durch nicht magnetisiertes Eisen; vorausgesetzt natürlich, dass sich das Ausbreiten in der Richtung der Kraftlinien vollzieht und das Eisen mit Bezug auf die Permeabilität die kritische Temperatur nicht erreicht hat.

6. Wenn wir das oben Erwähnte auf den Fall der Eisenscheiben anwenden wollen, so steht uns nichts im Wege, wir müssen uns nur vorstellen, dass sich die Eisenscheibe in der Richtung der Kraftlinien so verhält wie der magnetisierte Eisenfaden, im Gegensatze dazu ist sie in der verticalen Richtung der Anspruchnahme, einem gleichmässig vertheilten specifischen Drucke in der Höhe von

$$Py = -\frac{H^2}{8\pi}$$

unterworfen.

Indessen können wir uns leicht überzeugen, dass sich das Resultat unserer Berechnungen trotz dieser Inanspruchnahme durchaus nicht ändert, nachdem die Gleichung (6), das heisst die Einzige, auf welche die Componenten der äusseren Kraft einen Einfluss ausüben können, von Py unabhängig bleibt und so unverändert constant wird. So wird also der Einflufs von Py vollständig eliminiert.

Hieraus können wir schliessen, dass auch bei Eisenscheiben die Veränderung in der Ausbreitung der Wärme nur in der Richtung der magnetischen Kraftlinien auftritt, in den verticalen Richtungen oder aber auf den äquipotentialen Linien hat der Magnetismus dagegen keinen Einfluss. Die in dem zweiten Punkte erwähnten experimentellen Resultate stimmen mit diesen theoretischen Schlüssen überein und beweisen so die Richtigkeit unserer vorherigen Erörterungen.

Aehnliche Schlüsse können wir auch auf magnetisierte Eisenkugeln anwenden, nachdem die Giltigkeit der Gleichung (6) $Py = Pz$ von deren Werthe unabhängig auch mit Bezug auf diese besteht. Ich benutze diese Gelegenheit, um hier nebensächlich als überraschendes zufälliges Beispiel die Ausbreitung der inneren Wärme der Erde durch die zwar in geringem Maasse magnetisierte Erdkugel zu erwähnen. GAUSS bewies, dass der Erdmagnetismus nicht in den ausser ihr liegenden Körpern,

sondern in ihrem Inneren zu suchen ist. In dem Falle also, wenn die magnetische Permeabilität der Erde ein dem Eisen ähnliches Betragen aufweist, dann würde die innere Wärme der Erde in geringem Maasse sich mehr gegen den magnetischen Aequator ausbreiten als in der Richtung der Magnetpole der Erde und zwar trotz dem grossen Unterschiede der Temperaturen in der äusseren Athmosphäre, nachdem die letzteren, nach den zahlreichen Berechnungen von ARAGO, nicht tiefer als 20 m in die Erdrinde eindringen.

18.

„ANDORINA“ UND „DARÁNYIA“, ZWEI NEUE BRACHYUREN-GATTUNGEN AUS UNGARN.

(Mit einer Tafel.)

Von Dr. E. LÖRENTHEY.

Vorgelegt der Akademie durch das ord. Mitglied Prof. Dr. Anton Koch in der Sitzung vom 21. Mai 1900.

Am 7. Mai dieses Jahres feierte die ungarische Geologie ein erhabenes Fest, indem Ackerbauminister Herr Dr. IGNATZ DARÁNYI DE PUSZTA-SZENTGYÖRGY ET TETÉTLEN an diesem Tage das durch ihn zu Stande gekommene Palais der königlich ungarischen Geologischen Anstalt eröffnete, das erste in Mittel-Europa, welches ausschliesslich zu Zwecken der Geologischen Anstalt erbaut wurde; denn obzwar sich z. B. in Berlin ein besonderes Geologisches Museum befindet, so dient es doch nicht ausschliesslich den Zwecken der Geologischen Anstalt, sondern ist zugleich auch Bergakademie.

Für das neue Heim der Geologischen Anstalt sind nicht nur die Angestellten derselben, sondern auch all die Fachleute zu Dank verpflichtet, welche das Museum, die Bibliothek, die Räumlichkeiten der Anstalt auf welche Art immer in Anspruch nehmen. So möchte denn auch ich aus Freude und Liebe zur Geologie auf eine mir zu Gebote stehende Weise dem Herrn Minister Dr. IGNATZ VON DARÁNYI und dem Herrn Dr. ANDOR VON SEMSEY meine Dankbarkeit zum Ausdruck bringen, dass sie das Zustandekommen des glänzenden Palastes der geologischen Wissenschaften,

zu welchem die Haupt- und Residenzstadt Budapest den Grund, Herr Dr. ANDOR SEMSEY DE SEMSE hunderttausend Kronen und zur inneren Einrichtung des neuen Gebäudes abermals circa zwanzigtausend Kronen spendete, ermöglichten.

Zum Andenken an dies grosse Werk benenne ich eine neue Art *Darányia*, eine andere *Andorina*.

Andorina, nov. gen.

Während aus den jüngeren Tertiärbildungen auffallend wenig Krabbengattungen aus der Familie der Oxyrrhynchidae oder Maioideae bekannt sind, leben heute ihrer überaus zahlreiche Gattungen. Wir sind noch weit entfernt, die Verwandtschaft zwischen den fossilen und lebenden Formen auch nur annähernd ausweisen, noch weiter jedoch davon, den Versuch wagen zu können, die Descendenz der lebenden Formen von den fossilen festzustellen. Ich kenne weder eine fossile noch eine lebende Verwandte der zu beschreibenden aus dem Miocaen stammenden Form und somit ist dieselbe eine ausgezeichnete neue Gattung, welche ich zu Ehren des Herrn Dr. ANDOR SEMSEY DE SEMSE *Andorina* heisse, da der Name *Semseya* bereits zur Bezeichnung der Foraminifere *Semseya lamellata, Frnz.* als Gattungsname vergriffen ist. [Semseya, eine neue Gattung aus der Ordnung der Foraminiferen. Von Dr. AUGUST FRANZENAU. (Math. Naturw. Berichte aus Ungarn XII.)]. Bisher ist mir nur eine Art dieser Gattung bekannt, die *Andorina elegans nov. spec.* und diese auch nur in einem Exemplare.

Die Familie der Oxyrrhynchidae wurde in den ungarischen Miocaenbildungen bisher nur durch jene wenigen Gliedmaassentheile vertreten, die ich in Budapest-Rákos aufsammelte und unter Fragezeichen als zur *Lambrus*-Gattung [Lambrus? sp. ind.] gehörend* nach RISTORI bezeichnete, der aus den Miocaenbildungen des Monte Mario ähnliche Gliedmaassentheile zeichnet und eben-

* Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs. P. 91. Auf der Seite 119 befindlichen Tabelle ist diese Gattung irrthümlich unter den Oxystomidae angeführt, jedoch auf Seite 91 richtig unter die Oxyrrhynchidae gestellt.

falls unter Fragezeichen zur *Lambrus*gattung zählt.* Nachdem jedoch unter den in unseren Miocaenbildungen vorkommenden Krabben bisher nur die *Andorina* mit vollkommener Sicherheit in die Familie der *Oxyrrhynchidae* gehört und da innerhalb dieser Familie nicht nur die Gattung *Lambrus*, sondern auch die Arten der Gattungen *Chorilia*, *Hias* und *Pugettia* Gliedmaassen von ähnlicher Form und Verzierung haben, kann angenommen werden, dass die *Andorina* ähnliche Extremitäten hatte und somit die Gliedmassentheile von Budapest-Rákos nicht zu *Lambrus*, sondern wahrscheinlich zur *Andorina* als deren Scherenfüsse gehören. Dies ist um so wahrscheinlicher, da von Budapest-Rákos kein anderer Überrest von Krabben aus der Familie der *Oxyrrhynchidae*, als die erwähnten Gliedmaassentheile und vom anderen, nahen Fundorte nur der Cephalothorax der *Andorina* bekannt ist. Für diese Ansicht spricht ausser der Nähe der beiden Fundorte noch der Umstand, dass beide Funde aus derselben Schichte stammen.

Andorina elegans, nov. sp.

[Taf. I. Fig. 1*a*—1*e* u. Fig. 2.]

1900. *Andorina elegans, nov. sp.* Lörenthey. Andorina és Daránya két új ráknem Magyarországból. [Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. No. V. P. 833. Tab. III. Fig. 1*a*—1*e* és 2. ábra.]

Der kleine Cephalothorax ist kugelig. Sein grösster Breitendurchmesser befindet sich beiläufig auf dem rückwärtigen Drittel. Der Cephalothorax ist in der Breite stark convex, am meisten in der Mittellinie, in der Länge weniger. Der Vorderrand wird von drei Paar kurzen, breiten, convexen Lappen gebildet, worunter die zwei mittleren die schmalsten und längsten, während die breitesten die zwei rückwärtigen sind, welche die Augenhöhl zu verdecken scheinen und somit die grossen Augenhöhlen seitlic stehen. Diese Fortsätze oder Lappen werden durch Furchen vo einander getrennt; die ganze Stirnregion wieder ist von de übrigen Theilen des Cephalothorax durch eine starke Vertiefun abgesondert, welche besonders kräftig hinter den vier dornförmige

* Contributo alla fauna carcinologica del pliocen italiano. I crostacei fossili di Monte Mario [Atti, soc. Tosc. d. sc. nat. Vol. XI. Tav. I. Fig. 26—28.] Pisa. 1889.

Lappen (rostrum) ist, da hier die Oberfläche sehr stark eingedrückt erscheint, so dass diese Lappen nicht nur nach vorne, sondern auch nach oben gerichtet sind. Unter den einzelnen Regionen tritt allein nur die Cardiacalregion scharf hervor, schon viel schwächer begrenzt ist die Urogastralregion. Unter den Furchen der Oberfläche sind jene am stärksten, welche die Cardiacalregion umgeben, etwas schwächer sind jene, welche die Urogastralregion von der Branchialregion trennen. Die Epigastralregion wird von den zahnförmigen Fortsätzen des Stirnrandes durch die bereits erwähnte breite Furche abgesondert. Die scharf begrenzte Cardiacalregion ist rundlich, an die Glandula uropigii der Vögel erinnernd stark erhaben, bildet eine der am meisten hervortretenden Partien des Cephalothorax, welche besonders auf dem von der Mitte ein wenig vorwärts geschobenen Gipfel mit grossen runden Tuberkeln verziert ist. Die Gastralregion ist von den übrigen Regionen nicht getrennt, nur die hintere, angeschwollene und den höchsten Punkt der Oberfläche bildende, mit grossen Tuberkeln versehene Urogastralregion ist rückwärts von der Cardiacalregion durch eine starke Furche getrennt und durch schwache Furchen von der Branchialregion, während die übrigen Theile der Gastralregion eine, nach vorne fallende, beinahe flache Oberfläche bilden und an den Seiten von keinerlei Furchen begrenzt sind. Die Gastralregion ist vorne gegen die Stirnregion nur insofern abgegrenzt, dass sich die vorderen vier Lappen der letzteren plötzlich nach oben biegen, somit hier die Oberfläche brechen und eine breite Furche entstehen lassen, deren Fortsetzung jene schmale Furche bildet, welche die Gastral- und theilweise die Branchialregion von den zwei hinteren Lappen des Stirnrandes trennt. Auf der Branchialregion zeigen Erhöhungen, welche mit grösseren Tuberkeln geziert sind, die Epi- und Mesobranchialregion an, im übrigen sind jedoch die einzelnen Theile der Branchialregion nicht abgesondert. Auch die Gastralregion ist von der Epibranchialregion nicht getrennt, da jedoch letztere in einem ziemlich starken Höcker endigt, erscheint sie doch gegen die flache Gastralregion einigermaassen abgegrenzt. Die Oberfläche des Cephalothorax ist rauh, da sie mit runden Tuberkeln von verschiedener Grösse bedeckt ist (Fig. 1*c*). Diese Höcker sind auf höheren Stellen grösser.

Nur der Cephalothorax des Thieres ist bekannt, somit kann von den übrigen Theilen seines Körpers nicht gesprochen werden. Wenn die in Budapest-Rákos aufgesammelten Gliedmaassentheile, welche ich unter Fragezeichen als *Lamprus* bezeichnete, da sie unter den bis dahin bekannt gewesenen fossilen Gattungen am ehesten hier eingereiht werden konnten, der *Andorina* angehören, so kann gesagt werden, dass sie auffallend lange Extremitäten hatte, worunter wenigstens die Scherenfüsse mit, in spärlichen Reihen stehenden hakigen Dornen geziert waren.

Länge des Cephalothorax von der Spitze der mittleren Dornen gemessen 9 mm und die grösste Breite des Cephalothorax 8 mm.

Die *Andorina* weicht schon zufolge der Bildung ihres Stirnrandes von allen ihren fossilen und lebenden Verwandten ab. So weicht die Form des Rostrums und der Augenhöhle der lebenden Gattungen *Chorilia*, *Hyas*, *Scyra*, *Eurypodius*, *Oregonia* etc. von jener der *Andorina* in solchem Maasse ab, dass jeder Vergleich überflüssig wird, da jedermann auf den ersten Blick die gerechtfertigte Selbständigkeit der Gattung erkennt.

Fundort: Der hier beschriebene einzige, kleine Cephalothorax stammt aus dem Leithakalk, aus demselben alveolinenreichen lockeren Kalkstein, welcher auch in Rákos aufgeschlossen ist und welcher die meisten Formen der Rákoser reichen Decapodenfauna lieferte. Hier kommen in Gesellschaft von *Andorina elegans* die gut erhaltenen Schalen von *Alveolina melo F. u. M.*, *Alveolina Haueri d'Orb.*, *Pecten (Vola) Leythajanus Partsch*, *Pecten (Vola) aduncus Eichw.*, ausserdem als vorherrschende Formen die Steinkerne von *Panopaea Menardi Desh.* und *Cardium hians Brocc.* vor. Die oberen Mediterran- und Sarmatenschichten, welche in Budapest bis dahin nur in Rákos aufgeschlossen waren, wurden im Sommer des Jahres 1898 in der Gegend des Ludoviceums bei Legung des Wassersammelcanals aufgeschlossen. Diese kleine neue Krabbe sammelte bei Abgrabung des Wassersammelcanals der Telepigasse Universitäts-Assistent Herr Gustav Moesz, derzeit Oberrealschulprofessor zu Brassó und schenkte sie mir, wofür ich ihm auch an dieser Stelle Dank sage.

Darányia nov. gen.

Die heute reiche Familie der *Catometopidae* wurde im Alttertiär durch wenige Gattungen vertreten, wovon auch nur die Gattungen: *Goniocypoda M. Edw.*, *Galenopsis*, *M. Edw.*, *Palaeograpsus Bittn.* und *Coeloma*, *M. Edw.* in den älteren Tertiärbildungen unseres Vaterlandes vorkommen. In der Beschreibung der überaus reichen Fauna des Kis-Svábhegy bemerkte ich, dass mit den beschriebenen dreissig Arten die Fauna dieses Fundortes bei weitem noch nicht erschöpft sei, sondern noch mehrere unbestimmbare Exemplare vorhanden seien. So befindet sich unter Anderen eine, in ihrem Äussern und auch bezüglich der Entwicklung der Regionen an die Gattung *Palaeograpsus* erinnernde Form, deren hinterer Seitenrand mit vier, gegen die Ventralseite fortwährend wachsenden starken Dornen geziert ist und von welcher ich sage: „Diese mangelhafte Form macht ganz den Eindruck einer neuen Gattung.“ Seither gelang es mir, ein besser erhaltenes, jedoch noch immer mangelhaftes Exemplar aufzusammeln, worauf schon mehr Charaktere sichtbar sind. Das schönste Exemplar befindet sich im Museum der Geologischen Anstalt. Auf Grund dieses Exemplars wurde es klar, dass hier thatsächlich eine neue Gattung vorliege und dass der Seitenrand nicht in einen hinteren und vorderen zerfällt und dass derselbe in seiner ganzen Ausdehnung mit sieben gegen die Ventralseite stetig wachsenden Dornen geziert ist. Diese Form stimmt mit keiner einzigen fossilen oder lebenden überein. Der äusseren Form und Zähnelung der Seitenränder nach erinnert sie an die im Mittelländischen Meere lebende Art: *Euchirograpsus Lucasi M. Edw.*, steht jedoch durch die Entwicklung des Stirntheiles und durch scharfe Begrenzung der Regionen auf dem Cephalothorax von derselben weit entfernt. Vermöge der Entwicklung der Stirnregion erinnert meine Form wieder an die bei Australien lebende Art *Helice crassa*, *Dana*, weicht aber von derselben in allen andern Theilen ab.

Diese neue Gattung benenne ich *Darányia* zu Ehren eines der Schöpfer des neuen Palastes der Geologischen Anstalt, Sr. Excellenz dem kgl. ung. Ackerbauminister Herrn Dr. IGNÁTZ DARÁNYI DE PUSZTA-SZENTGYÖRGY ET TETÉTLEN.

Daránya granulata nov. sp.

[Taf. I, Fig. 3*a*—3*c*.]

1900. *Daránya granulata nov. sp.* Lörenthey. Andorina és Daránya két új ráknem Magyarországból. [Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. No. V. P. 836. Tab. III. Fig. 3*a*—3*d*.]

Der viereckige Cephalothorax wird gegen rückwärts allmählich schmäler und ist um weniges breiter als lang. Am breitesten ist er den vorderen Dornen der Seitenränder entlang, das ist am Frontalrande. Er ist in der Richtung so des Breiten- als Längedurchmessers schwach convex, am meisten auf jenem Halbkreise, welcher die Fortsetzung der ersten Dornen des Seitenrandes bildet. Von diesem Halbkreis, welcher durch die vordere Gastralregion geht, gegen rückwärts ist die Oberfläche des Cephalothorax schwach convex, während sie nach vorne plötzlich abfällt, so dass sich das Stirntheil schief vorwärts beugt und schwach concav ist. Der Saum des Stirnrandes besteht in der Mitte aus zwei breiten Loben, welche — insofern sie sichtbar — glatt und schwach gegen die Ventralseite gezogen sind. Der wenig convexe Saum der zwei Loben des Frontalrandes geht unvermerkt in einen concaven Bogen über, welcher sich bis zur Spitze der vorderen Dornen des Seitenrandes erstreckt. Somit ist der Vorderrand in Form eines S gebogen. Wahrscheinlich lagen in diesem schwach concaven Theil die langgestielten Augen. Die beiden Seitenränder sind gerade und mit sieben von rückwärts gegen vorne stets wachsenden, mit den Spitzen gegen die Ventralseite gerichteten Dornen geziert. Der Hinterrand, welcher gegen seine beiden Enden für die Extremitäten im Halbkreise stark ausgeschnitten ist, wird von einer schmalen glatten erhöhten Leiste begrenzt. Die ganze Oberfläche, ja selbst die umgeschlagene Partie der Branchialregion ist mit kleinen Tuberkeln besät, worauf sich auch der Name *granulata* bezieht. Die Regionen der Oberfläche sind von einander kaum geschieden, indem nur die viereckige Cardiacalregion von kaum wahrnehmbaren breiten Furchen begrenzt wird. Theilweise ist auch noch die Urogastralregion begrenzt, jedoch nur hinten, und diese Furchen sind auch schwächer als jene, welche die Cardiacalregion umgeben. Zwischen den von vorne gezählten zweiten und dritten dornförmigen Fortsätzen der Seitenränder

geht eine Furche aus, welche die vordere Branchialregion und den vorderen Theil der Urogastralregion durchzieht und gegen hinten durch eine schwach erhöhte Kante begrenzt ist. Mit derselben parallel geht auch vom vierten Dorn ein flacher, durch zwei schwache Furchen begrenzter Kiel aus, welcher jedoch nicht den ganzen Cephalothorax durchläuft, sondern von beiden Seiten ausgehend sich bis zu jener Kante erstreckt, welche die Cardiacal- und Urogastralregionen von einander scheidet und hier endigt.

Trotzdem, dass gut entwickelte Furchen fehlen und somit nichts vorhanden ist, was die Oberfläche des Cephalothorax in Regionen theilen würde, sind doch auf Grund von Vertiefungen und stellenweisen Anschwellungen der Oberfläche die Hauptregionen zu erkennen. Jene ziemlich tiefe Furche, welche den Frontalrand in zwei Theile theilt, thut dasselbe auch mit der Epigastralregion. Jeder dieser beiden Theile endigt gegen vorne in je zwei tuberkelförmig erhöhten Fortsätzen, worunter der in der Mittellinie liegende Epigastralfortsatz schon auf der concaven Frontalpartie liegt, das tuberkelförmig erhöhte Ende seines gegen die Hepaticalregion gekehrten Theiles jedoch auf der am meisten convexen Partie des Cephalothorax sich befindet. Die Gastralregion wird auch gegen die Hepaticalregion durch eine schwache Furche abgegrenzt. Die Cardiacalregion ist am besten begrenzt, nicht als wäre sie etwa von einer starken, tiefen Furche umgeben, sondern weil der neben der Cardiacalregion befindliche Theil der Branchialregion schwach angeschwollen und die Cardiacalregion vorne mit zwei kleinen Tuberkeln versehen ist. Die Furche der Branchiocardiacal-Region ist — obzwar breit — nicht genügend sichtbar. In dieser Furche befinden sich übrigens auch noch vier lochförmige Vertiefungen, den vier Spitzen der Cardiacalregion entsprechend. Die Partie zwischen der Cardiacalregion und dem Hinterrand ist schwach concav.

Maasse des Exemplars der Geologischen Anstalt:

Grösste Breite:	22 mm.
Länge:	18 „
Länge der Seitenränder: . .	15 „
Länge des Hinterrandes: . .	17 „.

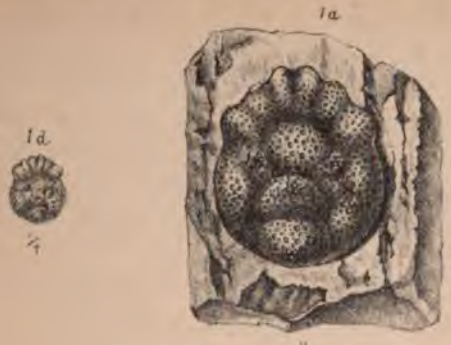
Fundort: Am Kis-Svábhegy bei Budapest fand ich schon vor Jahren in dem unter dem Orbitoidkalk liegenden, kleine Foraminiferen und Lithothamnien führenden Kalkstein zwei mangelhafte Cephalothoraxe, auf welchen die Charaktere nicht zu bestimmen waren; so viel sah ich jedoch, dass sie in keine bisher bekannte Gattung einzutheilen sind, jetzt aber, da ich in dem von der Geologischen Anstalt bekommenen reichen Material das hier abgebildete Exemplar fand, stellte sich die Selbständigkeit der Gattung heraus und somit ist die Zahl der aus dem Kis-Svábegyer Obereocenkalk bekannten Gattungen auf 19, die der Arten auf 34 gestiegen.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. *Andorina n. g. elegans nov. sp.* Aus dem losen Kalkstein der oberen Mediterranstufe des Wassersammelcanals der Telepigasse zu Budapest. 1*a*) von oben, 1*b*) von der Seite, 1*c*) von rückwärts gesehen. 1*d*) natürliche Grösse, 1*e*) vergrösserte Oberfläche. Nach den Zeichnungen des Geologen Herrn Aurél Liffa.

Fig. 2. *Andorina n. g.? elegans nov. sp.?* Gliedmaassen aus dem losen Kalkstein der oberen Mediterranstufe von Budapest-Rákos.

Fig. 3. *Darányia n. g. granulata nov. sp.* Aus dem gelblichen, lithothammienreichen, kleine Foraminiferen führenden Kalkstein des Kis-Svábhegy bei Budapest. 3*a*) von oben, 3*b*) von der Seite, 3*c*) von vorne gesehen und 3*d*) vergrösserte Oberfläche.



A. Swoboda n. d. Nat. gez. u. lith.

Lith. Anst. v. Alb. Berger Wien VIII.

Lörenthey. Andorina und Daránya.

SITZUNGSBERICHTE.

In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften lasen die nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten (anschliefsend an pp. 320—326 des XVI. Bandes dieser Berichte).

Sitzung den 16. Januar 1899.

1. Emerich Steindl c. M. (Antrittsvortrag): „Über das neue Parlamentsgebäude in Budapest."
2. Paul Plósz c. M.: „Fettbildung aus Kohlenhydraten."
3. Carl Laufenauer c. M.: „Die Histologie der Haematohydrose."
4. Carl Schaffer: Über die Structur des hinteren Bandes des Rückenmarkes." Vorgelegt durch das c. M. Carl Laufenauer.
5. Ludwig Hajós: „Zur Histologie der Epilepsie." Vorgelegt durch denselben.
6. Paul Ranschburg: „Zur Psychologie der hysterischen motorischen Lähmungen. Vorgelegt durch denselben.
7. Desider Korda: „Der Einfluss des Magnetismus auf die Wärmeleistungsfähigkeit des Eisens." Vorgelegt durch das o. M. Alois Schuller.

Sitzung den 13. Februar 1899.

1. Adolf Onodi c. M.: „Über das Centrum der menschlichen Tonbildung."
2. Rudolf v. Fabinyi c. M.: „Über die 'Ceraeidine' genannten neuen Färbstoffe."
3. Paul Plósz c. M.: „Fettbildung aus Kohlenhydraten." (2. Mittheilung.)
4. Rudolf v. Kövesligethy c. M.: Bericht über sein „Handbuch der astronomischen und mathematischen Geographie" betiteltes Werk.
5. Julius Sóránvi: Vorangehender Bericht über seine hydrographische Studienreise. Vorgelegt durch das c. M. Ludwig v. Lóczy.
6. Carl Zimányi: „Beiträge zur Kenntniss des Dognácskaer rosenfarbenen Aragonites." Vorgelegt durch das o. M. Joseph Krenner.

Sitzung den 13. März 1899.

1. Moritz Hoór: „Neue Methode zur Bestimmung der Rutschung der Inductionsmotoren mit wechselndem Strome." Vorgelegt durch das o. M.

Isidor Fröhlich. Rutschung des Inductionsmotors (englisch slip) ist das Verhältniss der Zahl der Polwechsel des Generators pro Minute zu jener Zahl, welcher die Umdrehungszahl des inducierten Systemes entspricht. Dieses Verhältniss kann man durch $\frac{p_1}{p_2}$ bezeichnen. Die zur Bestimmung dieser Rutschung bisher angewendeten Methoden sind theilweise ihrer falschen Grundlage wegen unverlässlich, theilweise aber schwerfällig. Zu verlässlichen Daten können wir nur durch das Messen der Differenz $p_1 - p_2$ gelangen. Diese kann man mittelst zweier Methoden bestimmen, und zwar entweder durch stroboskopische Messung, oder durch Zählen des Stromstosses von Minute zu Minute. Vortragender machte mit beiden Methoden Versuche, von denen aber sich bloss die zweite als verlässlich erwies. Bei der Ausführung der Messung verursachte der Einfluss der Widerstände der Leitungen, der Verbindungen und des Strommessers Schwierigkeiten, jedoch half Vortragender diesem Übel damit ab, dass er die Stromstösse nicht direct durch die inducierten dazwischengeschalteten Strommesser, sondern durch Hilfe jener Inductionswirkung beobachtete, welche das durch den pulsierenden Strom gebildete Feld in einer vielläufigen und im Feld entsprechend angebrachten Rolle ausübt. An den Enden der Rolle brachte Vortragender ein Telephon an, durch dessen Hilfe er 400—500 Stromstösse zählte. Statt dem Telephon können auch andere Apparate, z. B. das Rollensystem des Weston'schen Voltmeters, der Spiegelelectrodynamometer, angewendet werden.

2. Jakob Hegyfoki: „Die Vertheilung des Niederschlages in den einzelnen Tageszeiten." Vorgelegt durch das o. M. August Heller.

3. Georg Csorba: „Zur Theorie der additiven Behandlung der ganzen Zahlen."

Sitzung den 17. April 1899.

1. Anton Genersich c. M. (Antrittsvortrag): „Über die Bauchfellcysten." Man kann im Allgemeinen zweierlei Bauchfellcysten unterscheiden, nämlich Cysten hinter dem Bauchfell und Cysten im Gekröse. Was aber den Inhalt und das Wesen der Bauchfellcysten betrifft, so stammen diese entweder von Parasyten oder von Erkrankungen her. Von den ersteren sind der Echinococcus und der Cysticercus nennenswerth. Der Echinococcus besteht aus einer faserigen Bindehauthülle und darinnen aus einer fremdartig chitinigen, vielblätterigen Cyste, die in unversehrtem Zustand reines Serum und kleinere Bläschen enthält. Er kann an irgendwelcher Stelle des Bauchfelles vorkommen und eine beträchtliche Grösse erreichen. Viel kleiner und von klinischem Standpunkt unbeträchtlicher ist der Cysticercus.

Die von Erkrankungen herrührenden Bauchfellcysten können in die folgenden Classen eingetheilt werden: 1. Ectodermalcysten, welche sich aus der Hornplatte entwickeln und Hautcysten sind (Dermoide, Teratomen,

Inclusio foetalis); 2. Entodermalcysten aus der Darmdrüsenplatte; 3. Mesodermalcysten, die aus den Lymphwegen stammen.

Von den Ectodermalcysten ist vor Allem die Inclusio foetalis zu nennen. Diese ist von der Litteratur bisher unrichtig behandelt worden, da man die bigerminalis inclusio foetalis abdominalis, also das eigentliche foetus in foetu von den complicierten Dermoidcysten nicht recht unterschied. Bei ersterem ist in der Cyste immer ein verkümmerter, überflüssiger Bestandtheil des Foetus enthalten, z. B. ein Knochen oder ein Organ. Von den Dermoiden oder Teratomen sind die am nennenswerthesten, welche vom Schwanzwirbel oder vom Kreuz ausgehen und, in die Höhlung des kleinen Beckens hineinwachsend, um den Mastdarm oder die Blase, im Weibe um die Scheide sich festsetzen. Der Ursprung der Teratomen kann nur durch Voraussetzung der Implantation erklärt werden.

Von den Entodermalcysten ist das Vorkommen von grösseren Urachuscysten beim Menschen bisher noch nicht erwiesen, doch kann aus gewissen Symptomen das Vorhandensein solcher mit einiger Wahrscheinlichkeit festgestellt werden. Die zur selben Classe gehörenden Darmcysten (Enterocysta oder Enterokystoma) stammen meistens von der ordnungswidrigen Entwickelung oder Rückentwickelung des Darms her, andere aus dem Wurmfortsatz, oder auch aus näher nicht zu bestimmenden Einschnürungen. Ausser den bisher erwähnten giebt es auch solche Entodermalcysten, deren Ursprung nicht erwiesen werden kann. Neueren Untersuchungen zufolge können solche Cysten durch die Verirrung einer Lungenablagerung in den Bauchraum entstehen.

2. Moritz Staub c. M. (Antrittsvortrag): „Das Cinnamomum Genus aus der urweltlichen Flora."

3. Wilhelm Hankó c. M. (Antrittsvortrag): „Über die Schwankung der Zusammensetzung der Mineralwässer." Die Zusammensetzung der Mineralwässer ändert sich desto weniger, eine je grössere Temperatur sie haben, da die wärmeren, also tiefer entspringenden Wässer den äusseren Wirkungen weniger ausgesetzt sind. Zur Beurtheilung der Veränderung der Zusammensetzung ungarischer Mineralwässer stehen nicht viel Daten zur Verfügung, da hiezu nur von den fremden Wirkungen abgeschlossene Quellen dienen können. Als interessante Beispiele führt Vortragender die Luher Margit-Quelle und die Trinkquelle des Ofener Kaiserbades an. Bei der Untersuchung der letzteren war eine grosse Schwankung des Carbonylsulfidgehaltes infolge des Luftdruckes zu constatieren.

4. Wilhelm Hankó c. M. und Johann Gáspár: „Die chemische Zusammensetzung des ungarischen Weizens." Die wichtigste Aufgabe dieser Abhandlung war, festzusetzen, ob die in der letzten Zeit verbreitete Ansicht, dass der Klebergehalt des ungarischen Weizens allmälig im Abnehmen ist, berechtigt ist. Die beiden Verfasser untersuchten 71 Weizengattungen, darunter 61 ungarische, und kamen zu dem Resultat, dass der Klebergehalt seit den letzten 30 Jahren nicht nur nicht abgenommen,

sondern sogar zugenommen hat, während der böhmische, rumänische und amerikanische Weizen zwar hie und da den Klebergehalt des ungarischen erreicht, doch ihn nie überschreitet.

5. Wilhelm Schulek c. M.: a) „Schutzgläser gegen das ultraviolette Licht, auf Grund von Studien über Lichtwirkung." — b) „Die Lichtabsorption durchsichtiger gelber Stoffe."
6. Gustav Rados c. M.: „Zur Theorie der algebraischen Resolventen."
7. Alexander Mocsáry c. M.: „Die Neuropteren Ungarns."
8. Ferdinand Filarszky: „Pflanzenmorphologie." Vorgelegt durch das c. M. Alexander Mágócsy-Dietz.
9. Johann Gáspár: „Beiträge zur Chemie des Klebers." Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Hankó. Nach den Untersuchungen Ritthausen's besteht der „Weizenkleber" aus vier selbständigen Proteïnkörpern, nämlich dem Gluten-Caseïn, Gluten-Fibrin, Gliadin und Mucedin. Vortragender versuchte den Weizenkleber auf dieselbe Weise zu zersetzen, und überzeugte sich, dass die durch Ritthausen gewonnenen vier Proteïnstoffe keine selbständigen Körper sind. Der Umstand, durch welchen Ritthausen's Irrthum erklärt werden kann, ist, dass das durch fermentische Wirkung sich entwickelnde Zersetzungsproduct des Proteïnstoffes hauptsächlich Ammoniak und die Verschiedenheit des Feuchtigkeitsgehaltes eine verschiedene Löslichkeit im Alkohol verursacht.

   Vortragender stellte ferner aus einer Lösung von entwässertem und entfettetem Kleber und Salzsäure salzsäurigen Kleber in der Form eines weissen Pulvers dar. Auf ganz ähnliche Weise gewann er fluorsäurigen Kleber. Indem er bei der Lösung des Klebers in den beiden erwähnten Halogensäuren Platinchlorid dazu gab, gewann er in beiden Fällen ein gelblichrothes Platinsalz. Nach zweistündigem Erhitzen gewann Vortragender aus dem in 24 percentiger Salzsäure gelösten Kleber eine schwärzliche Lösung und eine dunkelbraune Ausscheidung, welche nach der Filtrierung zurückblieb.

Sitzung den 15. Mai 1899.

1. Paul Stäckel: „Die Theorie der imaginären Zahlen in den nachgelassenen Schriften Johannes v. Bolyai's. Vorgelegt durch das o. M. Julius König.
2. Andreas Högyes o. M.: a) „Die Statistik des Budapester Pasteur-Institutes im Jahre 1898." — b) „Neuere Beiträge zur Frage des reflexen Zusammenhanges des Hör- und Sehorganes."
3. Wilhelm Schulek c. M.: „Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre."

Sitzung den 19. Juni 1899.

1. Johannes Gáspár: „Die chemische Untersuchung des Weizenklebers." Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Hankó.

Wilhelm Schulek c. M.: „Studien aus dem Kreise der Lichtwirkungslehre." (2. Mittheilung.) Vortragender befasste sich seit einer Reihe von Jahren mit der Frage, ob das Licht von seinem ultravioletten Gehalt befreit werden kann, bevor es in das Auge tritt. Es ist nämlich durch Widmark und Ogneff erwiesen worden, dass das ultraviolette Licht dem Auge sehr schädlich ist. Nach langen Untersuchungen fand er auch Stoffe, die zur Lösung dieser Anfgabe geeignet sind, und unter denen das Triphenylmethan in Xylol am besten entspricht. Mineralstoffe können nicht verwendet werden.

Eine andere Frage war die Absorption durchsichtiger gelber Stoffe. Diesbezüglich untersuchte Vortragender 24 solche Stoffe mit dem Spectroscop und fand, dass von dem violetten Ende des Spectrums ein Stück gänzlich fehlte, während der übrige Theil des Spectrums bis zum rothen Ende sehr geschwächt war.

Die wichtigste Frage war aber, welche Augengläser schützen das Auge am besten gegen die ultravioletten Strahlen. Diese Frage ist um so wichtiger, als Vortragender erfuhr, dass der Altersstaar in den meisten Fällen vom ultravioletten Licht herrührt. Die allgemein benützten gelben und rauchfarbigen oder rothe und blaue Augengläser entsprechen daher nicht. Gut zu verwenden sind die durch Vortragenden verfertigten Kammerbrillen, die aus doppelten Linsen, dazwischen mit einer 2,5 mm dicken Schichte von Triphenylmethan in Xylol aufgelöst bestehen.

Emil Grósz: „Die von der Wirbelsäulenschwindsucht herrührende Blindheit." Vorgelegt durch das c. M. Wilhelm Schulek. Vortragender befasste sich vier Jahre lang mit dieser Frage und untersuchte während dieser Zeit die Augen von 200 an der genannten Krankheit leidenden Personen. Die Erkrankung beginnt mit dem Grauwerden des Sehnervkopfes, ist progressiver Natur und führt früher oder später zur totalen Erblindung. Der Hauptsitz der Krankheit muss an den zur Peripherie näher gelegenen Theilen gesucht werden, da immer diese Theile am meisten zerstört werden. Wenn wir als Ausgangspunkt der Krankheit die Ganglionzellenschichte annehmen, so können wir erklären, warum die Schwindsucht gegen das Gehirn zu abnimmt und bei den Hirnganglien, am Ende des Neuron, aufhört. Die Schwindsucht des Sehnerves kann nur als eine coordinierte Erscheinung der Entartung des Rückenmarkes aufgefasst werden, und wird wahrscheinlich durch Blutgefässe vermittelt.

Ludwig Schlesinger: „Das Gauss'sche Pentagramma mirificum." Vorgelegt durch das o. M. Julius König.

Eugen Klupáthy: „Kathodstrahlen in nicht homogenem und magnetischem Rotationsraum." Vorgelegt durch das o. M. Isidor Fröhlich. Wenn wir ein Kathodstrahlenbündel in einen magnetischen Rotationsraum versetzen und den Raum in der Richtung der Strahlen verschieben, so zeigt die Bewegung des Endpunktes der Strahlen verschiedene Übergänge, je nachdem die Axe des Raumes und die Strahlen parallel oder senkrecht sind. Dieses

auffallende Verhalten der Kathodenstrahlen konnte der Verfasser mit der von Sir William Thomson herrührenden Emissionstheorie anfangs nicht in Einklang bringen, sah aber später darin nur die Bekräftigung der Theorie. Wenn nämlich die Axe des Raumes mit dem Strahlenbündel parallel ist, rührt die bei einer gewissen Drehungsgeschwindigkeit eintretende, scheinbar entgegengesetzte Drehung von der stroboskopischen Wirkung her und hängt mit der intermittierenden Eigenschaft der Kathodenstrahlen zusammen. Ist der Raum zum Strahlenbündel senkrecht, so beschreibt der Endpunkt des Strahlenbündels, wenn wir den Raum zu sich selbst parallel verschieben, einen Kreis und geht dann, sich in entgegengesetzter Richtung bewegend, in eine Ellipse und bald darauf in einen Kreis über. Interessant sind auch die Versuche mit einem magnetischen Hufeisen.

6. Tiburtius Györy: „Morbus Hungaricus." Vorgelegt durch das c. M. Carl v. Kétly.

7. Arthur Hasenfeld: „Auf welche Art wird die Funktion des an überwuchernden Klappenfehler leidenden Herzen durch die fette (phosphorige) Entartung der Muskulatur beeinflufst." Vorgelegt durch das c. M. Árpád v. Bókay.

8. Franz Tangl: „Ein Beitrag zur Kenntniss des Energiegehaltes der menschlichen Nierenausscheidung." Vorgelegt durch denselben. — Die Resultate der Untersuchungen können im Folgenden zusammengefafst werden: Die Quotienten des Urins $\frac{Cal}{N}$ und $\frac{C}{N}$, sind dann viel gröfser, wenn die Kohlenhydrate überwiegend sind, als dann, wenn der grösste Theil der Nahrung aus Fett besteht. Die Qualität der Nahrung beeinflusst also den Werth dieser Quotienten. Neben den erwähnten Bedingungen geht die Veränderung der beiden Quotienten immer in derselben Richtung vor sich. Bei Muskelarbeit ändert sich keiner der Quotienten.

Sitzung den 16. Oktober 1899.

1. August Heller o. M. legt seinen Bericht vor über die am 11.—13. Oktober 1898 in London gehaltene internationale Conferenz für einen mathematischen naturwiss. Katalog.

2. Eugen v. Daday c. M.: „Freilebende Nematoden aus Neu-Guinea."

3. Rudolf v. Kövesligethy c. M.: „Von der Axendrehung der Fixsterne."

4. Emerich Szarvasy: „Die Darstellung der Induline auf electrolytischem Weg." Vorgelegt durch das c. M. Ludwig v. Ilosvay. Der Verfasser der vorliegenden Arbeit elektrolysierte salzsäueriges Anilin und dann eine Mischung von salzsaurem Anilin und Anilin. Bei der Elektrolyse brachte das sich ausscheidende Chlor Azoverbindungen zu Stande, welche dann mit der Mischung von salzsaurem Anilin und Anilin so reagierten, dass sich zuerst Azophenin, dann aber Indulinfarben bildeten.

Sitzung den 20. November 1899.

1. Ludwig Thanhoffer o. M.: a) „Die Lage des Herzens im Körper." — b) Ein neues Hilfsmittel zur Untersuchung des Zusammenhaltens der Zellen."
2. Adolf Onodi c. M.: a) „Zur Kenntnis der Nebenhöhlen der Nase." — b) „Die Chorea laryngis."
3. Eugen Daday c. M.: „Entomostraceen und Hydrachniden aus Neu-Guinea."
4. Wilhelm Schulek c. M. legt den I. Band seines „Ungarische Beiträge zur Augenheilkunde" betitelten Werkes vor.

Sitzung den 18. Dezember 1899.

1. Anton Abt: „Über die thermo-elektromotorische Kraft der Metalloxide und Metallsulphide." Vorgelegt durch das o. M. Isidor Fröhlich.
2. Aladár Richter: „Zur Physiologie der Luftwurzeln." Vorgelegt durch das o. M. Julius Klein.
3. Victor Szépligeti: „Braceniden aus Neu-Guinea." Vorgelegt durch das c. M. Alexander Mocsáry.

EROEFFNUNGSREDE DES PRAESIDENTEN ROLAND BARON EÖTVÖS.

(Gehalten in der Festsitzung vom 7. Mai 1899.)

Die Institution der Akademien hat, wie jedes Institut, welches Auszeichnungen verleiht, auch seine Gegner.

„Es ist eine Institution, behaupten diese, welche den Anforderungen der Gegenwart nicht mehr entspricht, und deshalb auch nicht in unsere Zeit passt.“ Solche Aeusserungen hören wir sehr oft, nicht nur von der Menge, welche den Werth der wissenschaftlichen Thätigkeit danach bemisst, in welchem Maasse es ihr materiellen Wohlstand oder wenigstens geistigen Genuss verschafft, sondern auch von ernsten Gelehrten, die im Bewusstsein ihrer eigenen Kraft nicht auf andere anstehen, sich darum auch nicht um andere kümmern und ihre verschlossenen wissenschaftlichen Kreise in selbstsüchtiger Eifersucht behüten.

Der Geist der Verneinung, welcher alles bestehende zu vernichten bestrebt ist, wendet seine Waffen auch schon gegen die Akademien, und offenbart sich bei uns, so wie in ganz Europa weniger in offenen Angriffen als in der viel gefährlicheren Form von verkleinernden Urtheilen und tadelnden Bemerkungen.

Ist dieser offene oder verborgene Angriff berechtigt? Haben die Akademien noch ein Bestandrecht? Diese Fragen will ich mit einigen Worten beleuchten.

Wenn wir die Stimme der Pietät zum Schweigen bringen, welche viele von uns auch heute an die Erhaltung der Schöpfungen unserer Vorfahren mahnt, und, die Sache vom Standpunkte der nüchternen Vernunft betrachtet einer Institution nur in dem Maasse ein Bestandrecht zuschreiben, in welchem es den Anforderungen der Gegenwart entspricht, können wir in voller Objectivität die Frage so aufstellen: Ist, bei der heutigen Entwickelung der Wissenschaften und bei den heute zur Fortbildung der Wissenschaften zu Gebot stehenden Institution noch eine solche Unterstützung und Vereinigung der wissenschaftlichen Thätigkeit der Einzelnen, wie sie die Institution der Akademien anstrebt, durchaus noch nöthig.

Wenn ich die Frage erschöpfen wollte, müsste ich eine ganze Geschichte schreiben, um zu entwickeln, was die Akademien in der Kulturgeschichte

der Menschheit waren und zu was sie geworden sind. Ich will mich aber bemühen, die Sache kurz darzulegen.

Ich will nicht lange im anmuthigen Garten des alten Athen verweilen, in dessen schattigen Hainen zwischen den Meisterwerken der Bildhauerkunst ein Plato mit seinen Jüngern wandelte, und welcher den Namen „Akademie" den vielen hunderten von Institutionen der folgenden Jahrhunderte, welche die Gelehrten, Künstler, Liebhaber der Kunst und Wissenschaft zu einem gemeinsamen Wirken oder geistigen Genusse vereinigten, als Erbtheil liess. Ich werde auch nicht erörtern, ob der Name Akademie in dem heutigen Sinne des Wortes, allen diesen von einander sehr verschiedenen Institutionen, welche im Alterthum und Mittelalter der Wanderung der Kultur folgend in immer neuen Mittelpunkten der Kultur sich entwickelten, und diesen Namen führten, gebührt.

Von viel grösserer Bedeutung, als diese alten Zeiten mit ihren vergangenen Schöpfungen, ist für unsere Frage die Mitte des XVII. Jahrhunderts, wo der Geist der Vereinigung Institute schuf, deren Einfluss auf die Entwickelung der Wissenschaft ununterbrochen bis in unsere Tage reicht.

In dieser grossen Zeit, welcher ein Galilei voranging, und ein Newton folgte, damals, als der wissbegierige Mensch befreit von der Herrschaft der alten Autoritäten sich mit seinen Fragen an die Natur selbst wandte, von der er so viel zu fragen hatte, damals gelangte die Vereinigung der ein gemeinsames Wirken unternehmenden Kräfte zu neuer Bedeutung.

In einem kurzen Jahrzehnte entstanden nach einander die Accademia del Cimento in Florenz, die Royal Society in London und die Pariser Akademie.

Die Accademia del Cimento, welche unter fürstlicher Gunst schnell aufblühte und nach deren Entziehung nach zehnjährigem Bestande sich auflöste, zeigte ein so ideales Beispiel der auf ein gemeinsames Ziel gerichteten gemeinsamen Wirksamkeit, wie wir es in der Geschichte der menschlichen Bestrebungen nur selten und in der Geschichte der Wissenschaften überhaupt nicht finden. Ihre Mitglieder haben sich, ihre eigene Individualität ausser Acht lassend, zu einem einzigen wissenschaftlichen Individium vereinigt, und das Ergebniss ihrer Wirksamkeit steht heute so vor uns, wie die Schöpfung eines einzigen gewaltigen Geistes. Jener werthvolle Band, welcher diese Ergebnisse in sich schliesst, ist im Jahre 1607 erschienen und nennt als Autoren nur die Akademie, verschweigend die Namen derer, die dazu beigetragen haben, so dass heute der Geschichtsschreiber der Wissenschaft kaum mehr zu bestimmen weiss, wer daran betheiligt ist. Betrachten wir die wissenschaftlichen Aufgaben, welche diese Gesellschaft sich vorlegte, so ist bemerkenswerth, dass sich die meisten auf die Messung der Temperatur, des Druckes, und der Dichtigkeit, dass heisst auf solche Fragen beziehen, deren Lösung die plangemässe Vereinigung der Thätigkeit der Gelehrten bis in unsere Tage immer von neuem nothwendig machte.

Neben der Geschichte der kurzlebigen Accademia del Cimento, spricht auch der Entwickelungsgang der Royal Society und der Pariser Akademie,

besonders in den ersten Jahren ihres Bestehens, von der Kraft des Vereinigungsgeistes.

Diese verlangten zwar von ihren Mitgliedern keine solche Aufopferung ihrer Individualität, lieferten aber durch die Grossartigkeit ihrer Resultate einen noch glänzenderen Beweis der Nützlichkeit des vereinten Wirkens. Ihr Wirken, an welchem Huyghens, Newton, Leibniz als Führer theilnahmen, bezog sich hauptsächlich auf die Fragen der Physik der Erde. Die Form und die Dimensionen unserer Erde, die Schwerkraft, das Phänomen der Ebbe und Fluth gaben vielen scharfen Denkern, vielen geschickten Beobachtern gemeinsam zu schaffen.

Diese Thätigkeit erreichte ihren Höhepunkt und der Geist der wissenschaftlichen Vereinigung feierte einen Triumphtag, als die Pariser Akademie beschloss, dass sie, um die streitigen Fragen über die Form der Erde aufzuklären, ihre Gelehrten, eines Theils nach Lappland, anderes Theils nach Peru sende, um die Länge eines Meridiangrades zu messen, und dass dieser Beschluss zur That wurde. Maupertuis, Clairaut, Camus und Lemonnier dem Froste des Nordens, Godin, Bouguer und Lacondamine aber der brennenden Hitze des Südens trotzend, gingen auf diese Argonautenfahrt, um die Wahrheit vom Aequator bis zu den Polen zu suchen.

Ich würde gegen die Triumphe meines eigenen Wissenschaftsfaches befangen erscheinen, wenn ich unter den glänzenden Beispielen der vereinigten wissenschaftlichen Thätigkeit, die gerade in der Zeitfolge erste, jene planmässige Thätigkeit der Mitglieder der Accademia della Crusca nicht erwähnte, durch welche sie ihre Sprache reinigen wollten, oder, wie ihr Wappen und Titel andeuten, die Kleie aus deren Mehl ausscheiden wollten und als Ergebnisss ihrer sorgfältigen und beständigen Arbeit ihr vom Standpunkte des litterarischen Geschmackes und der Sprachwissenschaft gleich wichtiges Wörterbuch herausgaben.

Wer aber richtig beobachten will, muss die Dinge von mehreren Seiten, von der Licht- und Schattenseite betrachten. Wer aus dem bisher gesagten übereilt folgern wollte, dass die Wissenschaft nur, oder grösstenteils nur durch Vereinigung der Kräfte fortschreiten kann, und dass die Akademien keine andere Aufgabe haben, als diese Vereinigung zu vermitteln, würde sehr fehlen. Denn obgleich es sicher ist, dass die Vereinigung in der wissenschaftlichen Arbeit, so wie in jeder menschlichen Thätigkeit einen nicht nur moralischen, sondern auch praktischen Nutzen hat, besonders dann, wenn sie im Interesse einer Unternehmung zu Stande kommt, welche die Kräfte des Einzelnen überschreitet, so kann die Vereinigung für sich kein Ziel sein, sie kann sogar schädlich sein, sobald sie die freie Entwickelung des Individuums verhindert.

Das alte Märchen spricht von einem Vater, der auf seinem Sterbebette seine Söhne versammelte und ihnen einen Pfeil in die Hand gab, sie sollen ihn zerbrechen, und nachdem sie dies mit Leichtigkeit vollendeten, ihnen seinen mit Pfeilen gefüllten Köcher reichte, an dem die Knaben ihre Kraft

fruchtlos erprobten. Der Vater, der dadurch seine Söhne an das Zusammenhalten mahnen wollte, hatte darin auch recht; hundert Pfeile widerstehen jener Kraft, welche im Stande ist jeden einzeln zu zerbrechen, aber um seine Warnung zu vervollständigen, hätte er noch dazusetzen können, dass der Pfeil nicht bestimmt ist, um sich im Köcher zwischen den Anderen kräftig zu fühlen, sondern, dass er ausgeschossen durch seine lebendige Kraft frei jenem Ziele zufliegt, für das er bestimmt ist.

Dieser freie Flug, diese Ausscheidung des Individuums von seinen Gefährten, in der jeder einzelne durch seine eigene Kraft sein Ziel erreichen kann, giebt auch dem Gelehrten die Fähigkeit seine Bestimmung zu erreichen.

Die Akademien hätten der Wissenschaft nicht gedient, wenn sie durch Uebertreibung der Gemeinsamkeit des Wirkens die Entfaltung der wissenschaftlichen Individualität verhindert hätten. Sie haben es nicht gethan, sie haben sogar durch ihre Preisfragen Verhandlungen und durch bei der Wahl ihrer Mitglieder ausgesprochene Urtheile, den Wettbewerb auch auf das Gebiet des geistigen Kampfes übertragen.

In jenem Zeitalter, auf welches ich hingewiesen habe, im XVII. Jahrhundert, waren die Akademien so zu sagen die einzigen Institute, welche die Unterstützung des wissenschaftlichen Fortschrittes für ihre Pflicht hielten.

Sie blieben aber nicht lange allein. Im Verlaufe der Zeit fing der alte Stamm, welchen die Menschheit noch in den Urzeiten pflanzte, damit er den Wissenschaften Blüthen und Früchte bringe, neue Aeste zu treiben.

Ich meine die Schule, im höheren Sinne des Wortes, oder wie wir sie heute nennen, die Universität, welche viele Jahrhunderte hindurch ihre hohe Bestimmung verfehlte und statt die Wissenschaften selbst zu pflegen, sich mit der minderen Rolle des Commentators der Wissenschaft begnügte, welche aber im vorigen und noch mehr in unserem Jahrhundert unter den wissenschaftlichen Gesellschaften den ihr gebührenden besonderen Platz wieder einnahm.

Heute folgt die Universität jenem Grundsatze, dass die Wissenschaft Anderen mittheilen nur derjenige kann, der selbst im Stande ist sie zu fördern, und zieht beinahe alle Gelehrten in ihren Wirkungskreis, versieht sie mit allen Mitteln, indem sie ihnen nur jenen Auftrag giebt, dass sie lehren nach ihrer eigenen Ueberzeugung, verschafft ihnen alles, dass sie ihre Individualität in den wissenschaftlichen Forschungen frei entwickeln und sich aus ihren Schülern Nachfolger bilden können. Können wir uns wundern, dass heute in der freien Atmosphäre der Universität das wissenschaftliche Leben am schönsten blüht?

Wenn wir betrachten und uns darüber freuen, welchen Aufschwung die Universitäten neben jenem Werke, welches sie durch den Unterricht im Interesse der Kultur vollbringen, besonders seit dem Anfange unseres Jahrhunderts dem Fortschritte der Wissenschaft gegeben haben, entsteht leicht die Frage: ob neben ihnen auch noch heute die Akademien nötig sind?

Wir müssen antworten; sie sind nötig, — denn die Universitäten vereinigen zwar in sich alle Zweige der Wissenschaft, sie schaffen auch zwischen ihnen gewisse Anknüpfungen, sie können aber mit ihren in der ganzen gebildeten Welt zerstreuten Residenzen die Pfleger der einzelnen Wissenschaftsfächer nicht einander näher bringen. Jede Universität ist bestrebt in sich ein Ganzes zu bilden, jede sorgt sich nur um ihre eigenen Schüler und Professoren, versieht sie mit Bibliotheken, Sammlungen und Laboratorien, mit einem Wort, mit allen Hülfsmitteln der Wissenschaft; wie die Mitglieder ihrer Corporation aber die Erfolge ihrer Forschungen auch ausser den Wänden des Lehrsaales verwerthen, lassen sie einzig und allein auf seine eigene Einsicht.

So stellt die Universität nur, so zu sagen, gut geschulte und gut ausgerüstete Arbeiter auf das Feld der Wissenschaft, die Akademie aber bleibt auch dieser Arbeiterschaar gegenüber das, was sie früher war, der Arbeitgeber, der für die Früchte der Arbeit belohnt, und wenn es nöthig ist, der Führer der Arbeit, der die zerstreuten Kräfte zu gemeinsamen grossen Aufgaben vereinigt.

Auf solche Art schliefsen sich Universität und Akademie nicht aus, sondern ergänzen einander.

Die Nothwendigkeit der Vereinigung der wissenschaftlichen Kräfte war nie so fühlbar wie heute. Jene hunderte und tausende, welche besonders, seit der Neubelebung der Universitäten das Feld der Wissenschaft nach allen Richtungen durchforschten, bezeichneten durch ihre Entdeckungen immer neue und neue Gebiete, welche der Bearbeitung warten.

Während die Entdeckung selbst immer nur das Resultat des glücklichen Gedankenganges eines Einzigen ist, überschreiten die auf dessen Grund zu lösenden Aufgaben sehr häufig die Kräfte des Einzelnen, und bedürfen des Zusammenwirkens von mehreren.

In dieser schnelllaufenden Zeit der Entdeckungen genügen die Akademien nicht mehr, sind nicht mehr reich genug, um alle diesbezüglichen Arbeiten in sich zu verrichten.

Ist die Wissenschaft aufgeblüht und in weiten Kreisen verbreitet, so hört auch die Fortbildung derselben auf, die Privatsache einzelner Auserwählter zu sein, sie wird eine gemeinsame Sache, gegen die der Staat und die Gesellschaft Verpflichtungen auf sich nehmen.

Neben den alten entstehen demnach neue Institutionen.

Die Staaten errichten zur Ergründung einzelner wissenschaftlicher Fragen selbständige, reich ausgestattete Institute, und zwar nicht nur im Interesse der praktischen Verwerthung, sondern im Interesse der Wissenschaft selbst. Einen glänzenden Beweis liefern dafür das Pariser Bureau de poids et mesures und die Potsdamer Physikalische Reichsanstalt, welche jährlich über viele tausende verfügen, um die Temperatur um den tausendsten Theil, oder die Dichte des Wassers um den hundertmillionsten Theil eines Grades genau bekannt zu machen.

Verwöhnte Kinder unserer Zeit sind auch die wissenschaftlichen Wandersitzungen oder Congresse. Auch diese wirken heute in der Erfüllung vieler wisssenschaftlicher Aufgaben, welche die Kräfte der Einzelnen überschreiten, mit, indem sie zwischen den Gelehrten gewisse gesellschaftliche Beziehungen und internationale Berührungen ermöglichen.

Obwohl diese neueren Vereinigungen, dem Geiste unserer Zeit entsprechend, mehr demokratisch gesinnt sind, und in ihren Kreis jeden Arbeiter gerne aufnehmen, ohne in Betracht zu ziehen, ob er die Feuerprobe der akademischen Wahl, oder den Wettbewerb der Universität ausgehalten hatte, so stellen sie sich den alten Instituten doch nicht gegenüber, sondern folgen ihrer Bestimmung mit ihnen gemeinsam und auf sie gestützt.

Darum, weil sie als Pfleger der Wissenschaft nicht mehr allein stehen, haben die Akademien nicht an Bedeutung verloren, sie sind nicht überflüssig geworden.

In meinen Erörterungen war ich bestrebt, jene Umstände in wahrem Lichte zu schildern, auf deren einseitige Auffassung der Feind seine Angriffe gründet.

Ausser den bisher erwähnten habe ich noch ein Argument, welches viel überzeugender ist als alle andern. Damit wende ich mich an Sie, an die Mitglieder der ungarischen Akademie, an die wahren Freunde der ungarischen Wissenschaft.

Die Akademien sind nicht nur wissenschaftliche, sondern auch nationale Institutionen. Nationale Institutionen insofern, als sie die Sprache und Litteratur, die Geschichte, die Volkswirthschaft unserer Nation oder deren gesellschaftliche und Naturverhältnisse zum Gegenstande ihrer Forschung machen; nationale Institutionen sind sie auch deshalb, weil sie in ihrer Wirksamkeit die wissenschaftlichen Bestrebungen einer Nation zum Ausdruck bringen, und unter deren Fahne auf dem wissenschaftlichen Schauplatze der Welt erscheinen. Wir müssen nicht glauben, dass dies nur die Eigenthümlichkeit unserer Akademie ist und dass diese derselben beraubt den anderen Akademieen ähnlicher, im Range vornehmer würde. Legen wir lieber darüber Rechnung ab, dass der Ruhm, den diese Akademie erringen kann, nur der Ruhm der ungarischen Wissenschaft sein kann, und dass wir nicht einen Moment vergessen sollen, dass wir das Erbe unseres Begründers nur dann treu bewahren, wenn wir unsere nationale Aufgabe erfüllen, indem wir entwickeln, wie er selbst sagte: „die verborgenen, noch nicht ausgebildeten und zur Reife nicht gelangten Eigenthümlichkeiten der ungarischen Nation und hiedurch die Welt um eine Nation bereichern".

Stärker als jede andere Begründung sichert dies das Existenzrecht unserer Akademie!

Und hiermit eröffne ich die neunundfünfzigste Gesammtsitzung der ungarischen Akademie der Wissenschaften.

JAHRESBERICHT DES GENERALSECRETÄRS COLOMAN VON SZILY.

Unsere Akademie hielt im vorigen Jahre 44 Sitzungen, unter anderen auch eine ausserordentlich traurige Sitzung, durch welche die Akademie ihre tiefe Trauer ausdrückte. Mit Dankbarkeit und Pietät gedachte sie der hochherzigen Königin, welche die ungarische Sprache und Litteratur aufrichtig liebte, auch unter ihren Kindern beliebt machte und die in diesem Gebäude ihren Kranz auf die Bahre Franz Deák's legte. In derselben Sitzung beschloss unsere Akademie, diese Scene durch eine Gedenktafel aus weissem Marmor zu verewigen. Die Kosten dieser Gedenktafel sind durch die Gaben der Mitglieder der Akademie, der Kisfaludy-Gesellschaft und der Naturwissenschaftlichen Gesellschaft in kurzer Zeit zusammengekommen, und der Directionsrath betraute Herrn Prof. Alois Strobl mit der Durchführung derselben. So können wir hoffen, dass das Werk in wenigen Jahren fertig sein wird und den Nachkommen auch im Heim der Wissenschaft verkünden wird, wie nahe diese grosse Königin dem Herzen der ungarischen Nation gestanden ist.

Die einzelnen Classen hielten im Jahre 1898 25 öffentliche Sitzungen.

Die Vorträge der I. Classe vertheilten sich gleichmässig auf das Gebiet der Litteratur und Kunst einerseits und auf die Sprachwissenschaften anderseits; grösstentheils bezogen sie sich aber auf nationale Gegenstände.

Classen-Präs. und ord. Mitgl. Karl Szász beendigte im vorigen Jahre sein Werk von 20 Jahren, die Uebersetzung von Dante's „Divina Commedia", ord. Mitgl. P. Emil Thewrewk trug einmal über die Frage des Rhythmus, ein anderesmal über die ungarische Uebersetzung von Homer vor. Grosses Aufsehen erregte die Entdeckung eines 15 zeiligen altungarischen Textes vom Anfange des XIV. Jahrhunderts durch Elemér Varjú, welches jetzt das zweitälteste ungarische Sprachdenkmal ist. Vorträge hielten noch Ehren-Mitgl. Maurus Jókai, ordl. Mitgl. Anton Bartal, corr. Mitgl. Gedeon Petz, Johann Melich, Ludwig Dézsi, corr. Mitgl. Friedrich Riedl, corr. Mitgl. Stephan Hegedüs und Eduard Mahler.

In der II. Classe waren die Vorträge geschichtlichen Inhalts überwiegend. Heinrich Marczali hielt über Dalmatien und die Könige des Árpádenhauses einen Vortrag, welchen er auch dem internationlen historischen Congresse

vorlegte. Ausserdem hielten noch Vorträge: corr. Mitgl. Gabriel Téglás über die ältesten geographischen Angaben über Dacien bei Herodot, ord. Mitgl. Florian Mátyás über die Ungarn im IX. Jahrhundert, Wilhelm Frakno'i, Andreas Veress und Andreas Komáromy.

Über socialwissenschaftliche Gegenstände trugen die corr. Mitgl. Joseph Körösi und ord. Mitgl. Joseph Jekelfalussy vor.

Die in der III. mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe gehaltenen Vorträge und Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten erwähnt.

An den litterarischen Feierlichkeiten, welche zur Erinnerung einzelner hervorragender Männer in verschiedenen Theilen des Landes gehalten wurden, nahm die Akademie auch durch ihre Vertreter Theil.

In der Ausgabe der Akademie erschienen im vorigen Jahre 34 Werke, von denen wir nur einige erwähnen: es erschien der VIII. Band der Korrespondenz Karinczy's, die Tagebücher und der Briefwechsel des grossen altungarischen Schriftstellers Albert Szenczi Molnár, herausgegeben von Ludwig Dézsi, der II. Band aus dem Material der Gesetzvorlage des Kriminalrechtes aus dem Jahre 1843 von Ludwig Fayer. Árpád Hellebrant vollendete das grosse bibliographische Werk unseres verstorbenen Mitgliedes Karl Szabó, welches Facsimilen der Titelblätter der von Ungarn und Ungarländern bis 1711 erschienenen Werke enthält.

Mit Dankbarkeit und Pietät erinnern wir uns der Wohlthäter der Akademie. B. Albert Wodianer machte eine Stiftung von 25 000 Gulden für bestimmte Zwecke, die Vereinigte Budapester Sparkasse setzte einen Preis von 4000 Gulden aus, Dir. u. Ehrenmitgl. Anton Zichy hinterliess sein Budapester Wohnhaus der Akademie, Ehrenmitgl. Balthasar Horvát vermachte 1000 Gulden. Durch ein von litteraturgeschichtlichem Standpunkte sehr werthvolles Geschenk bereicherte Ladislaus Arany unsere Handschriftensammlung, indem er uns die Briefe mehrerer ungarischer Dichter und Schriftsteller schenkte. Herr Andreas Szirmay machte das einzige Exemplar des Gesetzbuches von König Mathias zum Geschenk. Dir. u. Ehrenmitgl. Ernst Hollán schenkte neun an ihn gerichtete Briefe von Stephan Széchenyi dem Széchenyi-Museum.

Unsere Akademie hat seit der letzten Festsitzung viele Mitglieder durch den Tod verloren.

Von den Directionsmitgliedern starben: gr. Georg Apponyi, Ehrenmitgl. und Präsident der I. Classe Anton Zichy.

Von den Ehrenmitgliedern verloren wir ausser Anton Zichy noch Balthasar Horvát, den Reformator des ungarischen Justizwesens.

Von den ordentl. Mitgliedern: Iván Nagy und Alexander Szilágyi.

Von den corresp. Mitgliedern starben: Iván Télfy, der grosse Freund des Neuhellenismus; Stephan Bartalus, der grosse Kenner der ungarischen Musikgeschichte; Albert Bielz, Béla Szász, der Übersetzer von Longfellow und Stuart Mill und Ladislaus Arany.

Von den auswärtigen Mitgliedern verloren wir: den grossen englischen Staatsmann WILHELM GLADSTONE, den Egyptologen GEORG EBERS, ALFONS HUBER, der die Geschichte unseres Vaterlandes dem Auslande in unverfälschtem Lichte zeigte, FRIEDRICH MÜLLER, KARL KNIES, FRANZ HAUER, den Director der Kais. Geologischen Anstalt, der sich auch durch die Erforschung der Geologie von Siebenbürgen Verdienste erwarb und den in Budapest gebürtigen Orientalisten WILHELM LEITNER.

Meinen Bericht will ich mit einer Erinnerung beenden.

Vierzig Jahre sind es, dass in der Festsitzung des Jahres 1859 der damalige Präsident der Akademie die begeisternden Worte sprach: „In Ungarn hat die Wissenschaft keine Heimstätte, ist die Akademie nicht werth, dass wir ihr eine verschaffen?" Die Akademie verlangte nur ein einfaches Haus, die Nation errichtete aber einen Palast und vermehrte zugleich das Grundcapital der Akademie. Nie war die Akademie so volksthümlich als damals, weil sie die Wissenschaft volksthümlich machte. Heute ist sie aus der Gunst der Menge gefallen, weil behauptet wird, dass sie die Wissenschaft nicht popularisiert. Die das behaupten, vergessen, dass sie jährlich 30—35 000 fl. an verschiedene Vereine vertheilt, damit sie die Wissenschaft in ungarischer Sprache popularisieren. Wahr ist, das sie selbst als Akademie nichts dafür thut, sie soll aber auch nichts thun, denn in jedem Lande hat die Wissenschaft eine Stätte, wo sie nicht um ihres praktischen Nutzens, sondern um ihrer selbst willen betrieben wird. Das soll die Akademie auch in Ungarn sein.

A. Vermögen der Akademie am 31. Dezember 1898.

I. Activum.

1.	Werthpapiere der Akademie insgesammt	1 665 502 fl.	12 kr.
2.	Gebäude der Akademie, Einrichtung, Bibliothek . .	1 000 000 „	— „
3.	Aeussere Stiftungen, Fonds, Immobilien	69 869 „	33 „
4.	Rückständige Interessen	559 „	72 „
5.	Verschiedene Forderungen der Akademie	85 843 „	91 „
6.	Im Vorhinein für 1899 bezahlte Gebühren	2 857 „	99 „
7.	Ausstehende Vorschüsse	1 211 „	99 „
8.	Hauszinsrückstände	91 „	04 „

II. Passivum.

1.	Die von der Akademie verwalteten Fonds	154 093 „	44 „
2.	Verschiedene Forderungen	40 714 „	12 „
3.	Im Vorhinein bezahlte Hausmiethe welche für 1899 gehört	1 743 „	37 „
4.	Vermögen der Akademie am 1. Januar 1898	2 613 297 „	59 „
5.	Reiner Gewinn des Jahres 1898	16 087 „	58 „

B. Einnahmen der Akademie im Jahre 1898.

1.	Interessen von Stiftungen und anderen Fonds . .	6 161	fl.	70 kr.
2.	Ertrag der Werthpapiere	64 410	„	24 „
3.	Hausmiethe	41 820	„	50 „
4.	Erlös verkaufter Bücher	10 000	„	— „
5.	Landessubvention	40 000	„	— „
6.	Immobilien	723	„	35 „
7.	Legate und Spenden	6 249	„	12 „
8.	Einzahlung der ungarischen Kaufmannshalle . . .	160	„	— „
9.	Beitrag der archäologischen und anthropologischen Gesellschaft	525	„	— „
10.	Cursdifferenzen	2 250	„	— „
11.	Aus der Kazinczystiftung	2 182	„	40 „
12.	Rückerstattung von den Classen	5 440	„	18 „
13.	Zur Subventionierung des türkisch-ungarischen Wörterbuches	500	„	— „
14.	Mehreinnahme bei einem ausgelosten Loos von 1860	80	„	— „
15.	Mehreinnahme beim Pacsérer Gut	7 019	„	30 „

C. Ausgaben der Akademie im Jahre 1898.

1.	Personalbezüge	32 860	„	77 „
2.	Anzeiger, Almanach u. s. w.	4 427	„	66 „
3.	I. Classe und deren Commissionen	18 038	„	45 „
4.	II. „ „ „ „	24 063	„	56 „
5.	III. „ „ „ „	15 240	„	88 „
6.	Unterstützung von Büchereditions-Unternehmungen	3 000	„	— „
7.	Graf Széchenyi-Museum	497	„	99 „
7 a.	Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's	2 182	„	40 „
7 b.	Szinnyei: Biographien der ungarischen Schriftsteller	1 200	„	— „
8.	Preise	9 696	„	80 „
9.	Budapesti Szemle (Budapester Revue)	4 000	„	— „
10.	Für ausländische Publicationen über ungarische Literatur	654	„	— „
11.	Pränumeration an die „Math. Naturw. Berichte“ .	1 500	„	— „
12.	Bibliothek	6 497	„	02 „
13.	Instandhaltung der Gebäude, Heizung etc.	9 818	„	15 „
14.	Vermischte Ausgaben	5 064	„	62 „
15.	Steuer	16 584	„	72 „
16.	Interessen aus den von der Akademie verwalteten Fonds	2 729	„	47 „
17.	Unvorhergesehene Ausgaben	990	„	43 „

18.	Rückerstattung an das Grundcapital	3 200 fl. — kr.
19.	Abschreibung des Vorschusses eines verstorbenen Mitgliedes	740 „ — „

D. Voranschlag für 1899.

Einnahmen.

1.	Interessen der Stiftungen	2 700 „ — „
2.	Forderungen	3 500 „ — „
3.	Ertrag der Werthpapiere	66 000 „ — „
4.	Ertrag der Immobilien	— „ — „
5.	Hausmiethe	39 000 „ — „
6.	Erlös verkaufter Bücher	9 500 „ — „
7.	Landessubvention	40 000 „ — „
8.	Ausserordentliche und durchlaufende Einnahmen	13 131 „ 09 „

Ausgaben.

1.	Personalbezüge	28 564 „ 20 „
2.	Allgemeine Ausgaben (Anzeiger, Almanach etc.)	4 500 „ — „
3.	I. Classe und deren Commissionen	20 139 „ 73 „
4.	II. „ „ „ „	34 647 „ 34 „
5.	III. „ „ „ „	16 379 „ 82 „
6.	Unterstützung von Büchereditions-Unternehmungen	4 000 „ — „
7.	Graf Széchenyi-Museum	1 000 „ — „
7 a.	Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's	3 000 „ — „
7 b.	Szinnyei: Biographien der ung. Schriftsteller	1 200 „ — „
8.	Preise	1 000 „ — „
9.	Budapesti-Szemle (Budapester Revue)	2 000 „ — „
10.	Für ausländische Publicationen über ungarische Literatur	1 600 „ — „
11.	Pränumeration auf die „Math. Naturwiss. Berichte“	1 500 „ — „
12.	Bibliothek	6 500 „ — „
13.	Instandhaltung der Gebäude. Heizung etc.	7 400 „ — „
14.	Vermischte Ausgaben	5 000 „ — „
15.	Steuer	16 500 „ — „
16.	Interessen aus den von der Akademie verwalteten Fonds	3 000 „ — „
17.	Rückerstattung an das Grundcapital	1 800 „ — „
18.	Unvorhergesehene Ausgaben	3 000 „ — „
		174 331 fl. 09 kr.
	Vermehrung des Grundcapitals	1 500 „ — „

Am 1. Jänner 1899 hatte die Akademie insgesammt 231 Mitglieder, von denen 18 Ehrenmitglieder, 56 ordentliche, und 134 correspondierende Mitglieder waren. Der Directionsrath bestand aus 23 Mitgliedern.

Die Mitglieder vertheilten sich folgender Weise auf die drei Classen:

Die I. (Sprach- und schönwissenschaftliche) Classe hatte 5 Ehren-, 12 ordentliche- und 28 correspondierende Mitglieder.

Die II. (philosophisch-historische) Classe, 6 Ehren-, 22 ordentliche und 54 correspondierende Mitglieder.

Die III. (mathematisch-naturwiss.) Classe, 7 Ehren-, 22 ordentliche und 52 correspondierende Mitglieder.

Bibliothek.

Die Anzahl der geordneten Fachwissenschaften war 53; diese enthielten 56 995 Werke.

Darunter: Anthropologie 314, Mathematik und Astronomie 1097, Naturwissenschaft 177, Physik 939, Chemie 416, Naturgeschichte 129, Zoologie 491, Botanik 427, Mineralogie und Geologie 512, Medicin, Anatomie, Physiologie 2483.

Der Fachkatalog besteht aus 102 Bänden und 48 Zettelkapseln.

Zunahme der Bibliothek im Jahre 1898.

a. Durch Kauf	385	Werke
b. Durch Tauschverkehr mit auswärtigen Akademien	524	„
c. Pflichtexemplare von 356 Druckereien	6 925	„
d. Geschenke von Privatpersonen	39	„
e. Eigene Ausgaben	27	„
Summe der gesammten Zunahme	7 900	

Dazu kommen noch 125 Stück Schulprogramme und 112 ausländische Zeitschriften.

Den Lesesaal der Bibliothek besuchten 6959 Leser, welche 9012 Werke benützten. Es wurden 687 Stück Eintrittskarten ausgegeben. 1479 Werke waren ausgeliehen.

Die Preisausschreibungen der Mathem.-Naturw. Classe.

a. Neue Preise. Semsey-Stiftung: Gegenstand: 1. Die Geologie Ungarns, und zwar: die Entwickelung der Kenntnis der Geologie Ungarns, die Oro- und Hydrographie, endlich die ausführliche Geologie. — 2. Die wissenschaftliche Beschreibung der in Ungarn vorkommenden Mineralien, mit Benützung der diesbezüglichen in- und ausländischen Literatur. — 3. Die Flora Ungarns. Die Morphologie aller in Ungarn vorkommenden Pflanzen, mit besonderer Rücksicht auf diejenigen, welche charakteristisch sind. Die geographische Verbreitung der einzelnen Arten. — 4. Die Fauna Ungarns. Systematische Bearbeitung aller in Ungarn vorkommenden Thierarten, mit Aufzählung der über diesen Gegenstand erschienenen Werke. — Den Preis für jedes einzelne dieser Werke bilden 10 000 Gulden.

Johann Forster-Stiftung. Gegenstand: Die national-ökonomische und landwirthschaftliche Bedeutung der Zucht und Veredlung der Samen landwirthschaftlicher Pflanzen, sowie die biologischen und wirthschaftlichen Bedingungen, von denen der Erfolg der Zucht abhängt. Preis 1500 Gulden.

b. Wiederholt ausgeschriebene Preise.

Welche Rolle spielen die Wasserstrassen unter den Verkehrsmitteln, mit besonderer Rücksicht auf unsere heimathlichen Verhältnisse. Preis aus Andreas Fáy Stiftung der Pester ersten Sparkassa 3000 Gulden.

ZUR ERINNERUNG AN GÉZA VON MIHALKOVICS.

Géza von Mihalkovics, ordentlicher Professor der Anatomie und Director des I. Anatomischen Institutes der Universität Budapest, wurde mitten im rastlosen Schaffen am 12. Juli 1899 im Alter von 55 Jahren von einem heimtückischen Leiden dahingerafft. In dem Verstorbenen verliert die Wissenschaft in Ungarn, der sein rastloser Fleiss und sein Streben vor allem gegolten hat, einen ihrer tüchtigsten Vertreter, und mit seinem Vaterlande trauert die ganze wissenschaftliche Welt an seiner Bahre; denn seine wissenschaftliche Thätigkeit war weit über die Grenzen Ungarns bekannt und gewürdigt worden.

Über den Lebenslauf des Verstorbenen können wir das folgende berichten. Géza von Mihalkovics wurde zu Budapest als der Sohn eines Rechtsanwaltes am 31. Januar 1844 geboren, er besuchte das Gymnasium in seiner Vaterstadt und bezog im Jahre 1863 daselbst die Universität, wo er sich dem medizinischen Studium widmete und sich hauptsächlich mit Anatomie befasste. Schon als Student besass er eine besondere Geschicklichkeit in der Herstellung anatomischer Präparate und wir finden auch jetzt in der Sammlung des Institutes Präparate, welche mit seinem Namen versehen sind.

Schon als Mediziner gewann er zwei Preise; er schrieb ein anatomisches Werk, welches mit einem Preis ausgezeichnet wurde und zu welchem er vorzügliche Präparate verfertigte; später, im Jahre 1868 verfasste er eine chirurgische Verbandslehre, mit welcher er den zweiten Preis gewann und welche auch im Druck erschien. Während seiner Studienzeit wählte ihn Professor Lenhossék wegen seiner grossen Geschicklichkeit zum Demonstrator. Er betrachtete aber die Anatomie nur als Hilfswissenschaft, denn er wollte Chirurg werden und hatte schon damals die Erkenntnis, dass ein tüchtiger Chirurg auch ein tüchtiger Anatom sein muss. Um sein Wissen auf diesem Gebiete zu erweitern und zu vervollständigen, trat er im Jahre 1869, nachdem er seine Studien vollendet hatte, in das, unter der Leitung des Professors Joseph von Lenhossék stehende Anatomische Institut als Assistent ein, welche Stelle er bis zum Jahre 1871 bekleidete, und wo er während dieser Zeit eine rege litterarische Thätigkeit entwickelte. Im Jahre 1871 ging er zu seinem eigentlichen Fache, der Chirurgie über und wurde Operationszögling an der Klinik des Professors Kovács; doch wurde er durch äussere Umstände von seiner Bahn abgelenkt und dadurch, dass ihm Aussicht auf eine Anatomische Lehrkanzel geboten wurde, wieder der Anatomie zugeführt. Da

dem Charakter Mihalkovics's jede Unvollkommenheit ferne lag, und er bei allen seinen Studien seine volle Kraft einsetzte, so widmete er auch jetzt, wo er durch die Verhältnisse zur Anatomie bestimmt wurde, sein ganzes Wissen dem Studium der wissenschaftlichen Seite dieses Zweiges der ärztlichen Wissenschaft. Er trat 1872 eine Studienreise in das Ausland an, wo er zuerst in Wien unter der Leitung des Professor Toldts die Methoden der mikroskopischen Forschung studierte, und seine Arbeit über den Kamm des Vogelauges schrieb. Während des Sommersemesters 1873 arbeitete er an dem Ludwigsinstitut in Leipzig bei Professor Schwalbe, wo er die so oft citierte Arbeit über die Histologie des Hodens schrieb.

Die Jahre 1873—1875 brachte er an der Universität Strassburg zu; wo er an Professor Waldeyer, der seine Tüchtigkeit und Strebsamkeit sogleich erkannte, einen Gönner fand und durch dessen Vermittlung er, trotzdem er ein Ausländer war, nicht nur als I. Assistent angestellt wurde, sondern auch die Erlaubniss erhielt, sich an der Universität zu habilitieren. Dass Professor Waldeyer sich in der Beurtheilung seines Schützlings nicht irrte, beweisen die Worte, welche er an der Bahre Mihalkovics's, seinem einstigen Assistenten, widmete: „Sein früher Tod wird im ganzen Ungarlande tief betrauert und beklagt; aber auch weit über die Grenzen seiner Heimath hinaus, insbesondere in Deutschland und Italien, in welchen beiden Ländern Mihalkovics manchen Freund zählt, schmerzlich empfunden. Wir deutschen Anatomen haben allen Anlass, das Hinscheiden unseres ungarischen Collegen zu beklagen; ist er doch Deutschland in steter Hinneigung ergeben gewesen und hat die guten Beziehungen zwischen Deutschland und seinem Vaterlande, was an ihm lag, treu zu pflegen und zu fördern gesucht.“ Die Worte des grossen deutschen Gelehrten beweisen uns, wie Bedeutendes Mihalkovics als Fachgelehrter geleistet, und dass das, was er geschrieben hat, nicht nur für den fachmännischen Leserkreis seines Volkes, sondern für das höchste wissenschaftliche Forum der grossen Kulturvölker von Bedeutung war.

Auf Waldeyer's Anregung begann Mihalkovics sich mit Embryologie zu beschäftigen, welcher Richtung er bis zu seinem Lebensende treu blieb. In Strassburg schrieb er die Aufsätze über die Entwickelung der Chorda dorsalis, der Hypophyse, der Zirbeldrüse und der Augenlinse. Auch sein Hauptwerk, eine umfangreiche Monographie über die Entwickelung des Gehirns, welches seinen schriftstellerischen Ruhm begründete, schrieb er dort. Unterdessen wurde in Budapest eine Lehrkanzel für Embryologie errichtet, welche er 1875 betrat. Da aber bei der stets zunehmenden Frequenz der medizinischen Facultät diese eine Lehrkanzel nicht genügte, so wurde ihm im Jahre 1878 als zweite Lehraufgabe die topographische Anatomie zugetheilt und er zum Ordinarius befördert, indem man ihm gleichzeitig in dem eben fertiggestellten neuen Universitätsbau eine besondere Abtheilung für Anatomie einrichtete, welche 1882 als „II. Anatomische Anstalt“ zu einer zweiten vollständigen anatomischen Lehrkanzel ausgestaltet wurde.

Nach dem 1888 erfolgten Tode des Professors Joseph von Lenhossék wurde Mihalkovics mit der Leitung des I. Anatomischen Institutes betraut, während die II. von Professor Ludwig Thanhoffer übernommen wurde. Mihalkovics erwarb sich auch bei dem Bau des neuen Anatomischen Insitutes, welches nach seinen Angaben (1878—1896) gebaut und eingerichtet wurde, grosse Verdienste. Trotzdem er in dieser Zeit schon sehr schwer leidend war, widmete er sich mit grossem Eifer und hohem Ehrgeize dieser schweren Aufgabe; etwas vollendetes sollte hier entstehen. Im Januar 1899 übersiedelte Mihalkovics in sein neues Heim; die Einrichtung seines Institutes konnte er jedoch nicht mehr zu Ende führen, trotzdem er sich auch noch während seiner Krankheit durch fortwährende Correspondenz und Bestellungen damit beschäftigte. Einige Monate vor seinem Tode hatte er einen Vortrag für die Tübinger Versammlung der Anatomischen Gesellschaft, welche er regelmässig besuchte, angekündigt. Es war ihm aber nicht mehr vergönnt, das Ergebniss seiner Forschungen und die Erfahrungen, welche er sich beim Einrichten des neuen Anatomischen Institutes gesammelt hatte, seinen ausländischen Collegen mitzutheilen!

Mihalkovics war schon drei Jahre vor seinem Tode schwer krank, er litt an einem heftigen Blutbrechen, welchem er schon damals erlegen wäre, wenn nicht das energische Eingreifen eines tüchtigen Arztes, der mit einer Kochsalztransfusion nicht zögerte, dem Leiden Einhalt gethan hätte, nach welchem er sich allmählich erholte. Der früher so kräftige Mann schien aber seit dieser Zeit gebrochen, und wer ihn in den letzten Jahren sah, der konnte kaum daran zweifeln, dass er den Keim eines schweren, tödtlichen Leidens in sich trage. Die Diagnose lautete: Ulcus ventriculi rotundum. Trotz seines schweren körperlichen Leidens war er bis zuletzt wissenschaftlich thätig. Noch in den letzten Jahren, als man den tödtlichen Ausgang seines Leidens schon kannte, überraschte er seine Landsleute durch zwei neue, gross angelegte Handbücher, die beide, leider, unvollendet blieben. Die grossen Anstrengungen, welche mit der Installierung des neuen Anatomischen Institutes und der von ihm im letzten Jahre bekleideten Würde eines Rektors der Universität verbunden waren, und die die Stunden seiner amtlichen Thätigkeit stark vermehrten, wirkten auf seinen ohnehin schon sehr anämisch gewordenen Organismus verderblich. Vom Monat Mai an nahm seine Krankheit in solchem Maasse zu, dass er nur auf kurze Zeit das Bett verlassen konnte; und am 11. Juli morgens drei Uhr erlag er seinem Leiden unter den Erscheinungen einer akuten Peritonitis. Die Section ergab ein chronisches, zum grossen Theil vernarbtes und mit dem Pankreas verwachsenes Magengeschwür von ungewöhnlicher Grösse, auf dessen Grunde sich ein neuer Erweichungsherd gebildet hatte, der zu einer Perforation der Magenwand führte.

Mihalkovics genoss nicht nur in seinem Vaterlande, wo ihn die medizinische Fakultät für die Jahre 1892—1894 zu ihrem Dekan wählte, und er im Studienjahre 1888—1889 die Würde eines Rector magnificus inne

hatte, grosses Ansehen und grosse Verehrung, welche sich bei seinem Tode in ergreifender Weise kundgab, sondern er wurde auch ausserhalb der Grenzen Ungarns gekannt und gewürdigt, wie dies mehrere Kränze auswärtiger Fachgenossen und die vielen Beileidschreiben aus dem Auslande bewiesen. Sein gewesener Lehrer Professor WALDEYER war aus Berlin gekommen, um seinem einstmaligen Assistenten, dem er nicht nur Lehrer sondern auch Freund war, an der Bahre einen ergreifenden Nachruf zu widmen, und Professor TOLDT legte den Kranz der Wiener medizinischen Fakultät persönlich auf den Sarg seines einstigen Schülers.

MIHALKOVICS war kein mittheilsamer, leicht zugänglicher Mensch, als Freund war er aber verlässlich und konnte mitunter auch recht warm werden; seine Freunde werden ihm gewiss ein treues, liebevolles Andenken weihen! Besonders stolz war er auf die Freundschaft, die ihn mit seinem einstigen Vorstand Professor WALDEYER verband. In seiner Gattin fand er eine treue Gefährtin, die seinen wissenschaftlichen Bestrebungen volles Verständnis entgegenbrachte und ihm stets eine verständige Mitarbeiterin war. Ihr hat auch sein letzter Blick, sein letzter Händedruck gegolten.

MIHALKOVICS's Hauptbestreben war, die Fortschritte der morphologischen Wissenschaften in allen ihren Theilen gewissenhaft zu verfolgen. Ein Zeugniss davon legen seine, in ungarischer Sprache verfassten, umfangreichen Lehrbücher ab, von welchen man besonders die vor seinem Tode veröffentlichte, Professor WALDEYER gewidmete, Allgemeine Embryologie (No. 24 des Verzeichnisses seiner Schriften) hervorheben muss, welche in jeder Zeile das tiefe fachmännische Wissen des Verfassers erkennen lässt, und welche mit einer solchen Sorgfalt und Gewissenhaftigkeit gearbeitet ist, dass sie nicht nur für den naturgemäss beschränkten fachmännischen Leserkreis seines Vaterlandes, sondern für das höchste wissenschaftliche Forum der grossen Kulturvölker geschrieben ist. Besonderes Gewicht legt er darin auf die übersichtliche Gruppierung der Thatsachen und auf das Hervorheben der aus ihnen hervorgehenden allgemeinen Gesichtspunkte. Auch seine 1881 erschienene Allgemeine Histologie (9) und die 1888—1892 veröffentlichte zweibändige Anatomie (13 und 15) zeigen dieselbe Klarheit in der Darstellung. Als man ihn zur Herausgabe einer zweiten Auflage aufforderte, genügte es ihm nicht, die erste Auflage zu verbessern, er entschloss sich, ein neues Werk mit einer neuen Eintheilung des Stoffes zu schreiben, welches er aber leider nicht mehr vollenden konnte, es erschien bloss der erste Band des auf drei Bände berechneten, mit Abbildungen versehenen Werkes (23).

Auch als selbständiger Forscher gehörte MIHALKOVICS zu den Tüchtigsten seines Faches, die die Wissenschaft mit namhaften Beiträgen bereichern. Die geachtete Stellung, welche er sich durch seine Forschungen in der Wissenschaft errungen hat, wird ihm wohl bis über das Grab hinaus gesichert sein. Seine wissenschaftliche Vorbildung stand ganz auf der Grundlage deutscher Wissenschaft, und sein Denken und Trachten als Forscher folgte stets der Richtschnur der deutschen Gelehrsamkeit.

Die Grundlage zu seinen sicheren praktisch-anatomischen Kenntnissen hatte er sich als Assistent des Professors Joseph von Lenhossék angeeignet. Von seiner Fertigkeit und Geschicklichkeit auf diesem Gebiete zeigen die topographisch-anatomischen Ausführungnn in seinen Büchern und das Zeugniss, welches ihm Waldeyer (vgl. Anat. Anzeiger, Bd. XVI, S. 350) ausstellt, indem er sagt, er habe selten einen Assistenten gehabt, der das Scalpell so meisterhaft zu führen verstanden hat wie Mihalkovics.

Seine ersten Arbeiten bewegen sich auf dem Gebiete der Histologie, erst auf seiner Studienreise begann er sich mit der mikroskopischen Richtung der Anatomie zu beschäftigen. Vor allem interessierte ihn das Problem des Werdens der Formen, er beschäftigte sich mit grosser Vorliebe mit der Entwickelung des Lebens und dem unerschöpflichen Forschungsproblem der rastlos thätigen Natur, welches sich in der Entwickelung der Organe am allerdeutlichsten kundgiebt. Er hatte einen ganz besonderen Sinn für morphologische Verhältnisse und einen klaren Blick für die verwickelten Vorgänge der Formenbildung und dazu eine klare, logische Darstellungsgabe.

Die Erstlingsarbeit Mihalkovics's (1) befasst sich mit dem Kamme des Vogelauges. Er weist darin nach, dass das Organ bei dem erwachsenen Thiere mit der Chorioidea keinen directen Zusammenhang hat, da es von ihr durch die Retina abgeschnürt ist, und dass es auch seine reichen Blutgefässe nicht aus den Venen der Aderhaut, sondern aus deren Retina empfängt, trotzdem aber ist es sehr genau und klar entwickelt, dafs der Kamm in morphologischer Hinsicht als eine zum System der Uvea gehörige Bildung aufzufassen sei.

In seiner Arbeit über den Bau des Hodens (2) hebt Mihalkovics als neu hervor, dass der Hoden mit Rücksicht auf die vielen Anastomosen der gewundenen Kanälchen unter sich als netzförmige Drüse aufzufassen ist (wie dies auch Hyrtl in seiner topographischen Anatomie nachweist). In den geraden Kanälchen weist Mihalkovics ein gewöhnliches niedriges Cylinderepithel nach und stellt dadurch fest, dass sie nicht mehr zu dem secernierenden Theil des Hodens, sondern schon zu dessen Ausführwegen gehören, welche Ansicht von Van der Stricht, Hammar, Disselhorst, v. Lenhossék u. a. in den letzten Jahren bestätigt wurde.

In seinem Aufsatze: Anlage der Augenlinse (3) beweist Mihalkovics im Gegensatze zu der kurz vorher (1874) erschienenen Arbeit J. Arnold's, in welcher dieser beim Rindsembryo die Linse aus einer soliden Wucherung des Ectoderms entstehen liess, dass diese auch hier, nicht anders als beim Hühnchen, aus einer bläschenförmigen Anlage besteht.

Seine Arbeit „Wirbelsaite und Hirnanhang" (5) ist für die Entwickelung der Hypophyse grundlegend geworden. Alle Autoren bis Goette (1873) verlegten die Bildungsstätte der Hypophysentasche hinter die Anheftungsstelle der Rachenhaut. Goette war der erste, welcher, allerdings nur ganz kurz, nachwies, dass sie sich bei Amphibien vor dieser anlegt, folglich dem äusseren Keimblatte entstammt. Mihalkovics bestätigte nicht

nur diese Aussage, sondern wies sie auch bei Vögeln und Säugethieren nach, was später (1874) von Balfour für Selachier und von Kölliker (1876) für höhere Säugethiere bestätigt wurde. Viel citiert ist auch der in der Arbeit Mihalkovics's erwähnte Befund des Verhaltens der Chorda in der Schädelbildung beim Kaninchen und ihre Beziehungen zur Hypophysenanlage, sowie der Umstand, dass die Chorda während ihres Verlaufes in der knorpeligen Schädelbasis merkwürdige Anschwellungen zeigt, die an diejenigen in den Intervertebralscheiben erinnern.

Auch die Entwickelung der Zirbeldrüse (6) bei Vögeln und Säugethieren hat Mihalkovics als erster beobachtet.

Sein Werk über die Entwickelung des Gehirns, welches zwar erst 1877 erschienen ist, an welchem er aber schon zur Zeit seines ersten Aufenthaltes in Strassburg arbeitete, bietet die erste monographische Bearbeitung dieses Gegenstandes. Man darf dies Werk nicht vom Standpunkte unserer heutigen Kenntnisse beurtheilen; die Methoden der Untersuchungen sind heute durch das Heranziehen der vergleichenden embryologischen Forschung viel vollkommener als vor 25 Jahren; Mihalkovics konnte seine Untersuchungen nur an höheren Wirbelthieren anstellen und rein nur anatomische Zwecke verfolgen. Trotzdem finden wir in dem Werke genug des Grundlegenden, auch abgesehen von der Darstellung der Entwickelung von Hypophyse und Zirbel, die hier ausführlich wiederholt wird.

Um die Mitte der achtziger Jahre veröffentlichte Mihalkovics als das Ergebniss eines mehrjährigen Studiums seine Abhandlung über die Entwickelung des Urogenitalapparates der Amnioten (11).

Einige Jahre vor seinem Tode begann Mihalkovics sich mit einem neuen embryologischen Problem zu befassen, nämlich mit der Frage der Entwickelungsgeschichte der Nasenhöhle und ihrer pneumatischen Anhänge. Wahrscheinlich war er durch die Aufforderung, für Heymann's Handbuch der Laryngologie und Rhinologie das Kapitel „Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Nase" zu bearbeiten, dazu angeregt worden. Er begnügte sich nicht mit einer einfachen Zusammenstellung der schon bekannten Thatsachen, sondern ging mit vollem Eifer an die selbständige Erforschung des Gegenstandes. Seine Beobachtungen hat er, leider nur in summarischer Form, an vier verschiedenen Stellen (18—21) veröffentlicht; seine Absicht, diese Beobachtungen ausführlich zu beschreiben, konnte er leider nicht mehr ausführen.

In seiner Beschreibung der Anatomie und Embryologie der Nase in Heymann's Lehrbuch (19) verwerthet Mihalkovics nicht nur seine eigenen Befunde, sondern berücksichtigt dabei auch die gesammte Litteratur, so dass er ausser Zuckerkandl als genauester Kenner dieses Gegenstandes betrachtet werden kann.

Wenn wir die letzte Arbeit Mihalkovics's, eine Studie über das Jacobson'sche Organ (23), lesen, so erweckt es neues Bedauern in uns über den Verlust, den die Wissenschaft durch das frühzeitige Hinscheiden des Ge-

lehrten erlitten hat. Auch hier, wie in allen seinen Arbeiten, bietet er eine vollständige, abgerundete Darstellung des Gegenstandes.

Wir haben in diesen wenigen Zeilen versucht, ein Bild des äusseren Lebensganges Géza von Mihalkovics's zu geben. Sein Leben war reicher an innerer Befriedigung als an äusseren Erfolgen; bei seinem idealen Streben und seiner rastlosen Arbeitslust stellte er diese gewiss höher als jene. Was er als Forscher geleistet, spricht für sich und sichert ihm einen ehrenvollen Platz in der Wissenschaft, dem Menschen und Gelehrten werden seine Freunde und Fachgenossen ein freundliches Andenken bewahren!

Verzeichnis der Schriften von G. v. Mihalkovics.

(Von den ungarischen Veröffentlichungen sind nur diejenigen angeführt, die in deutscher Sprache nicht erschienen sind. Ebenso sind diejenigen Publicationen Mihalkovics's, die sich nicht direct auf Anatomie beziehen, weggelassen.)

1. Beiträge zur Structur des Kammes des Vogelauges. Arch. f. micr. Anat. 1873. Bd. IX.
2. Beiträge zur Anatomie und Histologie des Hodens. Sitzungsber. d. Königl. Sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 1873. Bd. XXV.
3. Ein Beitrag zur ersten Anlage der Augenlinse. Arch. f. micr. Anat. 1874. Bd. XI.
4. Entwickelung des Gehirn-Anhanges. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1874. Nr. 20.
5. Wirbelseite und Hirnanhang. Arch. f. d. micr. Anat. 1874. Bd. XI.
6. Entwickelung der Zirbeldrüse. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1874. Nr. 16.
7. Die Entwickelung des Gehirnbalkens und des Gewölbes. Centralblatt f. d. med. Wissensch. 1876. Nr. 19.
8. Entwickelungsgeschichte des Gehirns. Leipzig 1877. 4°.
9. Általános boncztan. Budapest 1881. (Allgemeine Anatomie. Budapest 1881. 8°.)
10. Ungarische Übersetzung von W. Krause's Handbuch der menschlichen Anatomie. 3. Aufl. Budapest 1883.
11. Untersuchungen über die Entwickelung des Harn- und Geschlechtsapparates der Amnioten. Internat. Monatschr. f. Anat. u. Physiol. 1885. Bd. II.
12. A hermafroditaságról. Természettudományi Közlöny. (Über Hermaphroditismus.) 1885.
13. A leiró ember-boncztan és tájboncztan tankönyve. Budapest 1888. (Lehrbuch der descriptiven und topographischen Anatomie des Menschen. Budapest 1888. 8°.)

14. Emlékbeszéd Dr. Henle Jacob, a. m. tud. Akadémia külfagja felett. Kiadja a M. tud. Akadémia 1887. (Denkrede auf Jacob Henle gehalten in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.)
15. A központi idegrendszer és érzékszervek morphologiája. Budapest 1892. (Morphologie des centralen Nervensystems und der Sinnesorgane. Budapest 1892. 8°.)
16. Emlékbeszéd Lenhossék József felett. Kiadja a M. tud. Akadémia. 1893. (Denkrede auf J. v. Lenhossék gehalten in der Ungarischen Akademie der Wissenschaften).
17. A herecsövek szövetí szerkezete. Budapest 1894. fol. (Histologische Structur der Hodenkanälchen. Aus der Festschrift zum Jubiläum des Prof. Kovács 1894.)
18. Bau und Entwickelung der pneumatischen Gesichtshöhlen. Verhandl. d. Anat. Gesellsch. 10. Versammlung in Berlin 1896. Jena 1896.
19. Anatomie und Entwickelungsgeschichte der Nase und ihrer Nebenhöhlen. In „Handbuch der Laryngologie und Rhinologie", herausgegeben von Dr. Paul Heymann. 1896. Bd. III. 8°. Wien, Hölder.
20. A gerinczesek szagló szerve. Természettudományi Közlöny. 1896. (Das Geruchsorgan der Wirbelthiere.)
21. Nasenhöhle und Jacobson'sches Organ. Eine morphologische Studie. Anat. Hefte. 1898. Bd. XI.
22. Biológiai problémák és feladatok. Rectori székfoglaló beszéd. Budapest 1898. (Biologische Probleme und Aufgaben. Rectoratsrede. Budapest 1898.)
23. Az ember anatomiája és szövettana. Első rész: A mozgó szervek anatomiája. Budapest 1898. (Anatomie und Histologie des Menschen. Erster Theil: Anatomie der Bewegungsorgane. Budapest 1898.)
24. Általános fejlődéstan. Első kötet. Budapest 1899. (Allgemeine Entwickelungsgeschichte. I. Bd. 414 S. 327 Fig. Mit einem Bildnisse K. E. v. Baer's. Budapest 1899.

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

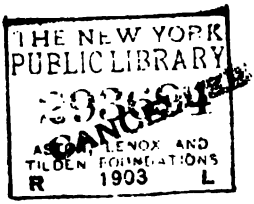
AUGUST HELLER.

ACHTZEHNTER BAND.

1900.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]



ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

INHALT DES XVIII. BANDES.

Abhandlungen.

		Seite
1.	Alois Schuller, Über die Potentialdifferenz der Metalle	1
2.	Karl Tangl, Wirkung der Magnetisierung auf den Dehnungsmodul	7
3.	Karl Tangl, Untersuchungen über die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung	35
4.	Gustav A. Kinn, Über die lineare Transformation der Thetafunctionen	52
5.	Zoltán von Sklády, Die Crustaceen des Retyezát	71
6.	Emerich von Lörenthey, Neuere Beiträge zur tertiären Decapodenfauna Ungarns	98
7.	Ernst Csiki, Die Cicindeliden Ungarns	121
8.	R. von Kövesligethy, Über die physikalische Deutung der Sterngrösse	145
9.	Andreas Högyes, Neuere experimentelle Daten zur Kenntniss der Reflexverbindung zwischen Ohr und Auge	155
10.	Ferdinand Klug, Beiträge zur Trypsinverdauung	165
11.	Ohm, Anhang zur Theorie der galvanischen Kette	202
12.	Joseph Kürschák, Über den Rang der Determinante bei inducierten linearen Substitutionen	229
13.	Gustav Rados, Notes sur les Substitutions Orthogonales	231
14.	Gustav Rados, Beitrag zur Theorie der algebraischen Resolventen	236
15.	Josef Kürschák und Paul Stäckel, Johann Bolyai's „Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewsky's geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien	250
16.	Paul Stäckel, Aus Johann Bolyai's Nachlass. Untersuchungen aus der absoluten Geometrie	280
17.	Hermann Strauss, Über die Classification dioptrischer Systeme	308
18.	Eugen von Daday, Die Eylaisarten Ungarns	341
19.	Moritz von Hoor, Über die Beziehungen zwischen den Erscheinungen der magnetischen, dielektrischen und mechanischen Polarisation	365
20.	Adolf Ónodi, Die Frage der Chorea laryngis	395
21.	Adolf Ónodi, Zur Frage der nekroskopischen Untersuchung der Kehlkopfnerven	423

Staub Moritz, Über die in einem Jahre zwei- oder dreimal blühenden Pflanzen. 436.

Simonkai Ludwig, Die Synonyme einer unserer vaterländischen Poa-Arten. 457. — Unsere halbblütigen Salbeiarten aus der Gruppe der Euplethiosphacer. 458.

Strauss Hermann, Über die Classification dioptrischer Systeme. 308.

Szarvasy Emerich, Die elektrolytische Darstellung der Induline. 444. — Ueber die Elektrolyse der Nitrogen-Hydrogen-Verbindungen. 459. — Die Herstellung der Nitrogenhydride. 461.

Szépligeti Victor, Die Braconidae Hymenopterae. 454.

Szilády Zoltán, Die Crustaceen des Retyezát. 71. — Die Crustaceen der Retyezáter Seen. 434. — Das Formaldehyd. 454.

Szili Adolf, Haarbildung unter der Bindehaut des oberen Augenlides. 451.

Thaisz Ludwig, Über die anatomischen Untersuchungen der Kerne und über die verschiedenen Präparierungsmethoden. 438.* — Ueber die auf d. mikroskopische Untersuchung der Kerne bezüglichen Präparierungsmethoden. 439. — Floristische Mittheilungen aus dem Comitat Krassó-Szörény. 442.

Tangl Franz, Untersuchungen aus der Physiologie des Energieumsatzes. 426.* — Kalorimetrische Untersuchungen. 462. — Ueber die Arbeit des senilen Herzens. 463.

Tangl Karl, Wirkung der Magnetisierung auf den Dehnungsmodul. 7. — Untersuchungen über die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung. 35.

Than Karl, Brief von Vant Hoff. 460.* — Bericht über die internationale Atomgewichtcommission. 462.

Thanhofer Ludwig, Über die Anwendbarkeit der Projectionsapparate. 451.

Tötössy Béla, Über die Verallgemeinerung von elementaren geometrischen Verwandtschaften. 427.

Tuzson Johann, Der Tarnóczer versteinerte Baumstamm. 429.

Vángel Eugen, Über die Verlassenschaft von Ladislaus Traxler. 431.

Wagner Johann, Neuere Beiträge zur ungarischen Flora. 438.*

Wartha Vinzenz, Neuere Methoden der Schwefelsäurefabrikation. 444.

Winkler Ludwig, Die Löslichkeit der Gase in Wasser. 430. — Die Bestimmung des Calciums und Magnesiums in natürlichen Gewässern durch Kaliumoleat. 443. — Die Bestimmung der in natürlichen Wässern gelösten Gase. 444. — Die Bestimmung von Meniscuscorrectionen. 461.

Weszelsky Julius, Die titrimetrische Bestimmung der Bromiden neben Chloriden und Jodiden. 442. — Versuche behufs Darstellung der Propylendisulfilsäure. 444.*

Zaitschek Arthur, Über die Bestimmung des Stärkeinhaltes des Futters. 461.*

Zimányi Karl, Die kristallographischen Eigenschaften des Tetraëdrites. 462.

INDEXED

CANCELLED

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

MIT UNTERSTÜTZUNG DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS, JULIUS KÖNIG, KARL VON THAN.

REDIGIERT VON

AUGUST HELLER.

ACHTZEHNTER BAND.

1900.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & KIE.]

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen. Hrsg. im Auftrage der Akademieen der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, sowie unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen. In 7 Bänden zu je 6—8 Heften. gr. 8. geh.

Bisher erschien:

I. **Arithmetik u. Algebra**, red. v. Frz. Meyer. Heft: 1. [112 S.] 1898. *M* 3.40; 2. [112 S.] 1899. *M* 3.40; 3. [128 S.] 1899. *M* 3.80; 4. [160 S.] 1899. *M* 4.80; 5. [208 S.] 1900. *M* 6.40; 6. [272 S.] 1901. *M* 7.20; 7. [128 S.] 1902. *M* 3.60.

II. **Analysis**, 2 Teile, red. v. H. Burkhardt. I. Teil. Heft: 1. [160 S.] 1899. *M* 4.80; 2/3. [240 S.] 1900. *M* 7.50; 4. [160 S.] *M* 4.80. II. Teil. Heft: 1. [175 S.] 1901 *M* 5.20.

III. **Geometrie**, 3 Teile, red. v. Frz. Meyer. III. Teil. Heft: 1. [183 S.] 1902. *M* 5.40.

IV. **Mechanik**, 2 Teile, red. von F. Klein I. Teil. Heft: 1. [121 S.] 1901. *M* 3.40; 2. [156 S.] 1902. *M* 4.60. II. Teil. Heft: 1. [147 S.] 1901. *M* 3.80. [Fortsetzung von Band I—IV u. d. Pr.]

Unter der Presse:

V. **Physik**, 2 Tle., red. v. A. Sommerfeld.

VI. 1: **Geodäsie und Geophysik**, red. v. E. Wiechert.

In Vorbereitung:

VI. 2: **Astronomie**, red. v. K. Schwarzschild.

VII. **Historische, philosophische u. didaktische Fragen** behandelnd, sowie **Generalregister.**

Abel, Niels Henrik, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. [XII u. 429 S.] 4. 1902. geh. n. *M* 21.—

Inhalt: Niels Henrik Abel. — Par Bjørnstjerne Bjørnson. — Introduction historique Par Elling Holst. — Correspondance d'Abel comprenant ses lettres et celles qui lui ont été adressées. — Lettres relatives à Abel. — Notes et éclaircissements sur la correspondance. — Texte original des lettres écrites par Abel en Norvégien. — Documents. Publiés par Carl Stormer. — Eclaircissements sur les documents. — Les études d'Abel et ses découvertes. Par L. Sylow.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Vierzehntes Heft. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 337 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M* 16.—

Inhalt: Axel Anthon Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — Heinrich Suter: Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke." — Karl Bopp: Antoine Arnauld, der grosse Arnauld, als Mathematiker

Ahrens, Dr. W., Magdeburg, mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Brück in Darmstadt. n. *M* 10.— (Auch in zwei Hälften broschiert, jede n. *M* 5.—).

Bachmann, Professor Dr. **Paul**, niedere Zahlentheorie. I. Teil. [X u. 402 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M* 14.—

Bardey, E., algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage, bearbeitet von Fr. Pietzker. [XIII u. 420 S.] gr. 8. 1902 geb. n. *M* 8.—

Berichte, Mathematische und Naturwissenschaftliche aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften u. der Kgl. Ungar. naturwissenschaftl. Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von August Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. geh. n. *M* 8.—

Beyel, Dr. Ch., Dozent am Polytechnikum in Zürich, darstellende Geometrie. Mit einer Sammlung von 1800 Dispositionen zu Aufgaben aus der darstellenden Geometrie. Mit 1 Tafel. [XII u. 190 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M* 3.60.

Brückner, Dr. Max, Oberlehrer am Gymnasium zu Bautzen, Vielecke und Vielflache; Theorie und Geschichte. Mit zahlreichen Figuren im Text, 7 lithographierten Tafeln und 5 Lichtdruckdoppeltafeln. [VIII u. 227 S.] 4. 1900. geb. n. *M* 16.—

Brüsch, Dr. phil. Wilhelm, Oberlehrer, Grundriss der Elektrotechnik für technische Lehranstalten. Mit 248 Abbildungen im Text. [XI u. 168 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M* 3.—

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

1.

UEBER DIE POTENTIALDIFFERENZ DER METALLE.

Von ALOIS SCHULLER.

Die Potentialdifferenz sich berührender Metalle wird bekanntlich entweder auf elektrometrischem oder auf calorimetrischem Wege bestimmt. Die Resultate dieser Methoden sind völlig verschieden, so zwar dass nicht nur die Zahlenwerthe, sondern auch die Spannungsreihen ganz andere sind. Dieser Umstand bewog mich, zu untersuchen, ob nicht der Grundgedanke der einen Methode unrichtig sei. Dabei gelangte ich zu dem Schlusse, dass die calorimetrische Methode, bei der unmittelbar die an der Berührungsstelle auftretende Wärme gemessen wird, die gesuchte Potentialdifferenz nicht liefern könne.

Um dies zu zeigen, denken wir uns die Metalle, etwa Kupfer und Zink ursprünglich in neutralem Zustande, also ohne jegliche freie Elektricität; im Augenblicke der Berührung erfolgt dann in Folge der materiellen Verschiedenheit Scheidung der Elektricität, indem das Kupfer negativ, das Zink positiv elektrisch wird. Dabei wird offenbar elektrische Energie produciert. Im ersten Augenblicke der Berührung, während noch beide Metalle als neutral zu betrachten sind, sich also noch keine Potentialdifferenz zwischen ihnen ausgebildet hat, sei $E_{1,2}$ die der Elektricitäts-Einheit entsprechende Energie, welche „elektromotorische Kraft" genannt werden möge.

$E_{1,2}$ bedeutet also die von den Molekularkräften geleistete Arbeit, während die Einheit der Elektricität vom elektronegativen Metall (Cu) zum elektropositiven (Zn) überströmt, wobei zwischen den Metallen keine Potentialdifferenz besteht, resp. eine etwa bestehende Potentialdifferenz ausser Acht gelassen wird.

Im Verlaufe der weiteren Scheidung der Elektricität bildet sich nun eine Potentialdifferenz heran, welche für sich eine entgegengesetzte Strömung, die Ausgleichung der Elektricitäten hervorrufen würde, wenn keine molekularen Kräfte (Scheidungs-Kräfte) wirksam wären. Sei die Potentialdifferenz in einem gegebenen Augenblicke, und zwar bevor noch der Gleichgewichtszustand eingetreten ist: V. Dann wird der Ueberführung der Einheit der Elektricität vom Kupfer zum Zink nicht mehr die Energie $E_{1\cdot 2}$, sondern nur $E_{12} - V$ entsprechen.

Dauert die Berührung lange genug, so stellt sich Gleichgewicht ein. In diesem Falle sei das elektrische Potential des Kupfers V_1, dasjenige des Zinks V_2, und bezeichnen wir der Kürze halber $V_2 - V_1$ mit $V_{2\cdot 1}$, so bedeutet $V_{2\cdot 1}$ diejenige Energie, welche von den elektrischen Kräften produciert wird, während die Einheit der Elektricität vom elektropositiven Metall zum elektronegativen überströmt, vorausgesetzt, dass keine anderen als elektrische Kräfte wirken, dass also die materielle Verschiedenheit nicht ins Spiel kommt. Im Zustande des Gleichgewichts sind die beiden Energien $E_{1\cdot 2}$ und $V_{2\cdot 1}$ einander gleich, die Bedingung des Gleichgewichts lautet also

$$E_{1\cdot 2} - V_{2\cdot 1} = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass eine so kleine Elektricitätsmenge de, welche den Gleichgewichtszustand nicht stört, vom Kupfer in das Zink, oder umgekehrt ohne Energieaufwand übertragen werden kann, dass also, wenn man von der nach dem JOULE'schen Gesetze entwickelten Wärme absieht, ein sehr schwacher Strom ohne Wärmeentwickelung durch die Berührungsstelle geleitet werden kann. Es ist nämlich dann

$$de(E_{1\cdot 2} - V_{2\cdot 1}) = 0.$$

Anders gestalten sich die Verhältnisse, sobald man mit einem elektrischen Strom von messbarer Stärke arbeitet. Alsdann trifft die Bedingung des Gleichgewichtes nicht mehr zu. Während nämlich die elektromotorische Kraft, die ja bei constanter Temperatur nur von der materiellen Verschiedenheit herrührt, unverändert bleibt, ändert sich der Potentialunterschied zwischen den beiden Seiten der Berührungsfläche. Ohne diese Aenderung

wäre ein Strom unmöglich. Während die positive Elektricität vom Zink zum Kupfer strömt, tritt an Stelle von $V_{2.1}$ ein grösserer Werth $V_{2.1} + \triangle V$, im anderen Falle ein kleinerer: $V_{2.1} - \triangle V$. Die an der Berührungsstelle entwickelte oder verbrauchte Wärme entspricht, sofern noch kein Temperaturunterschied vorhanden ist, sofern also der THOMSON-Effect noch nicht zur Geltung kommt, jener Abweichung $\triangle V$, ist also kein Maass der Potentialdifferenz $V_{2.1}$.

Der soeben entwickelte Zusammenhang folgt so unmittelbar aus dem Wesen des Gleichgewichtszustandes, dass eine eingehende Begründung ganz überflüssig erscheinen müsste, wenn nicht die gegentheilige Auffassung, nach der die PELTIER-Wärme als Maass der Potentialdifferenz zu betrachten wäre, in der Wissenschaft Eingang gefunden hätte. In Anbetracht dieses Umstandes möge noch ein mechanisches Analogon erwähnt werden. Ein solches findet sich in einem Gewicht, welches auf einer Federwage hängt. Das Gewicht resp. dessen potentielle Energie entspricht der von der materiellen Verschiedenheit herrührenden elektromotorischen Kraft ($E_{1.2}$), während die Spannung der Feder die Potentialdifferenz darstellt. Im Gleichgewichtszustande kann man das Gewicht mit Leichtigkeit heben oder senken und man hat dabei, abgesehen von der mitgetheilten lebendigen Kraft keine andere Energie aufzuwenden, als welche der Veränderung der Federspannung entspricht, während sowohl das Heben des Gewichtes allein, wie auch die Verlängerung der Feder bei abgenommenem Gewichte eine namhafte Arbeit bedingt.

Die Frage, ob der Strom an der Berührungsstelle Wärme erzeugt oder verbraucht, dürfte mit den folgenden Umständen zusammenhängen. Während der Strom vom Zink gegen das Kupfer gerichtet ist, dürfte der Abweichung $\triangle V$ vom Gleichgewichts-Potentialsprung $V_{2.1}$ Wärmeentwickelung entsprechen, da der Strom die Potentialdifferenz herabmindert, da also elektrische Energie verschwindet. Bei der entgegengesetzten Strömung wäre Abkühlung zu erwarten, da in diesem Falle die Wirkung der materiellen Verschiedenheit überwiegt, welche, so wie im ersten Augenblicke der Berührung, die Potentialdifferenz vergrössert, also elektrische Energie produciert. Die verbrauchte

Wärme würde in den Fällen, in denen Elektricität vom negativen Metall zum positiven strömt, das Aequivalent der entstehenden elektrischen Energie bilden, sowohl im ersten Augenblicke der Berührung, wie auch während des dauernden elektrischen Stromes, wobei im letzteren Falle der Wärmeverbrauch nur der mit $\triangle V$ bezeichneten Grösse entspricht.

Nun ist aber $\triangle V$ voraussichtlich klein, wegen der geringen Dicke und dem daraus folgenden geringen Widerstande der die Berührung vermittelnden Uebergangsschichte; es ist daher möglich, dass der folgende Umstand überwiegt. Die nach dem Joule'schen Gesetz in den homogenen Leitern entwickelte Wärme erhitzt dieselben im Allgemeinen in verschiedenem Grade, die Wärme wird also an den Berührungsstellen vom wärmeren Metall zum kälteren überströmen. Diese Wärmeleitung wird aber durch den THOMSON-Effect in der Weise modificiert, dass der Uebertritt der Wärme an der einen Berührungsstelle erleichtert, an der anderen erschwert wird; jene wird also mehr abgekühlt als diese. Zu diesen Einflüssen gesellt sich noch die mechanische Spannung, welche zwischen verschieden warmen Teilen des Körpers in Folge der Dilatation auftritt, und welche bekanntlich zu thermoelektrischen Erscheinungen Veranlassung geben können, so dass die Frage, ob Erwärmung oder Abkühlung zu erwarten ist, sehr compliciert wird.

Aus dem Gesagten folgt, dass die mit dem PELTIER-Effect verknüpften Wärmemengen zur Ermittelung der Potentialdifferenz sich berührender Metalle ungeeignet sind. Wir sind daher auf die elektromotorische Methode angewiesen. Gegen diese wurden aber ebenfalls gewichtige Bedenken erhoben. OSTWALD* sagt darüber, dass diese an Stelle der wirklichen Potentialdifferenz $Zn \mid Cu$ die Summe dreier Differenzen liefert, z. B. im Falle von Kupfer und Zink in Luft:

$$Cu \mid \text{Luft} + \text{Luft} \mid Zn + Zn \mid Cu.$$

Zur Begründung der Ansicht, dass die Potentialdifferenz Metall | Luft nicht vernachlässigt werden dürfe, beruft sich OSTWALD auf Versuche von BROWN, nach denen unter anderem die Potential-

* Lehrb. d. allg. Chemie II. 477—481. 1887.

differenz Kupfer | Eisen bei Gegenwart von Schwefelwasserstoffgas sogar ihr Vorzeichen ändert.

Wäre diese Auffassung richtig, so wüssten wir über die Potentialdifferenz der Metalle eigentlich gar nichts bestimmtes; dies ist aber entschieden nicht der Fall.

Wir überblicken die Verhältnisse am einfachsten bei dem Versuche von W. THOMSON (Lord KELVIN), bei welchem die Elektrometernadel über einem Metallringe schwebt, dessen eine Hälfte aus Kupfer, die andere aus Zink besteht. Nach der Auffassung des Herrn OSTWALD, die ich sinngetreu wiederzugeben glaube, wäre dieses System einem galvanischen Elemente vergleichbar, dessen Pole Kupfer und Zink, dessen Elektrolyt die Luft wäre. Nun überblickt man aber sofort, dass in diesem Elemente ein Elektrolyt von ungeheuerem elektrischen Widerstande thätig wäre, und dass die Pole überdies noch kurz geschlossen wären. Es könnte also von der durch die Luft verursachten Potentialdifferenz auf den Metallen nur ausserordentlich wenig, practisch nichts zu Tage treten. Die von der Berührung mit der Luft herstammende elektrische Differenz könnte nur dann beobachtet werden, wenn die Metalle von einander getrennt wären, und wenn überdies die zur Erreichung des Gleichgewichtszustandes erforderliche Zeit zur Verfügung stände. Es bliebe nur noch die Möglichkeit, dass in der Luft selbst ein die Elektrometernadel ablenkendes Potentialgefälle auftreten würde. Dieses ist aber ebenfalls ausgeschlossen, da ein merkliches Potentialgefälle eine endliche Stromstärke voraussetzen würde, die mit dem grossen Widerstande der Luft unvereinbar ist.

Das umgebende *isolierende* Medium kann also die Potentialdifferenz sich berührender Metalle unmittelbar nicht beeinflussen, es kann nur mittelbar durch die Bildung einer *leitenden* Oberflächenschicht stören. Man könnte sogar die Metalle in eine gut isolierende Flüssigkeit geben und könnte dann die Reinigung der Oberfläche in dieser Flüssigkeit selbst besorgen.

In Betreff der Versuche des Herrn BROWN, nach denen die Potentialdifferenz zwischen Eisen und Kupfer in Luft bei Gegenwart von Schwefelwasserstoff nicht nur veränderlich ist, sondern sogar das Vorzeichen ändert, bin ich der Meinung, dass dieselben

in Bezug auf die Potentialdifferenz der Metalle unbrauchbar sind. BROWN benutzte nämlich Wasser zur Dämpfung der Elektrometernadel, das Schwefelwasserstoffgas wirkte also auf die Metalle bei Gegenwart von Wasserdampf, selbst dann, wenn es vorher trocken gewesen wäre, was übrigens nicht erwähnt ist. Dass die Metalle dabei angegriffen wurden, wie von vornherein zu erwarten war, geht aus der Aeusserung des Herrn BROWN hervor: „the copper having become covered with sulfide".*

Die Bestimmung der Potentialdifferenz der Metalle ist bekanntlich eine heikle Aufgabe, da eine jede die Elektricität leitende Oberflächenschichte Fehler verursacht. Daher könnte man den Einfluss der Gase nur in vollkommen trockenen Räumen feststellen, in welchem Falle chemische Veränderungen wahrscheinlich wenig stören würden. Man berufe sich nicht darauf, dass Oxyde, Sulfide etc. Isolatoren wären, denn bei so geringer Schichtendicke, wie sie im ersten Stadium des Angriffes auftreten, auf welche oft nur aus der Veränderung im elektrischen Verhalten geschlossen werden kann, erweisen sich auch unsere besten Isolatoren als genügend gute Leiter, sobald es sich in der zu den Versuchen erforderlichen Zeit um den Transport der bei den elektrostatischen Versuchen auftretenden geringen Elektricitätsmengen handelt.

Aus alledem folgt, dass einestheils die beim PELTIER-Effect auftretenden Wärmemengen zur Bestimmung der Potentialdifferenz sich berührender Metalle unbrauchbar sind und dass andererseits die gegen das Wesen der elektrometrischen Bestimmungsmethode jener Differenz erhobenen Einwendungen unhaltbar sind. Da demnach die Resultate der letzteren Methode ihre Geltung bewahren, so ist ferner zu schliessen, dass die Berührungsstellen der Leiter erster Ordnung einen wesentlichen Einfluss auf die elektromotorische Kraft der elektrischen Elemente ausüben.

Budapest, den 20. Mai 1901.

---

* Phil. Mag (5) 7. 109. 1879.

2.

WIRKUNG DER MAGNETISIERUNG AUF DEN DEHNUNGSMODUL.

Vorgelegt der ungarischen Academie der Wissenschaften am 22. Jan. 1900.

Von Dr. KARL TANGL.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö" (Math. und Naturwiss. Anzeiger) pag. 49—77.

Einleitung.

Mit der Wirkung des magnetischen Feldes auf die physikalischen Konstanten der Körper beschäftigten sich viele Untersuchungen. Aus diesen ist es bekannt, dass das magnetische Feld unter anderen auch die mechanischen Konstanten beeinflusst; so kennen wir den Einfluss der Magnetisierung auf die Torsion (G. WIEDEMANN), die Längenänderung durch Magnetisierung (BIDWELL u. a.). Es ist aber vorauszusehen, dass die Magnetisierung auch andere mechanische Wirkungen hervorbringt, dass sie z. B. im Torsionsmodul, Dehnungsmodul, in der Festigkeit, in der inneren Reibung Aenderungen bewirkt. Was insbesondere den Dehnungsmodul betrifft, führten die bisherigen Experimente auf widersprechende Resultate. Während nämlich WERTHEIM* und TOMLINSON** gar keine Wirkung auf den Dehnungsmodul nachweisen konnten, fanden BYRON B. BRACKETT***, dass die Magnetisierung den Dehnungsmodul vergrössert, SHAKESPEAR†

* Ann. de Chim. et de Phys. 3. XII. 1842 und XXII. 1848.

** Phil. Trans. 179. p. 1—26.

*** Phys. Review 5. p. 257—284; Wied. Beibl. 20.

† Phil. Mag. 47. p. 539—556. Wied. Beibl. 23.

dagegen, dass sie ihn verkleinert. Es schien mir lohnend, die Frage von neuem zu untersuchen. Einer Aufforderung von Prof. Br. R. Eötvös entsprechend unternahm ich dieselbe bereitwilligst, umsomehr, da mir ein Apparat zu Verfügung stand, der zur genannten Untersuchung sehr geeignet war.

Zur Messung verwendete ich dünne Drähte von etwa 0,1 mm Durchmesser.

Der Grundgedanke der angewandten Methode ist folgender: Wird der zu untersuchende Draht bei konstanter Spannung magnetisiert, so verändert er seine Länge; wird er so magnetisiert, dass seine Länge konstant bleibt, so ändert sich seine Spannung. Mit dem zu beschreibenden Instrumente war ich im Stande, sowohl die Längen- als auch die Spannungsänderungen zu messen; da das Verhältniss der beiden Aenderungen dem Dehnungsmodul proportional ist, konnte man entscheiden, ob sich der Modul durch die Magnetisierung ändert oder nicht, und wie er sich ändert. Die Methode liefert keinen Werth des Moduls in unmagnetisiertem Zustande, mittels derselben konnte man nur die Frage entscheiden: wie ändert sich der Modul, wenn man die Magnetisierung ändert.

Das Instrument, mit dem die Messungen ausgeführt wurden, dient seit dem Jahre 1895 im physikalischen Institute der Universität zu verschiedenen Messungen, und wurde stets für sehr verwendbar befunden.

Der erste Theil der Abhandlung enthält die Beschreibung des Instrumentes, der zweite Theil die Resultate der ausgeführten Messungen.

I. Theil.

1. Die Messung vertikaler Kräfte mit der Bifilarsuspension.

1. Wird die Bifilarsuspension aus der Ruhelage abgelenkt, so entsteht ein Drehungsmoment, das die Suspension in die Ruhelage zurückzuführen strebt. Dieses Drehungsmoment wird durch die Schwerkraft hervorgerufen. Die Bifilarsuspension dient gewöhnlich zur Messung horizontaler Kräfte; doch liegt es nahe, dieselbe zur Messung vertikaler Kräfte zu verwenden, da doch das Drehungsmoment durch eine vertikale Kraft hervorgerufen wird.

Zur Messung vertikaler Kräfte könnte man ein dynamisches Verfahren anwenden; wenn nämlich auf die Bifilarsuspension ausser der Schwerkraft noch eine andere vertikale Kraft wirkt, so wird ihre Schwingungsdauer verändert; aus dieser Aenderung könnte man dann auf die Grösse der hinzugetretenen Kraft schliessen.

Man kann aber auch statisch verfahren. Man braucht dazu nur die Suspension durch eine konstante Kraft ablenken. Man hängt z. B. einen horizontalen Magneten daran auf, dann wird die Suspension durch die erdmagnetische Kraft abgelenkt. In der abgelenkten Gleichgewichtslage ist das Drehungsmoment der Suspension entgegengesetzt gleich derjenigen des Magneten. Wenn jetzt eine neue vertikale Kraft hinzutritt, so wird dadurch das Moment der Suspension geändert, das erdmagnetische Moment dagegen nicht; die Suspension nimmt daher eine neue Gleichgewichtslage an, sie wird aus der früheren Lage abgelenkt. Diese Ablenkung ist in erster Annäherung der hinzugetretenen Kraft proportional, kann also die Grösse letzterer messen. In dieser Anordnung verwendete Br. R. Eötvös den Apparat im Jahre 1895 zu einigen Untersuchungen.

2. Die erdmagnetische Kraft kann natürlich durch eine andere, z. B. elastische ersetzt werden. Man kann dabei folgendermaassen verfahren: an das untere Ende der Bifilarsuspension wird ein einfacher Draht befestigt; letzterer trägt an seinem unteren Ende einen horizontalen Stab, dessen Bewegung durch einen fixen Stift gehemmt wird, an welchen der Stab anschlägt. Der Stab kann sich demnach auf und ab bewegen, um den Draht als Axe kann er jedoch keine Drehung ausführen. Wird nun die Bifilare oben tordiert, so wird dadurch der untere einfache Draht auch gedrillt, da doch dessen unteres Ende keine Drehung ausführen kann. In der Gleichgewichtslage werden also sowohl die Bifilare als auch der einfache Draht tordiert sein: die beiden entstehenden Drehungsmomente sind einander entgegengesetzt gleich.

Wenn die bifilare Suspension um den Winkel φ gedreht wird, so entsteht ein Drehungsmoment, das $= \varkappa \sin \varphi$ ist, wo bekanntlich $\varkappa = \frac{a^2}{4l} mg$, ($a$ = Entfernung der beiden Fäden, l ihre

Länge, m die daran hängende Masse, g die Beschleunigung der Schwere). Wird der elastische Draht um den Winkel ψ gedrillt, so entsteht ein Drehungsmoment $= \tau\psi$.

Wird also die bifilare Suspension und der untere elastische Draht in der oben beschriebenen Weise gedrillt, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes:

$$\varkappa \sin\varphi + \tau\psi = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nun wollen wir die Empfindlichkeit des Instrumentes untersuchen, das heisst wir fragen, um wieviel es aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage abgelenkt wird, wenn sich $\varkappa$ mit $\delta\varkappa$ verändert, wenn also eine neue vertikale Kraft zum aufgehängten Gewicht hinzutritt, wenn man z. B. ein kleines Gewicht darauflegt. Der entsprechende Ausschlag sei $\delta\varphi$, so ist

$$\sin\varphi\,\delta\varkappa + \varkappa\cos\varphi\,\delta\varphi + \tau\,\delta\varphi = 0,$$

da ja augenscheinlich $\delta\varphi = \delta\psi$ ist. Daraus wird.

$$\delta\varphi = \frac{\sin\varphi}{\frac{\tau}{\varkappa} + \cos\varphi} \cdot \frac{\delta\varkappa}{\varkappa}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3. Will man eine grosse Empfindlichkeit, das ist will man, dass einem kleinem $\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}$ ein grosses $\delta\varphi$ entspreche, so hat man den Nenner in (2) möglichst klein zu machen. Man muss vor allem einen solchen Draht wählen, dass $\frac{\tau}{\varkappa} < 1$ sei. Wird dann die Bifilare so weit gedreht, dass

$$\frac{\tau}{\varkappa} + \cos\varphi = 0,$$

so ist die Empfindlichkeit unendlich gross, das Instrument ist labil. In der labilen Lage ist der Apparat natürlich unbrauchbar; er ist nur in dessen Nähe zu gebrauchen. Der Apparat wird jedoch nur dann gut verwendbar sein, wenn er ziemlich weit von der labilen Lage noch eine grosse Empfindlichkeit besitzt.

Letztere Bedingungen erfüllt nun der Apparat in sehr unvollständiger Weise. Soll der Apparat empfindlich sein, so muss man wenigstens so viel verlangen, dass 1 Milligramm einen Ausschlag von 1 Minute gebe. Setzen wir die ganze Belastung der Bifilare $= 40$ gr (bei meinen Versuchen war die Belastung bald

grösser, bald kleiner); in diesem Falle ist $\frac{\delta \varkappa}{\varkappa} = \frac{1}{40000}$; da 1 Minute nahe gleich 0,0003 ist, so müsste in (2) der Faktor von $\frac{\delta \varkappa}{\varkappa}$ ungefähr gleich 12 sein, damit ein Milligramm einen Ausschlag von 1 Minute gebe.

Es sei nun $\frac{\tau}{\varkappa} = 0{,}1$; weniger kann man kaum annehmen, sonst müsste man den elastischen Draht zu sehr drillen, was in Folge der elastischen Nachwirkung die Sicherheit der Angaben beeinträchtigen würde. Das Instrument wird in diesem Falle bei $\varphi = 95^0\ 45'$ labil: bei $\varphi = 90^0$ ist es aber noch nicht empfindlich genug, da der Faktor von $\frac{\delta \varkappa}{\varkappa}$ nur $= 10$ ist. Ist $\frac{\tau}{\varkappa} = 0{,}5$, so wird das Instrument bei $\varphi = 120^0$ labil; bei $\varphi = 115^0$ ist der Faktor von $\frac{\delta \varkappa}{\varkappa}$ gleich 11. Wenn $0{,}5 < \frac{\tau}{\varkappa} < 1$, stehen die Verhältnisse noch ungünstiger.

Daraus ist ersichtlich, dass der Apparat nur sehr nahe zur labilen Lage die genügende Empfindlichkeit erreicht, was einen bedeutenden Nachtheil bildet. Jedenfalls gewinnt der Apparat sehr an Brauchbarkeit, wenn man denselben so modificieren kann, dass er die erforderliche Genauigkeit besitze, ohne der labilen Lage so nahe zu kommen.

Ist $\frac{\tau}{\varkappa} > 1$, so wird der Apparat zwar nie labil, er erreicht aber auch nicht die erforderliche Empfindlichkeit.

2. Modificierte Form der bifilaren Aufhängung.

4. Indem ich die Form der bifilaren Aufhängung etwas abänderte, befreite ich dieselbe von den im vorigen Kapitel besprochenen Nachtheilen. An beide Fäden der bifilaren Aufhängung — gewöhnlich verwendete ich Platindrähte — löthete ich kleine 0,5 mm dicke horizontale Stäbe, so dass die Aufhängung wie eine kleine Leiter aussah (1. Fig. AB); eine sehr oft gebrauchte Aufhängung hatte z. B. eine Länge von 60 cm; daran waren in je 2 cm Entfernung die Stäbchen gelöthet, so dass die ganze Aufhängung in 30 gleiche Theile getheilt war; die Entfernung

der beiden Fäden betrug 5 mm. Diese Aufhängung konnte mit einigen ganzen Revolutionen gedrillt werden, ohne dass sich die Fäden aufeinander wickelten. Wir werden sehen, dass eben dadurch eine grössere Empfindlichkeit erzielt werden konnte.

Wir suchen die Empfindlichkeit der neuen Anordnung. An das untere Ende der Aufhängung wird ein elastischer Draht befestigt, der unten einen horizontalen Stab in der schon früher beschriebenen Weise trägt. Die genannten Stäbchen sollen die Aufhängung in n gleiche Theile theilen; die Länge der ganzen bifilaren Aufhängung sei l, ferner sei so wie früher $\varkappa = \frac{a^2}{4l} mg$. Wird die ganze Aufhängung um den Winkel φ gedrillt, so ist jeder Theil zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stäbchen um $\frac{\varphi}{n}$ gedrillt, dessen Drehungsmoment also $= n\varkappa \sin\frac{\varphi}{n}$; da das Drehungsmoment eines jeden Theiles gleich dem der ganzen Aufhängung ist, giebt obiger Ausdruck zugleich das Drehungsmoment der ganzen bifilaren Aufhängung; ist der untere elastische Draht inzwischen um ψ gedrillt worden, so ist die Gleichgewichtsbedingung:

$$n\varkappa \sin\frac{\varphi}{n} + \tau\psi = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für die Empfindlichkeit findet man daraus, wie früher

$$\delta\varphi = \frac{n \sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\tau}{\varkappa} + \cos\frac{\varphi}{n}} \cdot \frac{\delta\varkappa}{\varkappa} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

5. Der Apparat wird in der neuen Form labil, wenn

$$\cos\frac{\varphi}{n} + \frac{\tau}{\varkappa} = 0,$$

das heisst wenn der n-te Theil so weit gedrillt ist, wie früher die ganze Aufhängung; oder man muss die ganze Aufhängung um einen n-mal grösseren Winkel drehen, damit sie labil werde. Dieselbe wird aber schon bei viel kleinerer Drillung empfindlich genug; es sei wieder $\frac{\tau}{\varkappa} = 0{,}1$; das Gleichgewicht wird labil bei $\frac{\varphi}{n} = 95^0$; nimmt man die genannte 30theilige Aufhängung, wird

sie 4mal ganz umgedreht, dann ist

$$\frac{\varphi}{n} = 48^0 \quad \text{und} \quad \delta\varphi = 29\,\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Ist

$$\frac{\tau}{\varkappa} = 0{,}5 \quad \text{und} \quad \frac{\varphi}{n} = 48^0,$$

so ist

$$\delta\varphi = 17\,\frac{\delta\varkappa}{\varkappa};$$

ist

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi}{n} = 48^0,$$

so wird

$$\delta\varphi = 16\,\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Der Apparat ist also empfindlicher, als wir gewünscht haben und ist doch noch weit entfernt von der labilen Lage.

6. Damit der Apparat zu Messungen gut brauchbar sei, muss man noch verlangen, dass er mit Sicherheit und immer gleichmässig funktioniere, dass dieselbe Kraft immer denselben Ausschlag gebe. Bevor ich diesbezüglich einige Beobachtungen mittheile, wird es angezeigt sein, einiges über die Einrichtung des Apparates zu sagen. (Fig. 1, von A bis D.)

Die Aufhängung war in einem vertikalen Rohre angebracht, das an einen kleinen Kasten befestigt war. Das obere Ende der Aufhängung A, war mit einem Torsionskopf fest verbunden; das untere Ende trug einen horizontalen Stab C, mit verschiebbaren Gewichten zur Regulierung der Schwingungsdauer; eben daselbst war auch ein kleiner Spiegel T befestigt zur Messung des Ausschlages. An den Stab C war der elastische Draht CD gelöthet, dessen unteres Ende den horizontalen Stab K trug. Wird der Torsionskopf gedreht, so muss man dafür sorgen, dass das untere Ende des Drahtes oder der Stab K sich nicht mit drehen könne, sonst könnte ja keine Drillung zu Stande kommen. Dies kann man erreichen, wenn der horizontale Stab an einen fixen Stift anschlägt, so dass seine Drehung in einer Richtung gehemmt ist, ohne dass dessen Bewegung in vertikaler Richtung gehemmt wäre; oder man kann es erreichen, wenn der Stab in eine feine horizontale Schlinge reicht, die an ein festes Stativ gebunden ist

(Fig. 1, horizontaler Durchschnitt). Letztere Art erwies sich als vortheilhafter.

Am unteren Ende des elastischen Drahtes hing ausserdem eine kleine Schale zur Anbringung von kleinen Gewichten. Die Länge einer solchen Aufhängung betrug 60 cm, mit 30 Abstufungen; der untere Draht war auch aus Platin. War die ganze Belastung 40 gr, so war $\frac{\tau}{\varkappa} = 0{,}69$. Zuerst wurde die Empfindlichkeit beobachtet, als die Aufhängung zweimal vollständig umgedreht war, also $\varphi = 2.360^0$ und $\frac{\varphi}{n} = 24^0$ war. Mit diesen Zahlen erhält man aus (4)

$$\delta\varphi = 7{,}6\,\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}.$$

Die Empfindlichkeit wurde so bestimmt, dass ich auf die untere Schale 0,105 gr legte und mit Hilfe von Fernrohr und Skale den Ausschlag des Spiegels beobachtete. Da die Gesammtbelastung 40 gr betrug, also $\frac{\delta\varkappa}{\varkappa} = \frac{0{,}105}{40} = 0{,}00263$, erhält man aus (5)

$$\delta\varphi = 0{,}0200.$$

Die Entfernung der Skale betrug 1975 mm, die Skale war in 2 mm getheilt, also sollte der Theorie nach ein Zulagegewicht von 0,105 gr einen Ausschlag von 39,0 Skalentheilen geben.

Zehn aufeinanderfolgende Versuche gaben für denselben folgende Werthe:

	40,49
	40,47
	40,52
	40,44
	40,54
	40,51
	40,60
	40,57
	40,51
	40,47
Mittel	40,51

rtheilt man der bifilaren Aufhängung drei vollständige hungen, so ist $\varphi = 3.360^0$, $\frac{\varphi}{n} = 36^0$. Nach (4) ist dann isschlag von 61,3 Skalentheilen zu erwarten. Die Beobg lieferte folgende Werthe:

	62,20
	62,26
	62,22
	62,20
	62,27
	62,33
	62,32
	62,27
	62,24
	62,24
Mittel	62,26

t $\varphi = 4.360^0$, $\frac{\varphi}{n} = 48^0$, so sollte der Ausschlag nach (4) 2 sein. Beobachtet wurden folgende Ausschläge:

	83,60
	83,47
	83,35
	83,16
	83,27
	83,51
	83,72
	83,54
	83,58
	83,52
Mittel	83,47

ie Beobachtungen sind mit der Theorie in gutem Einklange; re Sicherheit betrifft, lassen sie nichts zu wünschen übrig, die grösste Abweichung der einzelnen Beobachtungen vom kaum 0,1 Skalentheil beträgt; mit dem Apparat ist also eine Kraft von 0,1 Milligramm messbar, das heisst $\frac{1}{400000}$ nzen auf ihn wirkenden Kraft.

II. Theil.

1. Die magnetische Längenänderung.

1. Mit dem im ersten Theile beschriebenen Apparat konnte man unmittelbar Kräfteänderungen messen; will man mit demselben die magnetische Längenänderung von Drähten bestimmen, so muss man danach trachten, dass die Längenänderung eine Gewichtsänderung bewirke. Das kann man mittels folgender Einrichtung erreichen. An das untere Ende des öfters erwähnten elastischen Drahtes wird der zu untersuchende Draht befestigt (Fig. 1, EF); an diesem hängt ein Glascylinder H, der theilweise in Quecksilber taucht; indem man den Glascylinder mehr oder weniger in das Quecksilber taucht, kann man die Belastung des zu untersuchenden Drahtes beliebig ändern. Wird nun der Draht magnetisiert, so ändert sich seine Länge, nehmen wir an, er verkürzt sich, dadurch hebt sich der Glascylinder etwas aus dem Quecksilber heraus, die Belastung der Aufhängung wächst, also ändert sich deren Gleichgewichtslage. Wird nun das Quecksilberniveau gehoben, so wird die Belastung wieder kleiner; wird das Niveau so weit gehoben, dass die Bifilare in die frühere Gleichgewichtslage wieder zurückkehrt, dass also die Belastung wieder die ursprüngliche wird, so ist das Steigen des Quecksilberniveaus, gerechnet vom Zustande vor der Magnetisierung, gleich der Verkürzung des Drahtes.

Denn wenn die Belastung der Bifilare dieselbe ist wie vor der Magnetisierung, so ist auch deren unteres Ende genau in derselben Höhe wie früher; die Belastung des elastischen Drahtes hat sich auch nicht geändert, sein unteres Ende ist also auch in der ursprünglichen Höhe. Daraus folgt, dass wenn durch Hebung des Quecksilberniveaus die Bifilare in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückgekehrt ist, das obere Ende des magnetisierten Drahtes in derselben Höhe sich befindet wie ursprünglich. Durch die magnetische Contraction ist also nur das untere Ende des magnetischen Drahtes gestiegen und zwar mit ebensoviel, als man das Quecksilberniveau heben musste, damit die Bifilare in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückkehre.

2. Die magnetische Längenänderung ist natürlich sehr klein;

ich beobachtete kaum grössere Aenderungen als 0,02 mm. Mit ebensoviel musste das Quecksilberniveau gehoben werden; dies wurde folgenderweise bewerkstelligt. In das Quecksilber reichte ein vertikaler Glascylinder von 14,35 mm Durchmesser, der mittels einer Mikrometerschraube in vertikaler Richtung verschoben werden konnte. Das Gefäss, in dem das Quecksilber sich befand, hatte einen Durchmesser von 173,5 mm. Wird der kleine Glascylinder gesenkt, so hebt sich das Quecksilberniveau in verkehrtem Verhältnisse der Querschnitte. Bei den gegebenen Dimensionen musste der Glascylinder mit 2,904 mm gesenkt werden, damit sich das Quecksilberniveau mit 0,02 mm hebe. Die Schraubenhöhe des Mikrometers betrug 0,323 mm, die Verschiebung des Glascylinders konnte also mit genügender Genauigkeit gemessen werden.

3. Die Empfindlichkeit des Apparates hängt ab von dessen Belastung. Bei den Versuchen mit Eisendraht betrug dieselbe 75 gr; wurde der Glascylinder mittels der Mikrometerschraube um 1,293 mm verschoben, so gab die Bifilare einen Ausschlag von 29,0 Skalentheilen bei 207,0 cm Skalenabstand. Wenn sich also infolge der Magnetisierung die Gleichgewichtslage um einen Skalentheil verschob, so entsprach dies einer Längenänderung von $\frac{1{,}293}{29{,}0 \times 145{,}2} = 0{,}000307$ mm. Da 0,1 Skalentheil noch gut schätzbar ist, so war noch eine Längenänderung von 0,00003 mm messbar. Diese Empfindlichkeit genügte, da die kleinste zu messende Längenänderung ungefähr 0,004 mm betrug.

2. Die magnetische Spannungsänderung.

4. Kennt man ausser der Längenänderung infolge der Magnetisierung noch jene Spannung, die den Draht auf seine urspüngliche Länge zurückführt, so kann man daraus den Elasticitätsmodul (Dehnungsmodul) des Drahtes berechnen; Länge und Querschnitt des Drahtes müssen bekannt sein. Mit Hilfe der beschriebenen bifilaren Aufhängung kann man auch jene Spannung bestimmen. An das untere Ende des zu untersuchenden Drahtes kommt da nicht der Schwimmer H, sondern der Draht

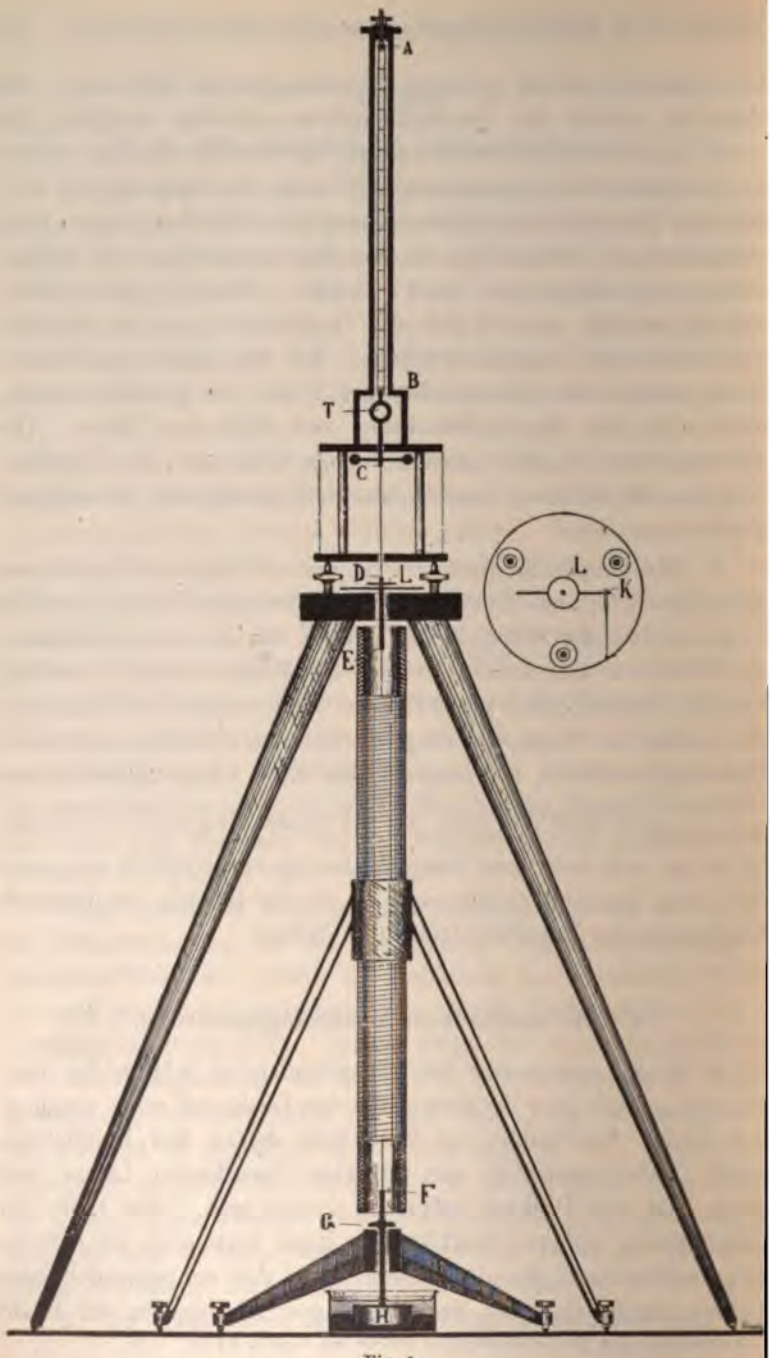


Fig. 1.

wird unten festgeklemmt, damit das untere Ende sich nicht verschieben könne.

Der Draht wird unten so festgeklemmt, dass seine Spannung dieselbe sei wie früher, als noch der Schwimmer an ihm hing. Dann ist auch die Gleichgewichtslage der Aufhängung dieselbe wie früher. Wird nun der Draht magnetisiert und verkürzt er sich, so verschiebt sich sein oberes Ende nach unten, da doch sein unteres Ende fixiert ist, übt auf die Bifilare einen Zug aus, letztere giebt also einen Ausschlag. Man kann nun die ursprüngliche Gleichgewichtslage dadurch herstellen, dass man die Belastung der Bifilare verkleinert, indem man ein entsprechendes Gewichtsstück herunternimmt. Dann ist das untere Ende der bifilaren Aufhängung, also auch das obere Ende des magnetisierten Drahtes in derselben Höhe, wie vor der Magnetisierung. Das weggenommene Gewicht giebt jene Spannung, die den magnetisierten Draht auf seine ursprüngliche Länge zurückführt.

Dieser Gedankengang setzt voraus, dass der elastische Draht zwischen der Bifilare und dem magnetisierten Draht seine Länge nicht geändert, nachdem die ursprüngliche Gleichgewichtslage durch Herabnahme des Gewichts wieder hergestellt wurde. Das kleine Gewicht wird von der Platte L (Fig. 1) weggenommen, die sich unterhalb des elastischen Drahtes DE befand. Ist die ursprüngliche Gleichgewichtslage hergestellt, so sind die Bifilarsuspension und auch der elastische Draht unter derselben Spannung, wie vor der Magnetisierung, also ist Punkt E in derselben Höhe wie früher, und der Draht auf seine ursprüngliche Länge zurückgeführt.

Die gemessenen Spannungsänderungen betrugen einige Gramme, was sehr gut messbar war, da 0,05 gr einen Ausschlag von einem Skalentheil gab.

3. Versuchsanordnung.

5. Die bifilare Aufhängung AB und ein Theil des elastischen Drahtes CD waren in einem Messinggehäuse mit vertikalem Rohr verschlossen. Das vertikale Rohr war mit einem Torsionskopf versehen. Am Boden des Gehäuses war eine kleine Oeffnung zum Durchlassen des elastischen Drahtes. Das Gehäuse stand

auf einem starken Dreigestell und konnte mit Stellschrauben vertikal gestellt werden (Fig. 1).

Der elastische Draht war an einem 1,5 mm dicken vertikalen Messingstab DE befestigt, der eine kleine kreisrunde Platte L trug zum Auflegen von kleinen ringförmigen Gewichten. Ausserdem war an denselben ein horizontaler Stab K gelöthet. Um diesen Stab war eine 6 cm lange horizontale Schlinge aus feinem Coconfaden gebunden, die selbst an das Gestell befestigt war, so dass die Drehung des Stabes in einer Richtung gehemmt war, während er sich dabei auf und ab bewegen konnte. (Siehe Fig. 1, horizontaler Schnitt.) An dem vertikalen Messingstabe war der zu untersuchende Draht EF angelöthet; seine Länge betrug nahe 90 cm. Mit seinem unteren Ende war mittels eines 12 cm langen Messingstabes von 2 mm Durchmesser der schon erwähnte Glascylinder H fest verbunden; letzterer hatte einen Durchmesser von 90,0 mm und eine Höhe von 40 mm. Innen war er mit Blei ausgefüllt, damit er tief genug in das Quecksilber tauche. An den Messingstab war eine horizontale 2 mm dicke Platte G gelöthet zu dem Zwecke, dass sie bei den Versuchen über die magnetische Spannungsänderung auf ein festes Dreigestell aufliege. Bei diesen Versuchen wurde das Dreigestell mittels Stellschrauben so weit gehoben, dass der Glascylinder ungefähr 4 mm gehoben wurde. Da ruhte derselbe mit circa 500 gr auf dem Dreigestell, was genug war, um die Unbeweglichkeit des unteren Drahtendes zu sichern.

Der Ausschlag der bifilaren Aufhängung oder die Drehung des Spiegels wurde mit Skale und Fernrohr gemessen.

6. Die Magnetisierung des Drahtes geschah auf elektromagnetischem Wege. Der Draht war mit einer vertikalen Spule umgeben; dieselbe konnte mit Stellschrauben vertikal gestellt werden. Die Länge der Spule betrug 99,3 cm, die des Drahtes nur 90 cm; die Spule überragte also den Draht an beiden Enden mit 5 cm.

Der Draht der Spule hatte einen Durchmesser von 0,8 mm, derselbe war in vier Lagen auf eine Glasröhre von 62,0 mm Durchmesser gewickelt. Die erste Lage hatte 973, die zweite 974, die dritte 971, die vierte 971 Windungen.

Aus den Dimensionen der Spule konnte die Intensität des magnetischen Feldes in seinem Innern berechnet werden.

Es sei l die Länge der Spule, a der Radius der Windungen, n die Anzahl der Windungen und i die Intensität des Stromes, dann zeigt eine einfache Rechnung, dass in der Axe der Spule in der Entfernung x von der Mitte die Feldstärke

$$H = \frac{2\pi ni}{l}\left[\frac{\frac{l}{2}-x}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}+x\right)^2}}+\frac{\frac{l}{2}+x}{\sqrt{a^2+\left(\frac{l}{2}-x\right)^2}}\right].$$

Bei der benutzten Spule war $l = 99{,}3$ cm, $a = 3{,}28$ cm. In der Mitte der Spule war also die magnetische Kraft $= \frac{4\pi ni}{l} \cdot 0{,}998$. 5 cm vom Ende der Spule, wo auch das Ende des untersuchten Drahtes sich befand, war die magnetische Kraft $= \frac{4\pi ni}{l} \cdot 0{,}918$. Die magnetische Kraft änderte sich also so wenig längs des Drahtes, dass man für die magnetische Kraft ohne Bedenken folgenden Mittelwerth nehmen konnte:

$$\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{+\lambda} H dx$$

wo 2λ die Länge des Drahtes ist. Der erwähnte Mittelwerth beträgt $\frac{4\pi ni}{l}\,0{,}990$. Dieser Werth ist nur sehr wenig von dem im Mittelpunkte giltigen verschieden, ein Zeichen, dass das magnetische Feld als genügend homogen zu betrachten ist.

Die Spule war so umwickelt, dass die einzelnen Schichten bequem parallel oder in Reihe geschaltet, oder nur einzelne Schichten benutzt werden konnten.

7. Die Intensität des Stromes in den einzelnen Schichten betrug ungefähr 10 Amp. Bei jedem Versuch durchfloss der Strom die Spule ungefähr 5 Sec. lang. Dieser Strom erwärmte die Spule beträchtlich. Es musste also ganz besonders darauf geachtet werden, dass sich der magnetisierte Draht nicht erwärme; es würde daraus ein bedeutender Fehler entspringen. Deshalb war längs der Axe der Spule eine 105 cm lange Messingröhre

rungen zu notieren. Die Gleichgewichtslage wurde aus den Umkehrpunkten bestimmt; die Dämpfung war äusserst gering. Vor und nach der Magnetisierung wurde die Gleichgewichtslage bestimmt; die beiden Bestimmungen wichen höchstens mit 0,2 Skalentheilen von einander ab, was innerhalb der Beobachtungsfehler liegt. Danach wurde die Empfindlichkeit des Apparates bestimmt. Die Mikrometerschraube wurde 4- oder 6mal umgedreht und die entsprechende Aenderung der Gleichgewichtslage bestimmt.

Die magnetische Längenänderung wurde aus der Niveauung des Quecksilbers bestimmt; dies setzt voraus, dass die lächenspannung des Quecksilbers constant bleibt. Deshalb en das Quecksilber und der Glascylinder sorgfältig gereinigt, Quecksilber sehr oft gewechselt. Ausserdem erwies es sich hr vortheilhaft, auf das Quecksilber Wasser zu giessen, das ch angesäuert war. Der Glascylinder H tauchte ganz in Wasser unter, so dass nur der Messingstab aus dem Wasser sragte, der den Cylinder mit dem magnetisierten Draht id.

. Nachdem die magnetische Längenänderung bestimmt war, in der Spule nicht Eis genug, um auch die Spannungsngen bestimmen zu können, denn am Drahte wurden raturänderungen bemerkt. Die Spule wurde von neuem llt, der Apparat in der beschriebenen Weise zusammen-t.

ie Empfindlichkeit wurde bei den Spannungsmessungen so mt, dass auf die kreisrunde Platte L ein kleines ringförGewicht möglichst vorsichtig und central gelegt wurde r entsprechende Ausschlag beobachtet.

wohl bei den Längen- als auch bei den Spannungsände- wurde jeder Ausschlag innerhalb einer Beobachtungsreihe l beobachtet. Die beiden Beobachtungen stimmten auf ehntel Skalentheile überein. Die Empfindlichkeit wurde Beobachtungen bestimmt.

e Intensität des Stromes wurde nach Beobachtung der und Spannungsänderungen gemessen.

von 1 cm innerer Weite angebracht (in der Fig. 1 nicht gezeichnet). Diese Röhre umschloss den zu untersuchenden Draht. Der Raum zwischen der Röhre und der Spule war während der Dauer des Versuches mit schmelzendem Eis gefüllt. Diese Eisschicht schützte den Draht sehr gut gegen Erwärmung, wovon ich mich folgendermaassen überzeugen konnte: zwei Schichten der Spule wurden den zwei andern entgegen geschaltet, so dass der Strom kein magnetisches Feld erzeugte. Die Bifilare behielt ihre Gleichgewichtslage, nachdem der Strom 20 Sec. lang geschlossen war. Während den Messungen war aber der Strom nie länger als 5 Sec. geschlossen. Der aus der Erwärmung etwa entstammende Fehler war also eliminiert.

8. Die Intensität des Stromes wurde mit einem absoluten Tangentengalvanometer gemessen. Das Galvanometer wurde mit einem Silbervoltameter verglichen. Die Magnetisierungsspule gab auch einen kleinen Ausschlag am Galvanometer, was immer in Betracht gezogen wurde.

Der Gang der Versuche war folgender: Nachdem die Spule mit Eis angefüllt war, gab ich den zu untersuchenden Draht in die Spule und befestigte ihn an die Bifilare. Bevor der Glascylinder *H* mit dem Drahte verbunden wurde, hing ich an den Draht so viel Gewicht, dass die Belastung die gewünschte war; danach wurde die Gleichgewichtslage der Aufhängung beobachtet. Dann wurde das Gewicht weggenommen und der Glascylinder mit dem Draht verbunden. Das Quecksilberniveau wurde dann so weit gesenkt, bis die Aufhängung in die früher beobachtete Gleichgewichtslage kam. So konnte die magnetische Längenänderung immer bei derselben Belastung untersucht werden.

Die magnetische Längen- und Spannungsänderung wurde bei vier verschiedenen magnetisierenden Kräften beobachtet; der Strom wurde nacheinander in 1, 2, 3, 4 parallel geschaltete Schichten geleitet, dann wieder abwärts gehend in 3, 2 und 1 Schichten. Die Magnetisierung dauerte 5 Secunden, dann wurde der Strom ausgeschaltet. Die magnetische Längenänderung wurde also bei aufwärts und abwärts gehender Kraft beobachtet. Vor der Messung wurde der Draht in der beschriebenen Weise bei auf- und absteigender Kraft magnetisiert, ohne die Längenände-

rungen zu notieren. Die Gleichgewichtslage wurde aus den Umkehrpunkten bestimmt; die Dämpfung war äusserst gering. Vor und nach der Magnetisierung wurde die Gleichgewichtslage bestimmt; die beiden Bestimmungen wichen höchstens mit 0,2 Skalentheilen von einander ab, was innerhalb der Beobachtungsfehler liegt. Danach wurde die Empfindlichkeit des Apparates bestimmt. Die Mikrometerschraube wurde 4- oder 6mal umgedreht und die entsprechende Aenderung der Gleichgewichtslage bestimmt.

Die magnetische Längenänderung wurde aus der Niveauänderung des Quecksilbers bestimmt; dies setzt voraus, dass die Oberflächenspannung des Quecksilbers constant bleibt. Deshalb wurden das Quecksilber und der Glascylinder sorgfältig gereinigt, das Quecksilber sehr oft gewechselt. Ausserdem erwies es sich als sehr vortheilhaft, auf das Quecksilber Wasser zu giessen, das schwach angesäuert war. Der Glascylinder H tauchte ganz in das Wasser unter, so dass nur der Messingstab aus dem Wasser herausragte, der den Cylinder mit dem magnetisierten Draht verband.

9. Nachdem die magnetische Längenänderung bestimmt war, blieb in der Spule nicht Eis genug, um auch die Spannungsänderungen bestimmen zu können, denn am Drahte wurden Temperaturänderungen bemerkt. Die Spule wurde von neuem angefüllt, der Apparat in der beschriebenen Weise zusammengestellt.

Die Empfindlichkeit wurde bei den Spannungsmessungen so bestimmt, dass auf die kreisrunde Platte L ein kleines ringförmiges Gewicht möglichst vorsichtig und central gelegt wurde und der entsprechende Ausschlag beobachtet.

Sowohl bei den Längen- als auch bei den Spannungsänderungen wurde jeder Ausschlag innerhalb einer Beobachtungsreihe zweimal beobachtet. Die beiden Beobachtungen stimmten auf 1–2 Zehntel Skalentheile überein. Die Empfindlichkeit wurde aus 4 Beobachtungen bestimmt.

Die Intensität des Stromes wurde nach Beobachtung der Längen- und Spannungsänderungen gemessen.

4. Beobachtungen.

10. Damit die Resultate auch zuverlässig seien, musste ich mich überzeugen, dass die Ausschläge der bifilaren Aufhängung auch wirklich allein von der Längen- resp. Spannungsänderung des magnetisierten Drahtes bewirkt sind. Ich überzeugte mich, dass auf die einzelnen Theile der Aufhängung keine magnetische Anziehung oder Abstossung ausgeübt wurde. Wurde ceteris paribus an Stelle des Eisen- oder Nickeldrahtes ein Platindraht gebracht, so gab der Apparat nicht den mindesten Ausschlag. Ferner untersuchte ich, ob die Spule auf den magnetisierten Draht selbst keine Anziehung ausübe: anstatt dem Glascylinder wurde an den Draht ein anderes Gewicht ganz frei gehängt, so dass es gar nicht in das Quecksilber reichte. Der Draht wurde magnetisiert; der Apparat rührte sich nicht. Wurde die Spule schief oder excentrisch gestellt, blieb der Ausschlag derselbe wie zuvor.

Bei den Spannungsmessungen wurde die Empfindlichkeit so bestimmt, dass auf das Plättchen L ein ringförmiges Gewicht — 3,027 gr — gelegt wurde. Ich untersuchte, inwieweit der Ausschlag von der excentrischen Lage des Gewichtes beeinflusst wurde. War das Gewicht um 1 cm excentrisch, änderte sich der Ausschlag mit 1 Skalentheil; der ganze Ausschlag betrug 50 Skalentheile. Wurde also das Gewicht bis auf 1 mm genau centrisch aufgelegt, so war die Empfindlichkeit bis auf $\frac{1}{500}$ genau bestimmt.

Ferner untersuchte ich, ob der Ausschlag mit der hinzutretenden Kraft proportional sei: 3,027 gr gaben 54,8 Skalentheile, 6,649 gr dagegen 120,3 Skalentheile. Das Verhältniss der Gewichte ist 2,197, das der Ausschläge 2,195. Sämmtliche beobachteten Ausschläge blieben unter 130 Skalentheilen; die Ausschläge konnten also mit der Kraft proportional angenommen werden.

11. Sonach ist der Elasticitätsmodul proportional dem Verhältnisse der Ausschläge, die den Längen- resp. Spannungsänderungen entsprechen. Aendert sich dieses Verhältniss mit der Magnetisierung, so ändert sich auch der Elasticitätsmodul.

I. Nickeldraht.

12. Nach der Analyse von Herrn W. GÜLL enthielt der Draht Spuren von Eisen; Kobalt war keines darin.

Länge des Drahtes . . . 900,2 mm
Durchmesser des Drahtes 0,143 mm
Belastung des Drahtes . 100,0 gr.

Die folgende Tabelle enthält die beobachteten Ausschläge: unter l die den Längenänderungen, unter s die den Spannungsänderungen entsprechenden; H bedeutet die Intensität des magnetischen Feldes in abs. elektromagnetischen C. G. S.-Einheiten.

H	158	284	385	465	385	284	158
s	43,5	71,6	87,5	97,3	87,3	71,4	43,2
l	19,3	31,5	38,3	42,3	38,2	31,2	19,3
s	43,8	72,1	87,5	97,4	87,7	71,8	43,4
l	19,5	31,8	38,6	42,7	38,6	31,6	19,4
s	44,1	72,3	88,9	98,3	88,6	71,8	43,3
l	19,5	32,0	38,9	42,9	38,8	31,7	19,6
s	43,9	72,1	88,1	97,8	87,8	71,5	43,2
l	19,4	31,8	38,7	42,8	38,6	31,5	19,1
s	43,3	70,7	86,9	97,1	87,2	70,7	43,0
l	19,4	31,7	38,4	42,6	38,3	31,5	19,2
s	43,0	71,3	87,4	97,1	87,4	71,1	43,1

Die Ausschläge sind in Skalentheilen angegeben; die Skala war in 2 mm getheilt; die Entfernung vom Spiegel betrug 207,0 cm. Die Empfindlichkeit ist in der Tabelle nicht angegeben; die Ausschläge sind alle auf dieselbe Empfindlichkeit reduciert und zwar entspricht bei den Längenänderungen 1 Skalentheil einer Verkürzung von 0,000381 mm, bei den Spannungsänderungen war 1 Skalentheil = 0,05711 gr.

Das Verhältniss aus entsprechenden Ausschlägen von aufeinanderfolgenden Reihen ist dem Elasticitätsmodul proportional. Anstatt dieser Zahl giebt die folgende Tabelle damit proportionale Zahlen, die dabei einen gut definierbaren Sinn haben. Es ist nämlich $0{,}000381\ l$ = der Verkürzung des Drahtes in Millimetern. $\frac{0{,}000\,381}{900{,}2}\ l$ = der relativen Verkürzung des Drahtes; $0{,}05711 \cdot s$ = der Spannungsänderung in Grammen ausgedrückt, sonach giebt

$$\frac{0{,}05711 \times 900{,}2}{0{,}000\,381} \cdot \frac{1}{10^5} \cdot \frac{s}{l} = 1{,}347 \frac{s}{l}$$

die Spannungsänderung in Grammen an, die den Draht um $\frac{1}{100\,000}$ dehnt. Ist diese Zahl p, so ist der Elasticitätsmodul

$$E = \frac{100\,000}{\pi \cdot 0{,}0715^2} p = 6227\, p.$$

Die folgende Tabelle giebt die Werthe von p, berechnet aus den aufeinanderfolgenden Reihen der früheren Tabelle.

H	158	284	385	465	385	284	158
p	3,04	3,06	3,08	3,10	3,08	3,08	3,01
	3,06	3,08	3,08	3,10	3,09	3,10	3,03
	3,03	3,05	3,05	3,07	3,06	3,06	3,01
	3,04	3,06	3,10	3,10	3,09	3,06	3,01
	3,05	3,04	3,08	3,09	3,08	3,05	2,98
	3,03	3,04	3,05	3,07	3,05	3,04	2,97
	3,05	3,05	3,07	3,08	3,07	3,06	3,05
	3,01	2,99	3,02	3,06	3,04	3,02	3,03
	3,01	3,01	3,05	3,07	3,05	3,02	3,02
	3,00	3,03	3,07	3,07	3,07	3,04	3,02

Daraus erhält man folgende Mittelwerthe von p und dem Elasticitätsmodul E

H	p	E
158	3,030	18850
284	3,040	18950
385	3,065	19100
465	3,080	19200
385	3,070	19100
284	3,055	19000
158	3,015	18750

Es dürfte vielleicht von Interesse sein, die Mittelwerthe der Verkürzungen anzugeben. Folgende Tabelle giebt die magnetischen Contractionen in zehntausendstel Millimetern eines 1000 mm langen Nickeldrahtes.

H	m
158	82
284	135
385	164
465	181
385	163
284	134
158	82

II. Nickeldraht.

Der Draht war von derselben Rolle wie der frühere.

Länge des Drahtes . . 901,5 mm
Durchmesser des Drahtes 0,148 mm
Belastung des Drahtes . 100 gr.

Folgende Tabelle giebt die Ausschläge auf dieselbe Empfindlichkeit reduciert wie früher.

H	158	282	383	471	383	282	158
l	21,1	34,1	41,3	45,1	40,8	33,6	20,7
s	48,5	78,7	95,4	105,2	94,7	77,9	47,9
l	20,8	33,7	40,6	44,4	40,4	33,4	20,4
s	48,1	78,1	94,9	104,3	94,1	77,3	47,3
l	20,6	33,4	40,2	44,1	40,0	33,0	20,4
s	48,5	78,6	94,8	105,1	94,7	77,8	47,7
l	20,9	33,7	40,6	44,6	40,5	33,4	20,7
s	48,7	78,9	95,1	104,9	94,7	77,0	47,5
l	20,9	33,7	40,5	44,6	40,2	33,5	20,7
s	48,8	79,2	95,8	105,4	95,0	78,4	48,1
l	20,8	33,7	40,5	44,3	40,3	33,4	20,7

Aus dieser Tabelle ist so wie früher die folgende berechnet, welche den Werth der Belastung angiebt, die den Draht um $\frac{1}{1000}$ dehnt.

H	158	282	383	471	383	282	158
	3,10	3,11	3,13	3,14	3,13	3,12	3,12
	3,14	3,15	3,15	3,19	3,16	3,14	3,16
	3,12	3,12	3,17	3,16	3,14	3,12	3,12
	3,14	3,15	3,18	3,19	3,17	3,16	3,12
p	3,17	3,17	3,18	3,21	3,19	3,18	3,15
	3,13	3,14	3,15	3,17	3,15	3,14	3,10
	3,14	3,15	3,16	3,17	3,15	3,13	3,10
	3,14	3,15	3,16	3,17	3,17	3,12	3,09
	3,15	3,16	3,18	3,18	3,18	3,15	3,13
	3,16	3,17	3,19	3,21	3,18	3,16	3,13

Das Verhältniss der Ausschläge ist nahe dasselbe wie früher die Mittelwerthe von p und des Elasticitätsmoduls giebt die folgende Tabelle.

H	p	E
158	3,140	18500
282	3,145	18550
383	3,165	18650
471	3,180	18700
383	3,160	18600
282	3,145	18500
158	3,125	18400

In der nächstfolgenden Tabelle sind die Verkürzungen eines 1000 mm langen Drahtes in zehntausendstel Millimetern angegeben

H	l
158	83
284	143
385	172
471	188
385	171
284	141
158	87

13. In dem Werthe der Ausschläge sind noch zehntel Skalentheile angegeben; die Umkehrpunkte, aus denen die Gleichgewichtslage berechnet ist, wurden bis auf zehntel Skalentheile berechnet

Der Fehler bei den Umkehrpunkten kann 0,1 Skalentheil betragen. Man muss in Betracht ziehen, dass die Schwingungsdauer sehr klein war — 2,5 Sekunden —, so dass bei grossen Elongationen die Beobachtung ziemlich schwierig war. Der Werth des Ausschlages ergab sich als Differenz von zwei Gleichgewichtslagen, folglich kann der Fehler des Ausschlages 0,2 Skalentheile betragen, bei grossen Elongationen auch 0,3. Bei kleinen Elongationen macht der mögliche Fehler 1 % aus; folglich sind im Werthe des Verhältnisses der Ausschläge Abweichungen vom Mittel bis auf 2 % zu erwarten. Es kann also nicht Wunder nehmen, wenn man in den mitgetheilten Tabellen Abweichungen von dieser Grösse findet. Jede Versuchsreihe zeigt jedoch deutlich, dass der Elasticitätsmodul mit der Magnetisierung wächst und in dieser Hinsicht verhalten sich die beiden Nickeldrähte ganz gleichförmig.

Im Mittelwerthe habe ich um eine Decimale mehr geschrieben, diese jedoch abgerundet. Es ist auffallend, dass bei beiden Drähten der Elasticitätsmodul unter seinen Anfangswerth sinkt, wenn man zur ursprünglichen Magnetisierung zurückkehrt.

Bei der Beobachtung der Ausschläge habe ich keine Spur von einer Nachwirkung wahrgenommen; nach der Magnetisierung nahm die Bifilarsuspension bis auf 1—2 Zehntel Skalentheile dieselbe Gleichgewichtslage an wie vor der Magnetisierung.

Das Resultat der Untersuchung ist folgendes: der Elasticitätsmodul des untersuchten Nickeldrahtes wächst mit der Magnetisierung, und zwar mit 1,5 %, wenn die magnetisierende Kraft von 160 auf 470 C. S. S. wächst.

I. Eisendraht.

14. Der Eisendraht verkürzte sich durch die Magnetisierung. Die Verkürzung ist bedeutend kleiner wie bei Nickel, ungefähr die Hälfte; dem entsprechend sind auch grössere Schwankungen in den einzelnen Beobachtungsreihen zu erwarten. Nach der chemischen Analyse von Herrn V. GÜLL enthielt der Draht weniger als 0,5 % Kohle und Silicium.

Länge des Drahtes . .	902,0 mm
Durchmesser des Drahtes	0,128 mm
Belastung des Drahtes .	75 gr.

Die reducierten Ausschläge waren:

H	159	286	385	473	385	286	159
l	13,7	21,3	25,7	28,1	25,5	21,1	13,1
s	28,0	44,3	53,5	58,9	53,6	44,2	27,8
l	13,6	21,1	25,6	28,2	25,5	21,1	13,3
s	28,6	45,3	54,0	59,2	53,7	44,8	28,1
l	13,8	21,6	26,1	28,8	25,9	21,5	13,6
s	28,7	46,1	55,6	61,0	55,2	45,9	29,1
l	13,7	21,6	25,9	28,6	25.8	21,5	13,5
s	28,5	45,4	54,7	60,3	54,6	45,1	28,2
l	13,5	21,3	25,8	28,2	25,7	21,3	13,4
s	28,2	45,0	53,9	59,1	53,5	44,5	28,2
l	13,5	21,1	25,5	28,3	25,5	21,0	13,3

Der Apparat war jetzt empfindlicher, als früher; 1 Skalentheil entsprach einer Verkürzung von 0,000307 mm; ein Zug von 0,04204 gr gab einen Ausschlag von 1 Skalentheil.

Auf Grund dieser Daten giebt $p = 1{,}236 \cdot \frac{s}{l}$ diejenige Belastung, die den Draht um $\frac{1}{100\,000}$ dehnt.

H	159	286	385	473	385	286	159
p	2,53	2,57	2,57	2,59	2,60	2,59	2,62
	2,55	2,60	2,58	2,57	2,60	2,59	2,58
	2,60	2,65	2,61	2,60	2,60	2,62	2,61
	2,56	2,59	2,56	2,54	2,56	2,58	2,55
	2,57	2,64	2,63	2,62	2,63	2,64	2,65
	2,59	2,64	2,65	2,64	2,65	2,64	2,66
	2,57	2,60	2,61	2,61	2,61	2,59	2,58
	2,58	2,63	2,62	2,64	2,63	2,63	2,60
	2,58	2,61	2,58	2,59	2,59	2,60	2,60
	2,58	2,64	2,61	2,58	2,59	2,62	2,62

Mittelwerthe und Elasticitätsmodul:

H	p	E
159	2,570	20000
286	2,615	20350
385	2,605	20250

H	p	E
473	2,595	20200
385	2,605	20250
286	2,610	20250
159	2,610	20250

Die Verkürzungen eines 1000 mm langen Drahtes in zehntausendstel Millimeter:

H	l
159	46,5
286	72,5
385	88,0
473	96,5
385	87,5
286	72,5
159	45,5

II. Eisendraht.

Aehnlich verhielt sich ein zweiter Eisendraht aus derselben Rolle.

Länge des Drahtes . . 899,0 mm
Durchmesser des Drahtes 0,128 mm
Belastung des Drahtes . . 75,0 gr

$p = 1{,}231 \frac{s}{l}$ giebt die Belastung, die den Draht um $\frac{1}{100\,000}$ dehnt.

Reducierte Ausschläge:

H	159	286	385	473	385	286	159
s	28,7	44,7	53,8	59,4	53,9	45,2	29,1
l	14,3	22,0	26,5	29,2	26,5	22,0	14,1
s	28,3	44,5	53,3	58,5	53,2	44,0	28,0
l	13,7	21,2	25,8	28,5	25,7	21,3	13,7
s	28,4	44,6	53,4	59,1	53,5	44,4	28,6
l	14,4	22,2	26,7	29,2	26,4	22,1	14,1
s	28,1	44,4	53,4	58,6	53,4	44,2	28,0
l	13,8	21,4	26,0	28,3	26,0	21,5	13,6
s	29,0	45,9	54,8	60,0	54,9	45,5	29,0
l	14,0	21,6	25,8	28,4	25,7	21,5	13,8
s	28,4	44,6	53,6	59,2	53,7	44,5	28,4

Die Werthe von p:

H	159	286	385	473	385	286	159
p	2,47	2,50	2,50	2,50	2,50	2,53	2,54
	2,44	2,49	2,48	2,47	2,47	2,46	2,45
	2,54	2,58	2,54	2,53	2,55	2,54	2,52
	2,55	2,59	2,55	2,55	2,56	2,57	2,57
	2,43	2,47	2,46	2,49	2,50	2,47	2,50
	2,40	2,46	2,46	2,47	2,49	2,46	2,45
	2,51	2,55	2,53	2,55	2,53	2,53	2,53
	2,59	2,64	2,60	2,61	2,60	2,61	2,62
	2,55	2,62	2,61	2,60	2,63	2,60	2,59
	2,50	2,54	2,56	2,57	2,57	2,55	2,53

Mittelwerthe und Elasticitätsmoduln:

H	p	E
159	2,495	19400
286	2,545	19800
385	2,530	19650
473	2,535	19700
385	2,540	19750
286	2,535	19700
159	2,530	19650

Die Contraction eines 1000 mm langen Eisendrahtes in zehntausendstel Millimeter:

H	l
159	48,0
286	74,0
385	89,5
473	98,0
385	89,0
286	74,0
159	47,0

15. Das eigenthümliche Verhalten des Eisens erhellt aus jeder Versuchsreihe, obzwar in den einzelnen Reihen grössere Abweichungen vorkommen, als beim Nickeldraht: bei $H = 286$ zeigt der Elasticitätsmodul ein Maximum; bei noch grösseren magnetisierenden Kräften nimmt der Modul etwas ab. Es scheint,

dass grössere Aenderungen nur bei kleineren magnetischen Feldern eintreten. Das Versuchsergebnis ist also: der Modul wächst mit 1,9 %, wenn die Stärke des magnetischen Feldes von 159 auf 286 wächst; dann fällt der Modul mit 0,7 % und schwankt um diesen Werth, wenn der Draht mit abnehmender Kraft magnetisiert wird.

16. Zweck der Untersuchung war, die Aenderungen des Elasticitätsmoduls zu bestimmen; diese konnten aus den Beobachtungsdaten einfach bestimmt werden, ohne den Modul selbst bestimmen zu müssen, obzwar man aus denselben den Werth des Moduls auch bestimmen kann. Die erhaltenen Resultate gewinnen aber gewiss an Zuverlässigkeit, wenn man den Modul in unmagnetischem Zustande auf anderem Wege bestimmt und solche Werthe erhält, die mit den vorher erhaltenen Resultaten in Einklang stehen. Darum bestimmte ich den Modul nach der gewöhnlichen Methode, indem ich die Verlängerung des Drahtes durch ein bekanntes Gewicht mit einem Kathetometer mass.

Vom ersten Nickeldraht konnte ich $^2/_3$ des Ganzen verwenden. Es ergab sich für E der Werth 17660, für den zweiten 18100. Der zweite Werth reiht sich sehr gut in die mitgetheilte Tabelle, der erste dagegen weniger gut. Man muss aber in Betracht ziehen, dass ich zu letzteren Messungen nur einen Theil des Drahtes verwenden konnte; dass der Durchmesser längs des Drahtes Aenderungen von 10 % aufwies. Es ist also sehr gut möglich, dass zu dem kleineren Stück ein anderer mittlerer Durchmesser gehört, als zu dem ganzen.

Der zweite Eisendraht ergab $E = 19230$, was sehr gut in die mitgetheilte Reihe passt. Der erste Eisendraht verknüpfte sich so sehr, dass er zu weiteren Messungen nicht verwendbar war.

17. Aus dem Mitgetheilten ist ersichtlich, dass die Magnetisierung auf den Elasticitätsmodul einen kleinen zwar, aber doch messbaren Einfluss ausübt. WERTHEIM und TOMLINSON haben gefunden, dass die Magnetisierung auf die Tonhöhe longitudinal schwingender Eisenstäbe keinen Einfluss hat, dass also der Elasticitätsmodul unverändert bleibt.

WERTHEIM giebt nicht an, wie gross die magnetisierende Kraft war, möglicherweise war sie zu klein, um eine nachweisbare Wirkung auszuüben.

TOMLINSON verwendete lange Eisenstäbe, welche zu $^2/_5$ von der Magnetisierungsspule umgeben waren. Die Stärke des magnetischen Feldes ist nicht genau angegeben, sie konnte circa 30 C.G.S. betragen haben. Nach meinen Messungen folgt, dass, wenn das magnetische Feld von 0 auf 160 steigt, der Elasticitätsmodul um 1 % wächst. Beträgt die Stärke des Feldes 30 C. G. S., so kann man die Aenderung des Moduls auf 0,2 % setzen; ausserdem war weniger als die Hälfte des Stabes von der Spule umgeben, so dass man bei TOMLINSON's Versuchen die Aenderung des Moduls auf 0,1 % setzen kann. Da die Schwingungszahl mit der Quadratwurzel des Moduls proportional ist, war also bei TOMLINSON's Versuchen eine Aenderung von $^1/_{20}$ % in der Schwingungszahl zu erwarten. TOMLINSON giebt die Schwingungszahl des Stabes nicht an; nach den angegebenen Dimensionen konnte sie circa 900 betragen. Vor der Magnetisierung wurde der Stab mit einem Monochord zusammen gestimmt, nach der vorhergehenden Schätzung hätte der magnetisierte Stab mit dem Monochord jede 2,5 Secunden eine Schwebung geben sollen, wenn die für dünne Drähte erhaltenen Resultate auch auf dickere Stäbe anwendbar sind. Da TOMLINSON keine Schwebungen konstatieren konnte, ist es wahrscheinlich, dass dickere Stäbe sich anders verhalten wie dünne Drähte. Dafür spricht auch das Resultat von BYRON B. BRACKETT, wonach das Elasticitätsmodul von stark magnetisierten Stäben nur um $^1/_2$ % grösser wird. SHAKESPEAR fand, dass der Modul von 0,7 mm dickem Eisendraht mit der Magnetisierung kleiner wird. Seine diesbezüglichen Messungen erwähnt er nur kurz in seiner Abhandlung und fügt hinzu, dass sie nicht zufriedenstellend waren.

WERTHEIM untersuchte die Frage so, dass er die durch eine bestimmte Belastung hervorgerufene Verlängerung maass, und zwar vor und während der Magnetisierung. Er fand, dass der Modul kleiner wird. Bei seinen Versuchen achtete er aber nicht genügend darauf, dass die Temperatur konstant bleibe.

3.

UNTERSUCHUNGEN UEBER DIE MECHANISCHEN WIRKUNGEN DER MAGNETISIERUNG.

Von KARL TANGL.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung am 21. Mai 1900.
Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö". (Math. und Naturw. Anzeiger) Band XVIII, pp. 181—199.

Einleitung.

1. Meine Untersuchungen* über die Wirkung der Magnetisierung auf den Elasticitätsmodul ergaben, dass der Modul von Nickeldrähten mit der Magnetisierung wächst, von Eisendrähten bis zu einem Maximum ansteigt, dann wieder fällt.

WERTHEIM und neuerdings SHAKESPEAR fanden dagegen, dass der Modul von Eisen mit der Magnetisierung abnimmt. Die Verschiedenheit der Resultate kann daher stammen, dass WERTHEIM und SHAKESPEAR ungefähr sechsmal so dicke Drähte untersuchten, als ich verwendete; ausserdem wurde bei ihnen der Draht längere Zeit hindurch magnetisiert. Ueber den Einfluss dieser beiden Factoren geben die bisherigen Versuche keinen Aufschluss. Aus den Abhandlungen ist ferner nicht ersichtlich, wie gross die Belastung der Drähte war. Ich untersuchte daher vor allem den Einfluss der Belastung auf die magnetische Aenderung des Elasticitätsmoduls. Ein Einfluss der Belastung war zu erwarten, da doch die Aenderung des Moduls unmittelbar nicht von der Stärke des magnetischen Feldes, sondern von der

* Math. u. Naturw. Ber. aus Ungarn, XVIII. Band.

Magnetisierung abhängt, die Magnetisierung aber bekanntlich von der Belastung beeinflusst wird (VILLARI'sche kritische Punkt). Die Versuche zeigten denn auch, dass die Wirkung der Magnetisierung auf den Elasticitätsmodul ganz bedeutend von der Belastung abhängt.

I. Methode.

2. Zur Untersuchung der Frage bediente ich mich derselben Methode, wie bei den früheren Versuchen. Der Apparat war aber in der dort beschriebenen Zusammenstellung nicht zu gebrauchen. Damit nämlich der Einfluss der Belastung deutlich hervortrete, war es nothwendig, die Belastung in weiten Grenzen, soweit es die Tragfähigkeit erlaubte, zu ändern: von 100 bis ungefähr 1000 gr. Selbst wenn die Bifilarsuspension solche Belastungen tragen könnte, würde die Empfindlichkeit dadurch so sehr verringert sein, dass der Apparat nicht zu gebrauchen wäre. Die Empfindlichkeit ist nämlich durch folgende Formel gegeben:

$$\delta\varphi = \frac{n \sin \frac{L}{n}}{\frac{\tau}{\varkappa} + \cos \frac{\varphi}{n}} \frac{\delta\varkappa}{\varkappa},$$

wo $\varkappa$ mit der Belastung proportional ist; wenn sich $\varkappa$ mit $\delta\varkappa$ ändert, so ist $\delta\varphi$ der entsprechende Ausschlag. Es ist ersichtlich, dass $\delta\varphi$ mit $\varkappa$ beinahe umgekehrt proportional ist. Die magnetische Contraction des Eisens ist so klein, dass der Apparat bei einer Belastung von 75 gr eben noch gut zu gebrauchen war; bei grösserer Belastung wären aber die Ausschläge zu klein gewesen, um daraus Schlüsse ziehen zu können.

3. Nach einigen Abänderungen am Apparat erreichte ich, dass die Belastung bis zur Festigkeitsgrenze gesteigert werden konnte. Der zu untersuchende Draht wurde unmittelbar an einen Körper befestigt, der in Quecksilber tauchte, dieser letztere dann an die Bifilarsuspension. Der hydrostatische Auftrieb compensierte zum Theil das Gewicht am Drahte, so dass die resultierende Belastung der Bifilarsuspension viel kleiner war; wurden die Dimensionen des untertauchenden Körpers entsprechend gewählt, so konnte die Belastung der Bifilarsuspension beliebig

klein gemacht werden, so dass die Empfindlichkeit grösser war als bei den früheren Versuchen. Ein Vortheil dieser Anordnung bestand darin, dass die Empfindlichkeit bei allen Belastungen des Drahtes dieselbe war. Es wird genügen, wenn ich hier nur diese Aenderungen am Apparat ausführlich beschreibe; die genaue Beschreibung des ganzen Apparates ist in meiner schon vorhin erwähnten Abhandlung enthalten.

Die Bifilarsuspension und der elastische Draht ABD blieben unverändert. Der elastische Draht CD wurde aber nicht unmittelbar an den Messingstab DE gelöthet, an den der magnetisierte Draht befestigt war, sondern es wurde zwischen dem elastischen Draht und dem Messingstab ein Messingrahmen aus 3 mm dickem Draht eingeschaltet (Fig. 1). Wie aus der Figur ersichtlich, war an den Rahmen ein leerer Glascylinder U befestigt, oben verschlossen. Dieser Cylinder tauchte ganz in Quecksilber (schraffierter Theil); der Becher P, das Quecksilber enthaltend, war an das Gestell des Apparates befestigt. An den Punkt D des Rahmens wurde der elastische Draht befestigt, an D' dagegen der Messingstab DE, der den zu untersuchenden Draht trug. Wurden die Dimensionen des Cylinders passend gewählt und das nöthige Quantum Quecksilber in denselben gegossen, so konnte man erreichen, dass der hydrostatische Auftrieb den Zug der Belastung des magnetisierten Drahtes zum Theil compensierte, so dass die gesammte auf den Rahmen nach unten wirkende Kraft ca. 40 gr Gewicht betrug. So betrug die Belastung der Bifilarsuspension nur 40 gr, während die Belastung des zu untersuchenden Drahtes beliebig gewählt werden konnte. Der Rahmen wurde sorgfältig verfertigt, damit die beiden Punkte D und D' mit dem

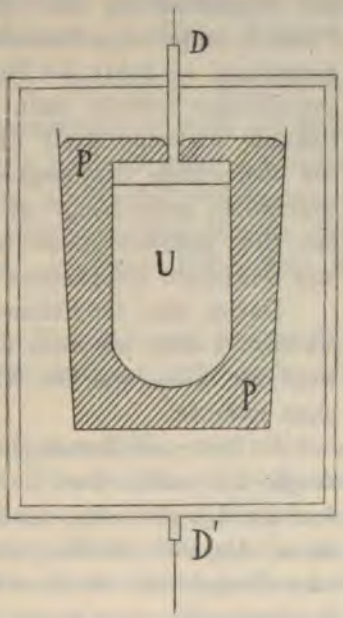


Fig. 1.

Schwerpunkte des verdrängten Quecksilbers möglichst in eine Gerade fallen und so die verticale Stellung des Rahmens gesichert sei. Sonst blieb der Apparat unverändert.

4. Die magnetische Längen- und Spannungsänderung wurde ebenso gemessen wie früher. Der Rahmen ändert nichts an dem Princip der Methode. Wenn sich nämlich der Draht durch die Magnetisierung verkürzt und durch Heben des Quecksilberniveaus die Bifilarsuspension in die ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so ist die Belastung des ganzen Apparates dieselbe wie früher, das untere Ende der Bifilarsuspension, der Rahmen, das obere Ende des magnetisierten Drahtes sind in derselben Höhe wie früher, der Rahmen erleidet keine Deformation, sonach giebt die Verschiebung des Quecksilberniveaus die Verkürzung des Drahtes.

Ist der untersuchte Draht unten befestigt, so wächst infolge der Magnetisierung die Spannung des Drahtes; wird von der Platte L unter dem Rahmen ein entsprechendes Gewicht herabgenommen, so kehrt die Suspension in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück; dann ist die auf die Suspension, auf den Rahmen wirkende Kraft dieselbe wie früher, folglich ist auch das obere Ende des magnetisierten Drahtes in derselben Höhe wie früher, seine Länge ist die ursprüngliche, nur die Spannung hat sich geändert; diese Aenderung wurde durch Herabnahme von Gewichten compensiert.

Davon, dass der Rahmen keinen neuen systematischen Fehler einführt, konnte ich mich am besten so überzeugen, dass ich sowohl für Eisen wie für Nickel dieselben Resultate erhielt wie ohne Rahmen.

5. Bevor die Messungen in Angriff genommen wurden, überzeugte ich mich, dass die Ausschläge der Bifilarsuspension nur von den Längen- resp. Spannungsänderungen, nicht aber von anderen störenden Kräften verursacht wurden. Wurde der Eisen- oder Nickeldraht durch einen Platindraht ersetzt, so gab die Magnetisierung gar keinen Ausschlag. Statt dem unteren Glascylinder wurde ein anderes Gewicht angebracht, das ganz frei an dem zu untersuchenden Draht hing, ohne in das Quecksilber zu tauchen; die Magnetisierung hatte keine sichtbare Wirkung.

Die Intensität des Stromes wurde wie früher mit einem Tangentengalvanometer gemessen.

Im Gange der Versuche geschah keine Veränderung.

II. Beobachtungen.

6. Mit Rücksicht auf die grosse Zahl der Beobachtungen theile ich den Werth der Ausschläge in extenso nicht mit. Es wird genügen, wenn ich bemerke, dass die Ausschläge zwischen 15 und 120 Skalentheilen variierten; ein zehntel Skalentheil ist noch gut schätzbar. Hier interessiert uns in erster Reihe das Verhältniss der Ausschläge, die den Längen- resp. Spannungsänderungen entsprechen; der Elasticitätsmodul ist ja diesem Verhältniss proportional. Die Werthe dieser Verhältnisse, wie sie sich aus den aufeinander folgenden Versuchsreihen ergeben, theile ich ausführlich mit, nur in anderer Form als in der erwähnten Abhandlung. Dort gab ich jene Belastung, die den Draht um $\frac{1}{100000}$ dehnt, dem Verhältniss der Ausschläge proportional. Aus diesen Werthen konnte man entscheiden, wie sich der Modul ändert, bezogen auf den zur kleinsten Magnetisierung gehörenden Modul. Deshalb ist es zweckmässiger, alle Moduls auf denjenigen zu beziehen, der bei der kleinsten Magnetisierung auftritt: letzteren setzen wir daher gleich eins. In dieser Weise sind die folgenden Tabellen verfertigt.

In dieser Form kann man die Resultate am besten überblicken; der gleiche Gang der Beobachtungen tritt auch mehr zu Tage.

Die kleinste Belastung, die ich verwendete, war wiederum 75 gr bei Eisen, 100 gr bei Nickel. So konnte ich mich überzeugen, ob das Einschalten des Rahmens K einen systematischen Fehler einführt. Die grösste Belastung betrug 900 gr, eine noch grössere Belastung wäre bei den Dimensionen der Apparate nicht gut verwendbar gewesen; bei 1550 gr riss der Eisendraht, bei 1300 der Nickeldraht. Um die Wirkung der permanenten Deformation zu sehen, wurden die Drähte auch nach der grössten Belastung bei kleineren Belastungen untersucht.

Damit die elastischen Nachwirkungen möglichst vermieden wurden, wurde der Draht wenigstens einen Tag vorher mit dem Gewichte belastet, bei dem beobachtet wurde. Auch später, solange die Versuchsreihe nicht beendet war, blieb der Draht fortwährend unter derselben Belastung; der Draht wurde nur auf die wenigen Secunden davon befreit, die nöthig waren, um den Draht in die Spule zu geben und mit dem unteren Glascylinder zu verbinden.

I. Eisendraht.

Länge . . . 901,0 mm
Durchmesser 0,13 mm.

8. In den folgenden Tabellen sind die Zahlen unter E proportional dem Verhältnisse der Ausschläge, die den Längen- resp. Spannungsänderungen entsprechen; sie wurden aus den aufeinander folgenden Versuchsreihen gebildet; die Zahlen sind proportional dem Elasticitätsmodul; H bedeutet die Stärke des magnetischen Feldes in elektromagnetischen C.G.S.-Einheiten.

a) Belastung 75 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
E	1,000	1,012	1,007	1,017	1.012	1,002	1,007
	1,000	1,022	1,010	1,003	1,000	0,990	0,995
	1,000	1,015	1,000	1,007	0,999	0,990	0,995
	1,000	1,020	0,998	1,005	1,006	1,008	0,995
	1,000	1,025	1,008	1,010	1,013	1,012	1,029
	1,000	1,020	1,005	1,004	1,000	1,005	1,029
	1,000	1,006	0,994	0,993	0,988	0,995	1,008
	1,000	1,013	1,002	1,000	1,000	1,000	1,014
	1,000	1,005	0,997	0,997	1,000	1,002	1,009
	1,000	1,015	1,000	1,003	1,005	1,012	1,009
Mittel	1,000	1,016	1,002	1,004	1,002	1,002	1,009

b) Belastung 500 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	0,992	1,006	1,002	1,008	1,002	0,998
	1,000	0,987	0,996	0,994	0,995	0,986	0,983
	1,000	0,990	0,993	0,991	0,996	0,987	0,991
	1,000	0,985	0,988	0,993	0,993	0,985	0,987
E	1,000	0,988	0,993	0,993	0,992	0,991	0,995
	1,000	0,989	0,997	0,993	0,992	0,992	0,995
	1,000	0,982	0,995	0,995	0,995	0,995	0,983
	1,000	0,983	0,983	0,995	0,986	0,990	0,981
	1,000	0,989	0,997	1,001	1,000	0,995	0,998
	1,000	0,991	0,998	1,008	1,005	0,992	0,997
Mittel	1,000	0,998	0,995	0,995	0,996	0,992	0,991

c) Belastung 900 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	0,995	1,001	1,013	1,007	1,003	1,011
	1,000	0,999	1,006	1,009	1,007	1,001	1,002
	1,000	1,004	1,007	1,002	1,008	1,006	1,009
	1,000	1,002	1,004	1,002	1,008	1,012	1,013
E	1,000	1,000	1,001	1,003	1,007	1,012	1,002
	1,000	1,007	1,007	1,008	1,010	1,014	1,004
	1,000	1,007	1,013	1,019	1,023	1,017	1,027
	1,000	0,995	0,999	1,008	1,005	0,993	1,017
	1,000	1,000	1,005	1,007	0,999	1,000	1,000
	1,000	1,002	1,010	1,010	1,010	1,007	1,000
Mittel	1,000	1,001	1,004	1,008	1,008	1,007	1,008

Damit die Wirkung der permanenten Deformation hervortrete, wurde der Draht nach der Belastung von 900 gr, von neuem bei 500 gr, hernach bei 75 gr Belastung beobachtet. „Belastung 500 gr'" bedeutet, dass die Beobachtung nach der maximalen Belastung ausgeführt wurde.

d) Belastung 500 gr′

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	1,005	1,006	1,000	0,998	1,000	1,008
	1,000	1,006	1,014	1,003	1,009	1,019	1,027
	1,000	1,005	1,007	1,011	1,004	1,007	1,002
	1,000	1,000	0,998	1,009	0,998	0,983	6,985
E	1,000	0,999	1,005	1,001	1,001	1,001	0,998
	1,000	0,999	1,001	0,993	0,990	0,999	0,993
	1,000	0,997	0,996	0,994	0,998	0,995	0,992
	1,000	0,997	1,004	1,003	1,012	0,997	0,996
	1,000	0,989	1,003	1,004	1,006	1,001	1,006
	1,000	0,999	1,001	1,007	1,008	0,995	1,002
Mittel	1,000	1,000	1,003	1,003	1,002	1,000	1,001

e) Belastung 75 gr′

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	0,996	1,014	1,019	1,003	0,990	0,998
	1,000	0,988	1,003	1,005	0,998	0,981	0,996
	1,000	0,983	0,996	0,995	0,998	0,976	0,997
	1,000	0,995	0,999	1,004	1,002	0,991	0,997
E	1,000	0,992	0,988	0,998	0,992	0,990	0,997
	1,000	0,994	0,989	0,997	0,987	0,984	0,993
	1,000	0,995	0,994	0,999	0,987	0,987	0,990
	1,000	1,000	0,993	0,993	1,006	0,999	1,004
	1,000	1,003	1,001	1,008	1,014	1,003	1,010
	1,000	1,005	1,002	1,012	1,003	1,001	0,096
Mittel	1,000	0,995	0,998	1,003	0,999	0,990	0,998

9. Vergleicht man die erste Tabelle mit den früheren Beobachtungen, so ist die Uebereinstimmung genügend zu nennen; in beiden Fällen zeigt der Modul bei $H = 290$ ein Maximum, bei grösseren Magnetisierungen zeigen die älteren Beobachtungen kleinere Aenderungen. In der folgenden Tabelle sind die älteren Resultate mit den neueren zusammengestellt.

H	Alt		Neu
	1. Draht	2. Draht	
165	1,000	1,000	1,000
293	1,017	1,019	1,016
396	1,013	1,013	1,002
484	1,010	1,015	1,004
396	1,014	1,017	1,002
293	1,015	1,014	1,002
165	1,015	1,013	1,009

Man muss in Betracht ziehen, dass solche Abweichungen von einem Draht zum andern wohl möglich sind; ausserdem war der Apparat jetzt empfindlicher; ferner zeigen die früheren Beobachtungen eben bei $H = 400$ und $H = 460$ die grössten Schwankungen, grössere als bei den jetzigen. Das Maximum bei $H = 293$ tritt bei allen Versuchsreihen scharf hervor, schärfer wie bei den früheren Beobachtungen.

Was die anderen Tabellen betrifft, ist aus ihnen ersichtlich, dass sich das Verhalten des Eisens bei 500 gr Belastung total verändert; das frühere Maximum verschwindet, an seine Stelle tritt ein ausgeprägtes Minimum, das in jeder einzelnen Versuchsreihe hervortritt. Bei 900 gr ist das Verhalten wieder anders geworden, indem der Modul langsam ansteigt. Nach dieser maximalen Belastung hat die Belastung weniger Einfluss auf die Aenderungen des Moduls: bei 500 gr ist eine sanfte Steigung vorhanden, bei 75 gr entwickelt sich ein schwaches Minimum. Daraus kann man schliessen, dass das Verhalten des Eisens hauptsächlich durch die permanente Deformation beeinflusst wird, da nach der grössten Belastung die Aenderungen des Moduls viel weniger von der Belastung abhängen.

10. Mit Rücksicht auf das sonderbare Verhalten des Eisens schien es wünschenswerth, die Untersuchung auch bei dazwischen liegenden Belastungen auszuführen. Es wurde ein anderer Eisendraht auch bei 300 gr und 700 gr Belastung untersucht. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

II. Eisendraht.

Länge . . . . 901,0 mm
Durchmesser . . 0,13 „

H	Belastung				
	75	300	500	700	900
165	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
293	1,019	0,994	0,987	0,994	1,004
396	1,005	0,996	0,997	1,000	1,006
484	0,998	0,996	0,996	1,002	1,011
396	1,004	0,996	0,995	0,995	1,006
293	1,016	0,995	0,994	0,996	1,004
165	1,007	0,981	0,986	0,997	1,004

Mit den Resultaten bezüglich des I. Drahtes verglichen, ist die Uebereinstimmung namentlich bei 500 und 900 gr Belastung ausgezeichnet; bei 75 gr sind grössere Abweichungen vorhanden, sie sind von derselben Ordnung, wie zwischen Draht I und den früheren Beobachtungen.

Grössere Abweichungen sind vorhanden in den Werthen bei absteigender Magnetisierung. Höchst wahrscheinlich hat die Dauer der Magnetisierung, überhaupt die ganze Vorgeschichte der Magnetisierung einen Einfluss auf diese Werthe; darauf, dass die Vorgeschichte bei beiden Drähten möglichst gleich sei, wurde keine besondere Sorgfalt verwendet. Die Differenzen in den Moduln bei auf- und absteigender Magnetisierung machen es wahrscheinlich, dass der Draht erst nach mehrfachen solchen Magnetisierungen einen gewissen Endzustand annimmt. Es wäre angezeigt, die Untersuchung in dieser Richtung fortzusetzen.

Was die Werthe bei 300 und 700 gr Belastung betrifft, fügen sie sich sehr gut in die Reihe; sie zeigen den continuierlichen Uebergang aus einem Zustand in den anderen.

Nach der grössten Belastung konnte ich bei kleineren nicht mehr beobachten, da der Draht inzwischen riss.

Die Resultate sind in Fig. 2 graphisch dargestellt; Abscisse ist die magnetische Intensität, Ordinate die percentuelle Aenderung des Moduls bezogen auf seinen Werth bei $H = 165$; die punktierte Curve entspricht der absteigenden Magnetisierung.

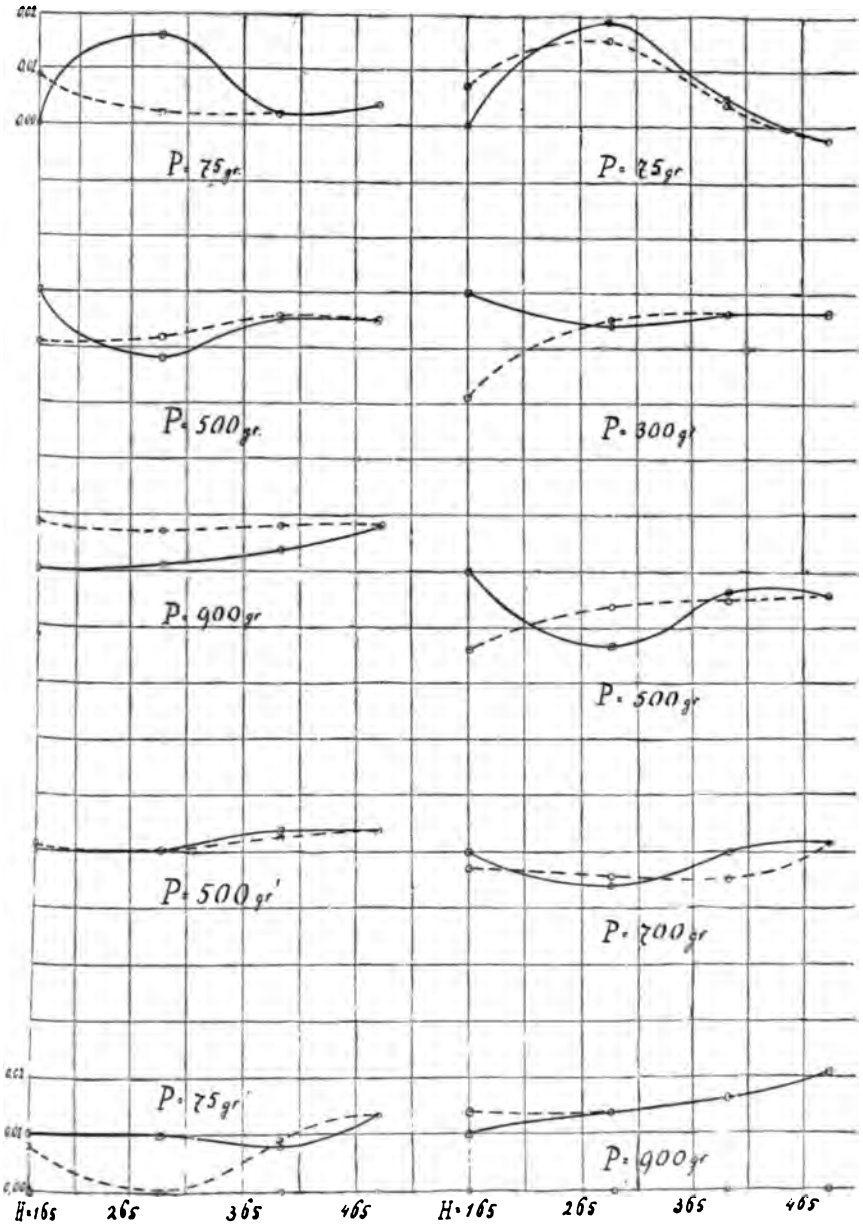

P = 75 gr.
P = 75 gr.
P = 500 gr.
P = 300 gr.
P = 900 gr.
P = 500 gr.
P = 500 gr'
P = 700 gr.
P = 75 gr'
P = 900 gr.
H = 165
265
365
465
H = 165
265
365
465

Fig. 2.

11. Ausser Eisen wurde auch ein Nickeldraht untersucht bei 100, 500 und 900 gr Belastung; bei 1300 gr Belastung riss der Draht. Die Resultate sind in derselben Weise zusammengestellt wie bei Eisen.

Nickeldraht.

Länge . . . . 901,0 mm
Durchmesser . . 0,15 „

a) Belastung 100 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
E	1,000	1,019	1,025	1,032	1,026	1,021	1,046
	1,000	1,010	1,012	1,008	1,012	1,004	1,010
	1,000	1,008	1,010	1,009	1,015	1,016	1,007
	1,000	1,008	1,010	1,015	1,005	0,996	1,014
	1,000	1,008	1,011	1,017	1,003	0,978	1,000
	1,000	1,012	1,025	1,020	1,020	1,006	1,000
	1,000	1,014	1,025	1,025	1,034	1,017	1,007
	1,000	1,010	1,018	1,025	1,033	1,016	1,020
	1,000	1,008	1,010	1,014	1,015	1,015	1,010
	1,000	1,012	1,007	1,008	0,999	1,006	0,990
Mittel	1,000	1,011	1,015	1,017	1,016	1,008	1,010

b) Belastung 500 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
E	1,000	0,995	1,015	1,018	1,025	1,026	1,007
	1,000	1,005	1,015	1,016	1,015	1,012	0,993
	1,000	1,014	1,017	1,017	1,017	1,009	0,997
	1,000	1,003	1,003	0,998	1,004	1,001	0,996
	1,000	1,000	1,002	1,004	1,001	0,992	0,987
	1,000	1,000	0,998	1,006	0,999	0,988	0,987
	1,000	1,004	0,997	1,005	1,000	1,007	1,000
	1,000	1,003	1,008	1,014	1,010	1,011	1,007
	1,000	1,007	1,008	1,008	1,010	1,006	0,996
	1,000	1,017	1,014	1,023	1,015	1,018	1,021
Mittel	1,000	1,005	1,008	1,011	1,010	1,007	0,998

c) Belastung 900 gr

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	0,986	0,996	1,002	0,983	0,995	0,997
	1,000	0,984	1,026	1,023	1,021	1,006	1,017
	1,000	0,995	0,996	1,017	1,010	1,016	1,000
	1,000	0,970	0,956	0,981	0,985	0,990	0,973
E	1,000	0,960	0,962	0,978	0,983	0,998	0,993
	1,000	0,965	1,001	1,010	1,004	1,021	1,021
	1,000	0,968	1,008	1,022	1,009	1,000	1,014
	1,000	0,986	0,992	1,003	0,999	0,995	1,035
	1,000	0,991	0,986	0,985	0,986	0,988	1,018
	1,000	0,967	0,976	0,974	0,962	0,965	0,983
Mittel	1,000	0,977	0,990	1,000	0,994	0,997	1,003

d) Belastung 500 gr′

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	1,003	1,007	0,999	0,999	1,026	1,035
	1,000	1,005	1,000	0,998	1,007	1,029	1,052
	1,000	1,007	1,007	0,999	1,039	1,029	1,052
	1,000	1,005	1,008	0,997	1,018	1,011	1,000
E	1,000	0,993	0,994	0,991	0,990	0,993	0,973
	1,000	0,997	0,995	0,984	0,983	0,985	0,973
	1,000	1,009	1,008	0,985	0,992	0,997	0,980
	1,000	1,003	0,997	0,993	0,995	1,005	0,997
	1,000	1,021	1,003	0,993	0,988	1,026	1,024
	1,000	1,027	1,015	0,998	1,003	1,034	1,028
Mittel	1,000	1,007	1,003	0,994	1,001	1,014	1,011

e) Belastung 100 gr′

H	165	293	396	484	396	293	165
	1,000	0,998	0,995	1,006	1,006	0,998	1,010
	1,000	0,998	1,000	1,011	1,006	1,000	1,004
	1,000	0,994	1,004	1,003	1,006	1,000	1,017
	1,000	0,989	1,002	1,002	0,998	0,998	1,010
E	1,000	0,998	1,002	1,005	1,002	0,998	1,004
	1,000	0,996	1,004	1,009	1,006	1,000	1,000
	1,000	1,000	1,012	1,009	1,002	1,005	0,993
	1,000	0,997	1,008	1,004	1,014	1,002	1,000
	1,000	0,999	1,010	1,000	1,012	1,004	1,009
	1,000	0,993	0,996	1,012	0,998	0,997	1,000
Mittel	1,000	0,996	1,003	1,006	1,005	1,000	1,005

12. Die erste Tabelle ist mit den früheren Beobachtunge in guter Uebereinstimmung, wie die folgende Zusammenstellu zeigt.

H	Alt		Neu
	1. Draht	2. Draht	
165	1,000	1,000	1,000
293	1,004	1,003	1,011
396	1,011	1,008	1,015
484	1,017	1,013	1,017
396	1,013	1,007	1.016
293	1,008	1,005	1,008
165	0,994	0,995	1,010

Der Gang des Moduls ist in jeder Versuchsreihe der gleich grössere Abweichungen treten nur bei absteigender Magnetisieru auf. Es gilt in diesem Fache das gleiche wie beim Eisendra es scheint auch, dass die Aenderungen des Moduls bei Nickel i grösserem Maasse von der Art der Magnetisierung, von der Vo geschichte abhängt, wie bei Eisen. Bei 500 gr Belastung wäch der Modul noch immer mit der Magnetisierung, aber langsame bei 900 gr Belastung entwickelt sich ein stark ausgeprägt Minimum. Wird die Belastung dann kleiner, so ändert sich d Modul wieder anders, bei 500 gr tritt um $H = 293$ ein klein Maximum auf, bei 100 gr an derselben Stelle ein kleines Minimu Fig. 3 stellt die Resultate graphisch dar.

13. Was die Genauigkeit der Resultate anbelangt, so ka man nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung den wah scheinlichen Fehler der einzelnen Werthe suchen. Die Zahl d Beobachtungen ist zwar nicht gross genug, um die Regeln d Fehlerrechnung ohne Bedenken anwenden zu können; immerhi dienen sie zur Schätzung der Genauigkeit und rechtfertigen z gleich, dass die Resultate bis zur dritten Decimalstelle berechn sind. So erhält man, dass bei aufsteigender Magnetisierung d wahrscheinliche Fehler der Mittelwerthe zwischen 0,0010 u 0,0020 schwankt. Grössere wahrscheinliche Fehler treten nur b absteigender Magnetisierung auf; bei Eisen beträgt der grös wahrscheinliche Fehler 0,0040 bei 75 gr Belastung und b

$H = 165$, bei Nickel beträgt er 0,0100 bei 500 gr Belastung und $H = 165$.

14. Will man die Aenderungen des Moduls mit anderen physikalischen Grössen in Verbindung bringen, so kommt in erster Reihe die Intensität der Magnetisierung oder der Magnetisierungscoefficient in Betracht. Eine einfache Beziehung konnte ich aus dem bisherigen Beobachtungsmaterial nicht finden; allerdings müssten dazu die Beobachtungen bedeutend vermehrt werden. Ausserdem müsste für die verwendeten dünnen Drähte die Magnetisierung bei denselben magnetisierenden Kräften und derselben Belastung untersucht werden, wie die Aenderungen des Moduls.

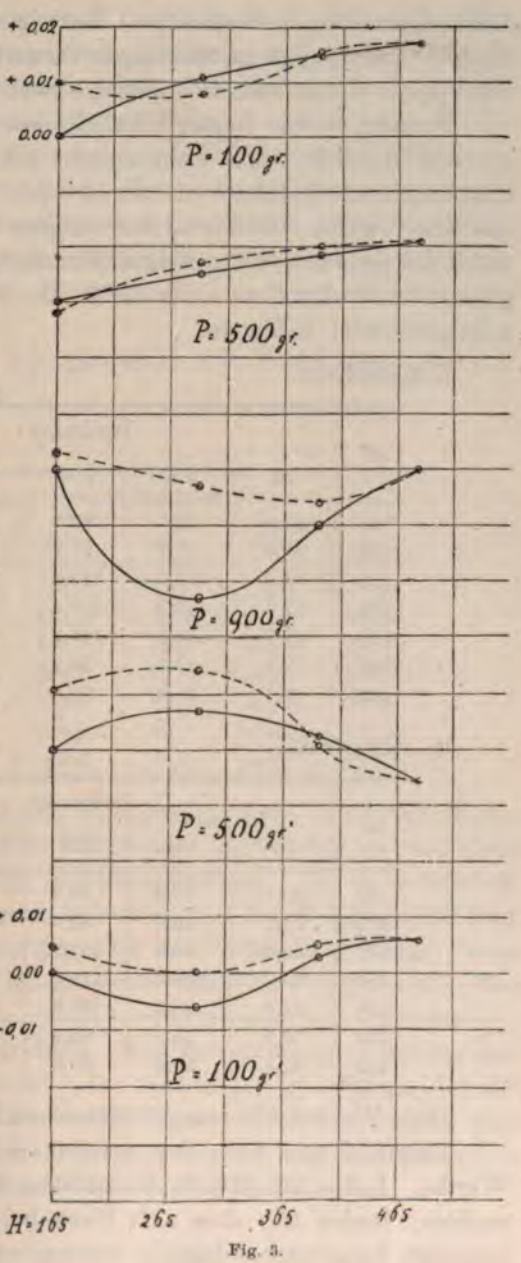


Fig. 3.

III. Die magnetische Längenänderung.

15. Hauptzweck der Untersuchung war, die Aenderungen des

Dehnungsmoduls zu bestimmen. Dazu wurden die magnetischen Längen- und Spannungsänderungen verwerthet; letztere brauchten dabei nicht ihrem absoluten Betrage nach bestimmt zu werden.

Dennoch wurde immer ihre absolute Grösse mit bestimmt; es wird vielleicht nicht uninteressant sein, wenn ich auch die diesbezüglichen Resultate zusammenstelle. Folgende Tabelle giebt die Mittelwerthe. Die Eisendrähte zeigten immer eine Contraction, selbst bei ganz schwachen Magnetisierungen. Die beiden Tabellen geben die Contraction eines 1000 mm langen Eisendrahtes in zehntausendstel Millimeter.

I. Eisendraht.

H	Belastung				
	75	500	900	500	75
165	47,3	55,7	59,7	53,9	48,2
293	73,4	87,1	91,1	83,5	75,6
396	88,9	105,7	112,0	101,4	90,4
484	97,6	118,3	126,1	113,8	99,2
396	88,7	105,0	111,1	101,0	90,0
293	73,4	85,9	90,7	82,6	75,2
165	46,6	55,2	58,6	53,0	47,6

II. Eisendraht.

H	Belastung				
	75	300	500	700	900
165	45,8	50,9	53,2	57,0	58,8
293	71,1	79,7	83,5	88,9	90,4
396	86,6	96,9	101,9	107,9	110,6
484	95,8	108,4	115,1	122,5	126,1
396	86,6	96,5	101,9	107,9	110,1
293	70,9	78,8	82,4	88,0	90,2
165	45,4	50,9	53,2	56,8	58,3

Diese Werthe stimmen gut mit meinen früheren Beobachtungen.

BIDWELL und nach ihm andere fanden davon abweichende Werthe. Indem sie dickere Eisenstäbe, Ringe, Ellipsoide untersuchten, fanden sie, dass sich Eisen bei kleiner Magnetisierung ausdehnt, bei grösserer dagegen zusammenzieht. Die untersuchten

Stäbe, Ringe waren mindestens 1—2 mm stark. Schon BIDWELL beobachtete, dass die magnetische Dilatation mit dem Durchmesser des Stabes zugleich kleiner wird, dass ferner mit wachsender Belastung die Contraction früher eintritt und grössere Werthe annimmt; bei einem Eisendraht von 0,7 mm Durchmesser trat überhaupt nur Contraction auf. Neuestens fand auch SHAKESPEAR bei 0,7 mm dickem Eisendraht nur Contraction, selbst bei kleiner Magnetisierung. Meine Resultate stehen daher mit älteren Beobachtungen gar nicht in Widerspruch, sie dienen *aber zu deren Ergänzung.*

Bei Nickel fand ich gleichfalls nur Verkürzung und zwar folgende Werthe:

Nickeldraht.

H	Belastung				
	100	500	900	500	100
165	83,1	59,7	19,1	51,8	116,5
293	136,6	117,3	50,5	114,8	174,9
396	167,5	159,3	82,7	163,8	202,0
484	186,8	189,7	111,5	200,4	216,9
396	166,7	157,6	81,1	163,0	200,4
293	135,8	115,2	48,2	112,8	172,4
165	81,5	57,6	18,6	50,2	113,2

Die Zahlen geben die Verkürzung eines 1000 mm langen Drahtes in zehntausendstel Millimeter. Die Werthe sind mit jenen von BIDWELL in guter Uebereinstimmung. Es ist ersichtlich, dass die Verkürzung ganz bedeutend von der Belastung abhängt. Bei geringer Magnetisierung wird die Verkürzung kleiner, wenn die Belastung wächst; bei grösseren wächst sie dagegen eine Zeit lang mit der Belastung, in Uebereinstimmung mit BIDWELL.

Es ist ferner ersichtlich, dass die permanente Deformation die Contraction beeinflusst. Bei Nickel ist der Einfluss der Belastung viel bedeutender wie bei Eisen. Es ist sonderbar, dass dennoch bei Eisen der Einfluss der Belastung auf die Aenderungen des Moduls viel bedeutender ist wie bei Nickel.

4.

UEBER DIE LINEARE TRANSFORMATION DER THETAFUNCTIONEN.*

Von GUSTAV A. KINN, Gymnasialprofessor in S. Regen.

(Aus Bd. IX der Mathematikai és Physikai Lapok.)

EISENSTEIN hat in seiner klassischen Abhandlung** über die zur Darstellung der elliptischen Functionen dienenden unendlichen Doppelproducte untersucht, welche Werthänderungen diese nur bedingt convergenten Producte bei einer Aenderung der Reihenfolge ihrer Factoren erleiden. Dabei ergiebt sich unter anderem Folgendes:

Werden in einem Product

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right),$$

in welchem als ursprüngliche Anordnung der Factoren diejenige zu betrachten ist, wobei zuerst die Multiplication nach dem Index m, dann die nach dem Index n, und zwar derart ausgeführt wird, dass jedem positiven m bezw. n das gleichgrosse negative m bezw. n zugeordnet wird, die Multiplicationsindices m und n mittelst einer ganzzahligen linearen Substitution

$$\left.\begin{aligned} m &= a_0 m' + b_0 n' \\ n &= a_1 m' + b_1 n' \end{aligned}\right\}, \qquad (A)$$

* Der mathematisch-naturwissenschaftlichen Facultät der k. ung. Franz-Josephs-Universität zu Klausenburg als Inauguraldissertation vorgelegt.

** Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind. *Crelle's* Journal, Bd. XXXV, 1847. S. 153—274 oder Mathematische Abhandlungen, S. 213—334.

deren Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{(B)}$$

ist, durch andere Indices m', n' ersetzt, so ändert das obige Product seinen Werth derart, dass zu demselben die Exponentialgrösse

$$e^{\delta \frac{2a_1\pi i}{\alpha(a_0\alpha+a_1\beta)}(\gamma x-\frac{1}{2}x^2)} \qquad \text{(C)}$$

als Factor hinzutritt (wobei $\delta = +1$ oder $= -1$ ist, je nachdem der Coefficient von i in dem Quotienten $\frac{\alpha}{\beta}$ der beiden Periodicitätsmoduln positiv oder negativ ist).* EISENSTEIN knüpft hieran (bezw. an den allgemeineren Fall, in welchem die Substitutionsdeterminante von 1 verschieden ist) die Bemerkung, „dass alles, was man bisher mit dem Namen 'Transformation der elliptischen Functionen' bezeichnet hat, unter dieser allgemeineren Gattung von Transformationen der Indices begriffen ist".**

Auf der hierdurch gegebenen Grundlage beabsichtige ich, im Folgenden die *lineare Transformation der Thetafunctionen* allgemein durchzuführen, nachdem ich in einer früheren Arbeit*** mehrere specielle Fälle als Beispiele zu einigen allgemeineren Bemerkungen behandelt habe.

Es empfiehlt sich von vornherein, diejenige Thetafunction, deren Productdarstellung die einfachste Gestalt besitzt, nämlich

$$\vartheta_1(v,\tau) = \vartheta_1'(0,\tau)\cdot v\cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{v}{m+n\tau}\right) \qquad (1)$$

der Untersuchung zu Grunde zu legen und die drei anderen Thetafunctionen auf diese zu reducieren.

Zu diesem Zweck erhält man leicht aus den allgemeineren Formeln für die Vermehrung des Argumentes um halbe Perioden† die specielle Formel:

---

* A. a. O. S. 184 bezw. 244. ** A. a. O. S. 190 bezw. 250.

*** Die Anwendung unendlicher Producte in der Functionentheorie. Gymnasialprogramm Sächsisch-Regen, 1899.

† S. z. B. KOENIGSBERGER, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. I, S. 371.

$$\vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}g_\lambda+\tfrac{1}{2}h_\lambda\tau)=e^{-\frac{1}{2}h_\lambda\left(2v+g_\lambda-1+\frac{1}{2}h_\lambda\tau\right)\pi i}\vartheta_\lambda(v), \quad (2)$$

worin die Grössen g_λ und h_λ die Werthe 0 oder $+1$, bezw. 0 oder -1 annehmen und dem Index λ nach folgendem Schema zuzuordnen sind:

λ	g_λ	h_λ
0	0	-1
1	0	0
2	$+1$	0
3	$+1$	-1

Es handelt sich also um die Transformation des Productes:

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m\left(1-\frac{v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m+n\tau}\right). \quad (3)$$

Wendet man hierauf die Substitution (A), welche der Bedingung (B) zu genügen hat, an, so geht dasselbe, da in der Exponentialgrösse (C) $\delta=-1$ zu setzen ist, über in

$$e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}\left(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau\right)^2}\cdot\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{n'}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m'}\left(1-\frac{v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m'(a_0+a_1\tau)+n'(b_0+b_1\tau)}\right)$$

$$=e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}\left(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau\right)^2}\cdot\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{n'}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_{m'}\left(1-\frac{\frac{v}{a_0+a_1\tau}+\frac{1}{2}\frac{g_\lambda+h_\lambda\tau}{a_0+a_1\tau}}{m'+n'\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}}\right).$$

Setzen wir hierin

$$v'=\frac{v}{a_0+a_1\tau},\quad \tau'=\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}, \quad (4)$$

ferner:

$$\frac{g_\lambda+h_\lambda\tau}{a_0+a_1\tau}=\mathfrak{g}+\mathfrak{h}\tau',$$

woraus sich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} g_\lambda&=a_0\mathfrak{g}+b_0\mathfrak{h}, & h_\lambda&=\ \ a_1\mathfrak{g}+b_1\mathfrak{h}\\ \mathfrak{g}&=b_1g_\lambda-b_0h_\lambda, & \mathfrak{h}&=-a_1g_\lambda+a_0h_\lambda\end{aligned}\right\}, \quad (5)$$

so erhalten wir:

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(1 - \frac{v + \frac{1}{2}g_\lambda + \frac{1}{2}h_\lambda\tau}{m + n\tau}\right)$$

$$= e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)^2} \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_n \prod_{-\infty}^{+\infty}{}_m \left(1 - \frac{v' + \frac{1}{2}\mathfrak{g} + \frac{1}{2}\mathfrak{h}\tau'}{m' + n'\tau'}\right), \qquad (6)$$

womit in der That die lineare Transformation des Productes (3) erzielt ist.

Setzt man gemäss (1) und (2) an Stelle der Producte die Thetafunctionen, nachdem vorher mittelst der Beziehungen

$$\mathfrak{g} = 2k + g_{\lambda_1}, \qquad \mathfrak{h} = 2l + h_{\lambda_1} \qquad (7)$$

die neuen Grössen g_{λ_1} und h_{λ_1}, welche nur die Werthe 0 oder $+1$, bezw. 0 oder -1 anzunehmen haben, eingeführt worden sind, und berücksichtigt, dass

$$v + \tfrac{1}{2}g_\lambda + \tfrac{1}{2}h_\lambda\tau = (a_0 + a_1\tau)\cdot(v' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{g} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{h}\tau'),$$

so erhält man:

$$e^{-\frac{1}{2}h_\lambda(2v+g_\lambda-1+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)\pi i} \cdot \vartheta_\lambda(v,\tau)$$

$$= (a_0 + a_1\tau)\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')} \cdot e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)^2}$$

$$\times e^{-\frac{1}{2}h_{\lambda_1}(2v'+2k+2l\tau'+g_{\lambda_1}-1+\frac{1}{2}h_{\lambda_1}\tau')\pi i} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v'+k+l\tau',\tau').$$

Durch Anwendung der für die Vermehrung des Argumentes der Thetafunctionen um ganze Vielfache der Perioden giltigen Formel*

$$\vartheta_\lambda(v + p + q\tau) = e^{[p(1+h_\lambda)-q(1-g_\lambda)-q(2v+q\tau)]\pi i}\,\vartheta_\lambda(v)$$

geht die obige Gleichung über in

$$e^{-\frac{1}{2}h_\lambda(2v+g_\lambda-1+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)\pi i} \cdot \vartheta_\lambda(v,\tau) = (a_0 + a_1\tau)\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}$$

$$\times e^{-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}(v+\frac{1}{2}g_\lambda+\frac{1}{2}h_\lambda\tau)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}h_{\lambda_1}(2v'+2k+2l\tau'+g_{\lambda_1}-1+\frac{1}{2}h_{\lambda_1}\tau')\pi i}$$

$$\times e^{[k(1+h_{\lambda_1})-l(1-g_{\lambda_1})-l(2v'+l\tau')]\pi i} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'). \qquad (8)$$

---

* S. z. B. Koenigsberger, a. a. O. S. 370.

Hier sind die Exponenten von e noch einer bedeutenden Reduction fähig. Es bleibt zunächst ein Glied, welches v^2 enthält, nämlich:

$$-\frac{a_1\pi i}{a_0+a_1\tau}v^2 = -a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i.$$

Die übrigen, von v, bezw. v' abhängigen Glieder lassen sich folgendermaassen reducieren:

$$\begin{aligned}&\Big[h_\lambda v - \frac{a_1}{a_0+a_1\tau}(g_\lambda+h_\lambda\tau)v - h_{\lambda_1}v' - 2lv'\Big]\pi i\\ =&\Big[h_\lambda v - a_1(g_\lambda+h_\lambda\tau)v' - (a_0h_\lambda - a_1g_\lambda)v'\Big]\pi i\\ =&\Big[h_\lambda v - a_1h_\lambda\tau v' - a_0h_\lambda v'\Big]\pi i\\ =&\ h_\lambda\Big[v-(a_0+a_1\tau)v'\Big]\pi i = 0.\end{aligned}$$

Die noch übrigen Glieder, welche τ und τ' enthalten, lassen sich in folgender Weise schreiben:

$$\begin{aligned}&\Big[\tfrac{1}{4}h_\lambda^2\tau - \frac{a_1}{a_0+a_1\tau}\cdot\tfrac{1}{4}(g_\lambda+h_\lambda\tau)^2 - (l+\tfrac{1}{2}h_{\lambda_1})^2\tau'\Big]\pi i\\ =\frac{1}{a_0+a_1\tau}\cdot&\Big[\tfrac{1}{4}h_\lambda^2(a_0+a_1\tau)\tau - \tfrac{1}{4}a_1(g_\lambda+h_\lambda\tau)^2 - \tfrac{1}{4}(a_0h_\lambda - a_1g_\lambda)^2\\ &\times(b_0+b_1\tau)\Big]\pi i\\ =\frac{1}{a_0+a_1\tau}\cdot&\Big[-\tfrac{1}{4}a_1g_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_1^2b_0g_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_0^2b_0h_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_0a_1b_0g_\lambda h_\lambda\\ &+(\tfrac{1}{4}a_0h_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_0^2b_1h_\lambda^2 - \tfrac{1}{4}a_1^2b_1g_\lambda^2 - \tfrac{1}{2}a_1g_\lambda h_\lambda\\ &+\tfrac{1}{2}a_0a_1b_1g_\lambda h_\lambda)\tau\Big]\pi i.\end{aligned}$$

Mit Benutzung der aus (B) sich ergebenden Relation

$$a_0b_1 - a_1b_0 = 1$$

geht dieser Ausdruck über in

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0+a_1\tau}\cdot&\Big[-\tfrac{1}{4}a_1a_0b_1g_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_0a_1b_0g_\lambda h_\lambda - \tfrac{1}{4}a_0^2b_0h_\lambda^2\\ &+(-\tfrac{1}{4}a_1^2b_1g_\lambda^2 + \tfrac{1}{2}a_1^2b_0g_\lambda h_\lambda - \tfrac{1}{4}a_0a_1b_0h_\lambda^2)\tau\Big]\pi i\\ =&-\tfrac{1}{4}(a_1b_1g_\lambda^2 - 2a_1b_0g_\lambda h_\lambda + a_0b_0h_\lambda^2)\pi i,\end{aligned}$$

NOTICE REGARDING REMITTANCE.

Since the New York banks charge for Collection of all out-of-town checks (except on cities named below), not less than 10 cents each check, we request our customers to remit small sums by check on New York, Philadelphia, Albany, Boston, Jersey City, Hoboken, Newark, Baltimore, Providence, or by P. M. Order or Express Order. On checks over $5 we will bear the expense of collection.

G. E. STECHERT,

9 East 16th Street, New York.

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_\lambda(v,\tau)=(a_0+a_1\tau)\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}\cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i}\cdot\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'), \quad (10)$$

oder, wenn wir für die constanten Factoren eine einfachere Bezeichnung einführen, in

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_\lambda(v,\tau)=C\cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i}\cdot\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'), \quad (11)$$

wo also nach dem Obigen

$$v'=\frac{v}{a_0+a_1\tau}, \quad \tau'=\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau}$$

ist und der Index λ_1 mittelst der Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda_1} &\equiv b_1 g_\lambda - b_0 h_\lambda \\ h_{\lambda_1} &\equiv -a_1 g_\lambda + a_0 h_\lambda \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

zu bestimmen ist. — Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch bezeichnet $\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')$ die ursprüngliche, $\vartheta_\lambda(v,\tau)$ die transformierte Thetafunction.

Es erübrigt noch die *Bestimmung der Constanten C.*

Die Transformationsgleichung (10) bietet dieselbe in einer Form dar, welche nicht nur einen directen Einblick in ihre Natur, sondern auch eine einfache Berechnung zulässt.

Wir bemerken zunächst, dass nach (5) und (7) für $\lambda=1$ stets auch $\lambda_1=1$ wird, und umgekehrt, und dass gleichzeitig

$M = 0$ wird. *Demnach ist C der Werth, den die vollständige Constante*

$$C \cdot e^{\frac{1}{4} M \pi i}$$

für die Transformation der Function ϑ_1 annimmt. Es ergiebt sich in der That, wenn in (11) $\lambda = \lambda_1 = 1$ und $v = v' = 0$ gesetzt wird,

$$C = \frac{\vartheta_1(0, \tau)}{\vartheta_1(0, \tau')} = \frac{0}{0},$$

und für diese unbestimmte Form findet sich nach der bekannten Regel der Werth

$$\left[\frac{\vartheta_1'(v, \tau)}{\vartheta_1'(v', \tau')} \cdot \frac{dv}{dv'}\right]_{v=v'=0} = (a_0 + a_1 \tau) \cdot \frac{\vartheta_1'(0, \tau)}{\vartheta_1'(0, \tau')}.$$

Ferner ist aus (10) ersichtlich, dass C von den Indices λ und λ_1 unabhängig ist, mithin *für alle vier Thetafunctionen denselben Werth hat.* Die Verschiedenheit der Werthe der vollständigen Transformationsconstanten

$$C \cdot e^{\frac{1}{4} M \pi i}$$

für die einzelnen Thetafunctionen wird also lediglich durch den zweiten Factor bedingt.

Endlich geht aus dem Obigen hervor, dass die Grösse C, welche sich im wesentlichen als Quotient zweier Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente darstellt, *eine ausschliesslich von den beiden Moduln τ und τ' abhängige Function ist.* Es liegt nahe, dieser Function, welche als durch Specialisierung der Variabeln v und v' (nämlich $v = v' = 0$) entstanden gedacht werden kann, durch weitere Specialisierung hinsichtlich ihres Argumentes τ, bezw. τ', eine noch einfachere Form zu geben. Zu dem Zweck ist es zunächst nöthig, die Art der Abhängigkeit der Grösse C von τ, bezw. τ' näher zu untersuchen. Dieses kann geschehen, indem man zwischen C und τ eine Differentialbeziehung aufsucht. Eine solche lässt sich herstellen, wenn man in die für die Thetafunctionen giltige partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\lambda(v, \tau)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_\lambda(v, \tau)}{\partial \tau} \qquad \text{(a)}$$

die durch Differentiation der Transformationsgleichung (11) sich ergebenden Werthe einsetzt.

Mit Benützung der Relationen

$$\frac{\partial v'}{\partial v} = \frac{1}{a_0 + a_1\tau}, \quad \frac{\partial v'}{\partial \tau} = -\frac{a_1 v'}{a_0 + a_1\tau}, \quad \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} = \frac{1}{(a_0 + a_1\tau)^2}$$

und mit Berücksichtigung dessen, dass $e^{\frac{1}{4}M\pi i}$ eine von v und τ unabhängige rein numerische Constante ist, erhält man:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial v^2} = \frac{C \cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i} \cdot e^{-a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}}{(a_0+a_1\tau)^2}$$

$$\times\Big[(a_0+a_1\tau)^2 \cdot (2a_1 v'\pi i)^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') - 2a_1(a_0+a_1\tau)\pi i\,\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') - 4a_1(a_0+a_1\tau)v'\pi i \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'} + \frac{\partial^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'^2}\Big]$$

$$\frac{\partial \vartheta_\lambda(v,\tau)}{\partial \tau} = \frac{C \cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i} \cdot e^{-a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}}{(a_0+a_1\tau)^2}$$

$$\times\Big[(a_0+a_1\tau)^2 \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{d\tau} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') + (a_0+a_1\tau)^2 a_1^2 v'^2 \pi i\,\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') - a_1(a_0+a_1\tau)v' \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'} + \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial \tau'}\Big].$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in (a) erhalten wir mit Berücksichtigung dessen, dass auch

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial v'^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau')}{\partial \tau'}$$

ist,

$$-2a_1(a_0+a_1\tau)\pi i\,\vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') = 4\pi i (a_0+a_1\tau)^2 \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{dC}{d\tau} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau'),$$

und daraus

$$-\frac{1}{2}\frac{a_1 d\tau}{a_0+a_1\tau} = \frac{dC}{C},$$

und endlich durch Integration dieser logarithmischen Differentiale, wenn die Integrationsconstante in der Form $\log c$ hinzugefügt wird,

$$C = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}. \tag{12}$$

Wir können also die Transformationsgleichung (11) auch in der Form schreiben:

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v^2\pi i}\vartheta_\lambda(v,\tau)=\frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i}\vartheta_{\lambda_1}(v,\tau'), \quad (13)$$

wo nach dem Obigen c eine von v, τ und λ unabhängige, also nur durch die vier Transformationszahlen

$$a_0,\ a_1,\ b_0,\ b_1$$

bestimmte rein numerische Constante bedeutet, um deren Bestimmung es sich jetzt handelt.

Wir schreiben c in der Form

$$c=(a_0+a_1\tau)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\vartheta_1'(0,\tau)}{\vartheta_1'(0,\tau')}. \quad (m)$$

Nach den soeben angegebenen Eigenschaften von c wird es nunmehr gestattet sein, zur Vereinfachung des in (m) gegebenen Ausdruckes in denselben irgend welche Specialwerthe für τ und τ' einzuführen. Zu dem Zweck bestimmen wir aus

$$\tau'=\frac{b_0+b_1\tau}{a_0+a_1\tau} \quad (n)$$

denjenigen Werth, für welchen

$$\tau'=\tau, \quad (o)$$

mithin auch

$$\vartheta_1'(0,\tau)=\vartheta_1'(0,\tau') \quad (p)$$

wird*. Dabei ist zu beachten, dass der reelle Theil von

$$\frac{\tau}{i}$$

wesentlich positiv sein muss. Setzen wir also

* Eine grössere Allgemeinheit lässt sich erzielen, wenn statt $\tau'=\tau$ der Ansatz $\tau'=\tau+p$ (wo p eine ganze Zahl ist) gemacht wird. Ein näheres Eingehen hierauf kann jedoch an dieser Stelle um so eher unterbleiben, als dieser Gegenstand in einer Abhandlung des Herrn Besch über „Die Bestimmung der bei der linearen Umformung der Θ-Functionen auftretenden Transformationsconstanten“ (Programm des kgl. Friedrich-Collegiums, Königsberg i. Pr. 1877) bereits behandelt worden ist. Demnach erscheinen auch die auf die Constantenbestimmung bezüglichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zum grossen Theil in der Abhandlung des Herrn Besch bereits enthalten. Ich bemerke jedoch, dass mir diese Abhandlung leider unbekannt geblieben war, bis mich Herr Prof. Schlesinger bei Gelegenheit der Begutachtung der vorliegenden, der Facultät in magyarischer Sprache gedruckt eingereichten Arbeit darauf aufmerksam machte.

$$\tau = t + t_1 i,$$

so muss t_1 *eine positive, von Null verschiedene reelle Zahl* bedeuten.

Um (o) zu erfüllen, erhalten wir aus (n)

$$t + t_1 i = \frac{b_0 + b_1 t + b_1 t_1 i}{a_0 + a_1 t + a_1 t_1 i},$$

und hieraus ergiebt sich sofort durch Sonderung der reellen von den imaginären Bestandtheilen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 t + a_1 t^2 - a_1 t_1^2 &= b_0 + b_1 t \\ a_0 t_1 + 2 a_1 t t_1 &= b_1 t_1 \end{aligned}\right| . \qquad (q)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen kommt

$$t = -\frac{a_0 - b_1}{2 a_1},$$

und durch Einsetzen dieses Werthes in die erste Gleichung geht diese über in

$$a_1 t_1^2 = -\frac{(a_0 - b_1)^2}{4 a_1} - b_0$$

oder

$$t_1 = \frac{1}{2 a_1} \sqrt{-(a_0 - b_1)^2 - 4 a_1 b_0},$$

wo das Vorzeichen derart zu bestimmen ist, dass t_1 positiv ist. Die Wurzel ist also positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem a_1 positiv oder negativ ist. Dieses können wir einfach ausdrücken durch die Bezeichnungsweise

$$t_1 = + \frac{1}{2 a_1} \cdot \frac{a_1}{|a_1|} \cdot \sqrt{-(a_0 - b_1)^2 - 4 a_1 b_0}.$$

Mit Berücksichtigung der Relation

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

können wir den letzten Ausdruck noch etwas einfacher folgendermaassen darstellen:

$$t_1 = + \frac{1}{2 a_1} \cdot \frac{a_1}{|a_1|} \cdot \sqrt{-(a_0 + b_1)^2 + 4}.$$

Es ist zu bemerken, dass diese Darstellung nur so lange Giltigkeit besitzt, als a_1 *von Null verschieden* und *der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen positiv* ist, da t_1 eine reelle Zahl sein muss.

Wir erhalten nunmehr für den gesuchten Werth der Moduln

$$\tau = \tau' = -\frac{a_0 - b_1}{2 a_1} + \frac{i}{2 a_1} \cdot \frac{a_1}{|a_1|} \cdot \sqrt{-(a_0 + b_1)^2 + 4},$$

und durch Einführung dieses Werthes in (m) ergiebt sich für die Constante, wenn wir an Stelle des gleich nachher zu bestimmenden Vorzeichens für den Augenblick den Factor ε, welcher den Werth $+1$ oder -1 bedeuten soll, hinzufügen:

$$c = \varepsilon \cdot \sqrt{\left[\tfrac{1}{2}(a_0 + b_1) + \tfrac{1}{2} i \tfrac{a_1}{|a_1|} \sqrt{-(a_0 + b_1)^2 + 4}\right]^3}. \quad (14)$$

Nach den oben bemerkten Giltigkeitsbedingungen muss stets

$$-(a_0 + b_1)^2 + 4 > 0$$

sein. Es sind also nur folgende Fälle möglich:

1. $a_0 + b_1 = 0, \qquad c = \varepsilon \sqrt{\left[i \tfrac{a_1}{|a_1|}\right]^3}$

oder (wenn wir die verschiedenen Werthe der Constanten durch dem Buchstaben c beigefügte Indices unterscheiden):

$$c_1 = \varepsilon \sqrt{-i}, \qquad a_1 > 0$$

$$c_2 = \varepsilon \sqrt{i}, \qquad a_1 < 0$$

2. $a_0 + b_1 = 1, \qquad c_3 = \varepsilon \sqrt{\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i \tfrac{a_1}{|a_1|} \cdot \sqrt{3}\right]^3}$

$$= \varepsilon i$$

3. $a_0 + b_1 = -1, \qquad c_4 = \varepsilon \sqrt{\left[-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i \tfrac{a_1}{|a_1|} \cdot \sqrt{3}\right]^3}$

$$= \varepsilon .$$

Das Vorzeichen lässt sich leicht bestimmen, wenn man die Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

zweimal nacheinander anwendet. Es ergiebt sich dann die zusammengesetzte Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt sofort:

$$c_3^{\,2} = c_4$$

oder:

$$\varepsilon = -1 .$$

Nunmehr können wir die Constanten auch in folgender Form schreiben:

$$c_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}$$
$$c_2 = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$
$$c_3 = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$
$$c_4 = e^{-\pi i}.$$

Die angegebenen Giltigkeitsbedingungen enthalten indessen keine Beschränkung der Allgemeinheit. Denn es lässt sich leicht zeigen, dass jede Transformation sich auf andere Transformationen reducieren lässt, für welche die angegebenen Bedingungen erfüllt sind. In der That, bedenken wir, dass eine beliebige lineare Transformation

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

sich durch successive Anwendung der beiden Normaltransformationen ersetzen lässt*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

so ist ersichtlich, dass die zweite dieser Normaltransformationen den gegebenen Bedingungen entspricht, während die erste sich in zwei andere, diesen Bedingungen ebenfalls genügende Transformationen zerlegen lässt, nämlich:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Somit ist die Bestimmung der Transformationsconstanten für alle Fälle gesichert. Die Form, in der sich dieselbe hier ergiebt, lässt wohl eine directe Vergleichung mit der nach HERMITE'schen Principien berechneten und in GAUSS'schen Summen dargestellten Constanten nicht zu, doch liess sich die Uebereinstimmung in zahlreichen ausgerechneten speciellen Fällen erkennen.

Es ist noch nöthig, für den oben ausgeschlossenen Fall, wenn $a_1 = 0$ ist, einen Ausdruck für c herzustellen. Auf dem bisher verfolgten Weg ist dieser nicht zu erhalten. Wir kommen indessen schnell zum Ziel, wenn wir das unendliche Product

* S. z. B. KOENIGSBERGER, a. a. O. Bd. II., S. 70.

$$\vartheta_1'(0,\tau) = 2\pi \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 - e^{2\nu\pi i\tau})^3$$

benützen. Wegen

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

ist nämlich für $a_1 = 0$

$$a_0 = b_1 = \pm 1, \quad b_0 \text{ beliebig},$$

$$\tau' = \frac{b_0}{a_0} + \tau = \pm b_0 + \tau,$$

und es folgt aus (m)

$$c = a_0^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 - e^{2\nu\pi i\tau})^3}{e^{\frac{1}{4}\pi i\tau} \cdot e^{\frac{1}{4}\pi i \frac{b_0}{a_0}} \cdot \prod_1^\infty{}_\nu (1 - e^{2\nu\pi i\tau} \cdot e^{\pm 2\nu\pi i b_0})^3}$$

oder:

$$c = a_0^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i \frac{b_0}{a_0}}, \tag{15}$$

wonach die Transformationsgleichung (13) übergeht in

$$\vartheta_\lambda(v,\tau) = a_0 \cdot e^{-\frac{1}{4}\pi i \frac{b_0}{a_0}} \cdot e^{\frac{1}{4}M\pi i} \cdot \vartheta_{\lambda_1}(v',\tau') \tag{16}$$

Zum Schluss ist es noch nöthig, aus der allgemeinen Transformationsformel die speciellen Ausdrücke für die einzelnen Klassen der linearen Transformation herzustellen.

Aus den Congruenzen

$$\left.\begin{aligned} g_{\lambda_1} &\equiv \quad b_1 g_\lambda - b_0 h_\lambda \\ h_{\lambda_1} &\equiv -a_1 g_\lambda + a_0 h_\lambda \end{aligned}\right\} \pmod 2$$

ist ersichtlich, dass zwei Systeme von Transformationszahlen, welche miteinander durch die Beziehungen verbunden sind:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &\equiv \alpha_0 \\ a_1 &\equiv \alpha_1 \\ b_0 &\equiv \beta_0 \\ b_1 &\equiv \beta_1 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

zu einem Index λ beide *denselben* Index λ_1 liefern werden, so dass also alle Systeme von Transformationszahlen, welche einander nach dem Modul 2 congruent sind, im wesentlichen dieselbe

Transformation geben. Mit Rücksicht darauf, dass in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 1$$

zwei derselben Horizontal- oder derselben Verticalreihe angehörige Zahlen relativ prim sein müssen, ergiebt sich, dass sämmtliche Transformationen in folgenden sechs Klassen enthalten sind:

	$a_0 \equiv$	$a_1 \equiv$	$b_0 \equiv$	$b_1 \equiv$
I.	1	0	0	1
II.	0	1	1	0
III.	1	1	0	1
IV.	1	1	1	0
V.	1	0	1	1
VI.	0	1	1	1

Man erhält somit aus der allgemeinen Transformationsformel **(13)**, wenn $\frac{1}{4}M$ nach (9) für die einzelnen Functionen ausgerechnet **wird**, die folgende Zusammenstellung der sämmtlichen linearen **Transformationen**:

I.

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \pmod 2$$
$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda, \quad h_{\lambda_1} \equiv h_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i} \cdot \vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0-2a_0-2b_0+2)\pi i} \vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i} \cdot \vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i} \cdot \vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_1-2b_1+2)\pi i} \cdot \vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i} \cdot \vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_0+a_0b_1-2(b_0+b_1-1))\pi i}$$
$$\times \vartheta_3(v',\tau').$$

Der einfachste in dieser Klasse enthaltene Fall

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

führt auf die identischen Functionen.

II.

$$a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 0 \pmod 2$$

$$g_{\lambda_1} \equiv h_\lambda, \quad h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0-2b_0)\pi i}\vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_1-2a_1-2b_1+4)\pi i}\vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\left(a_0b_0+a_1b_1-2(b_0+b_1-1)\right)\pi i} \times \vartheta_3(v',\tau').$$

Für den einfachsten Fall

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 0$$

wird

$$\tau' = -\frac{1}{\tau}, \quad v' = -\frac{v}{\tau}, \quad \tau = -\frac{1}{\tau'}, \quad v = \frac{v'}{\tau'}$$

$$c = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}}\vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{e^{\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}}\vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}} \cdot \vartheta_3(v',\tau').$$

III.

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 0, \quad b_1 \equiv 1 \pmod 2$$

$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda, \quad h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda + h_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}\left(a_0b_0-2(a_0+b_0-1)\right)\pi i} \cdot \vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_1-2b_1+2)\pi i}\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \times e^{-\frac{1}{4}\left(a_0b_0+a_1b_1+2a_1b_0-2(b_0+b_1-1)\right)\pi i} \cdot \vartheta_2(v',\tau').$$

Der einfachste Fall

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 1$$

ergiebt

$$\tau' = \frac{\tau}{1+\tau}, \quad v' = \frac{v}{1+\tau}, \quad \tau = \frac{\tau'}{1-\tau'}, \quad v = \frac{v'}{1-\tau'}$$

$$c = e^{-\frac{3}{4}\pi i} *$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{1+\tau}} \cdot \vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{1+\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

* In diesem Fall ist $a_0 + b_1 = 2$. Die Transformation lässt sich in folgender Weise zerlegen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Constanten der beiden rechts stehenden Transformationen sind

$$c_3 = e^{-\frac{1}{2}\pi i}, \quad c_1 = e^{-\frac{1}{4}\pi i}.$$

Dann muss aber, wie leicht zu sehen ist,

$$c = c_3 \cdot c_1 = e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

sein.

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{(1+\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{1+\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau')$$

IV.

$$a_0 \equiv 1,\quad a_1 \equiv 1,\quad b_0 \equiv 1,\quad b_1 \equiv 0 \pmod 2$$

$$g_{\lambda_1} \equiv h_\lambda,\quad h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda + h_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\cdot\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0-2b_0)\pi i}\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\cdot\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\cdot\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}}\cdot e^{-\frac{1}{4}\left(a_1b_1-2(a_1+b_1)+4\right)\pi i} \times\vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\cdot\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \times e^{-\frac{1}{4}\left(a_0b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(b_0+b_1)\right)\pi i}\cdot\vartheta_2(v',\tau'$$

Der einfachste Fall

$$a_0 = 1 \quad a_1 = -1,\quad b_0 = 1,\quad b_1 = 0$$

liefert

$$\tau' = \frac{1}{1-\tau},\quad v' = \frac{v}{1-\tau},\quad \tau = \frac{\tau'-1}{\tau'},\quad v = \frac{v'}{\tau'}$$

$$c = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_0(v',\tau')$$

$$e^{-(1-\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{4}\pi i}}{\sqrt{1-\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau').$$

V.

$$a_0 \equiv 1, \quad a_1 \equiv 0, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \pmod 2$$
$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda + h_\lambda, \quad h_{\lambda_1} \equiv h_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0-2b_0)\pi i}\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_1-2b_1+2)\pi i}\vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \times e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(a_0+a_1+b_0+b_1-1))\pi i}\vartheta_0(v',\tau').$$

Im einfachsten Fall

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = -1, \quad b_1 = 1$$

ist wegen $a_1 = 0$ die Formel (16) anzuwenden. Es wird

$$\tau' = \tau - 1, \quad v' = v, \quad \tau = \tau' + 1, \quad v = v$$
$$\vartheta_0(v,\tau) = \vartheta_3(v',\tau')$$
$$\vartheta_1(v,\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_1(v',\tau')$$
$$\vartheta_2(v,\tau) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_2(v',\tau')$$
$$\vartheta_3(v,\tau) = \vartheta_0(v',\tau')$$

VI.

$$a_0 \equiv 0, \quad a_1 \equiv 1, \quad b_0 \equiv 1, \quad b_1 \equiv 1 \pmod 2$$
$$g_{\lambda_1} \equiv g_\lambda + h_\lambda, \quad h_{\lambda_1} \equiv g_\lambda \pmod 2$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_0(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_0b_0-2b_0)\pi i} \cdot \vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_1(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot \vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\vartheta_2(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \cdot e^{-\frac{1}{4}(a_1b_1-2b_1+2)\pi i}\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{a_1(a_0+a_1\tau)v'^2\pi i}\,\vartheta_3(v,\tau) = \frac{c}{\sqrt{a_0+a_1\tau}} \times e^{-\frac{1}{4}\left(a_0b_0+2a_0b_1+a_1b_1-2(a_0+a_1+b_0+b_1-1)\right)\pi i}\,\vartheta_0(v',\tau')$$

Im einfachsten Fall

$$a_0 = 0,\quad a_1 = 1,\quad b_0 = -1,\quad b_1 = 1$$

erhält man

$$\tau' = \frac{\tau-1}{\tau},\quad v' = \frac{v}{\tau},\quad \tau = \frac{1}{1-\tau'},\quad v = \frac{v'}{1-\tau'}$$

$$c = e^{-\frac{1}{2}\pi i}$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\,\vartheta_0(v,\tau) = \frac{e^{-\pi i}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_2(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\,\vartheta_1(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\pi i}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_1(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\,\vartheta_2(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_3(v',\tau')$$

$$e^{\tau v'^2\pi i}\,\vartheta_3(v,\tau) = \frac{e^{-\frac{3}{4}\pi i}}{\sqrt{\tau}}\cdot\vartheta_0(v',\tau').$$

Die aufgestellten Transformationsformeln stimmen — abgesehen von dem constanten Factor, dessen Form, wie bereits bemerkt wurde, im allgemeinen eine Vergleichung nicht zulässt — mit den auf anderem Wege gefundenen Formeln völlig überein. Bei den für jede Klasse berechneten „einfachsten Fällen“ nimmt auch die Constante dieselben Werthe an, welche man aus den in GAUSS'schen Summen dargestellten Ausdrücken erhält.

5.

DIE CRUSTACEEN DES RETYEZÁT.

Von Dr. ZOLTÁN von SZILÁDY.

Vorgelegt der ung. Akademie in der Sitzung vom 19. November 1900.

Aus „Mathematikai és természettudományi Értesitö" (Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte) p. 371—394.

Die Direction der kgl. ungar. geologischen Anstalt, sowie der kgl. Sectionsgeologe, Herr Dr. FRANZ SCHAFARZIK ermöglichten es mir, im Sommer der Jahre 1898 und 1899 das Retyezátgebirge (Comitat Hunyad, Transsylvanische Alpen) in faunistischer und geologischer Hinsicht zu durchforschen. Indem ich meinen verbindlichsten Dank hiefür auch an dieser Stelle ausspreche, lege ich die ersten Resultate meiner diesbezüglichen Arbeit hiermit vor.

Zum Gegenstande einer eingehenden Untersuchung wählte ich zunächst die auf dem Retyezát und bezw. die in den Seen und Teichen derselben gesammelten *Crustaceen*. Es geschah dies nicht, als ob ich hinsichtlich des wissenschaftlichen Interesses einen Unterschied zwischen den Klassen des Thierreiches machen wollte, sondern weil ich während der relativ kurzen Excursion gerade bezüglich dieser Thiergruppe das reichste Material zu sammeln vermochte, dessen Ergebnisse auch eine Uebersicht über die Verbreitungs- und Lebensverhältnisse der vorkommenden Arten darbieten. Der Gegenstand ist nicht neu; allein ich bin der Ansicht, das Interesse desselben werde durch den Umstand nicht

beeinträchtigt, dass die vier grössten Teiche des Retyezát und die Umgebung derselben auch bereits durch Herrn Dr. EUGEN v. DADAY wiederholt durchforscht wurden.* Die Vergleichung der beiderseitigen Ergebnisse liefert einerseits den Beweis für die Variabilität der Fauna, anderseits aber erstreckt sich vorliegende Arbeit auf fast sämmtliche Teiche des Retyezát und bildet somit gleichsam eine Ergänzung der Forschungen DADAY's.

Ich kann jedoch auch die Mangelhaftigkeit meiner Forschung nicht verschweigen. Da mir nämlich dabei kein Kahn zur Verfügung stand, so war ich ausser Stande, von der Plankton- und Tiefseefauna Kenntniss zu erlangen. Hoffentlich wird ein künftiger, glücklicherer Forscher auch diesen Punkt nicht ausser Acht lassen; es steht sogar zu hoffen, dass in nicht allzu ferner Zeit ein Forscher in einem Observationsblockhaus an den Ufern der Alpenseen stationieren und das rege Leben jener winzigen Wesen von Stunde zu Stunde beobachten kann, dem der in schwachem Zelt campirende, mit Wind und Wetter, mit Schnee und Eis kämpfende Tourist nur Momente zu widmen vermag.

Die vorzüglichsten Hilfsmittel bei der Bearbeitung meines Gegenstandes waren die Abhandlungen von DADAY, DE GUERNE, HELLICH, RICHARD, SCHMEIL, STINGELIN und VAVRA, welche an geeigneter Stelle herangezogen werden.

Das gesammelte Material, welches die Grundlage der vorliegenden Arbeit bildet, habe ich dem Ungarischen Nationalmuseum überlassen. Ebenda führte ich auch die Untersuchungen aus, zu welchem Zwecke Herr Dr. EUGEN v. DADAY, Museal-Custos und Docent an der Universität Budapest, mir die literarischen Behelfe freundlichst zur Verfügung stellte. Hiefür, sowie für seine gefällige Unterweisung sage ich ihm hiermit besten Dank.

---

* DADAY: A magyarországi tavak halainak természetes tápláléka. Budapest 1897. DADAY: Adatok a Retyezát tavai crustacea-faunájának ismeretéhez. Természetrajzi Füzetek 1883.

I. Ordnung: Copepoda.

I. Familie: Cyclopidae.

1. *Cyclops serrulatus.* Fisch.

Die gemeinste Cyclopsart des Retyezát, welche an zehn verschiedenen Stellen in mein Netz geriet, ihre höchste Station ist bei 2100 m.; übrigens in ganz Ungarn überall gemein.

2. *Cyclops vernalis.* Fisch.

Ich fand diese Art an zwei Stellen, und zwar in den Tümpeln des Galbinathals und im kleineren Teiche der Pelaga-Alpe. Dieselbe scheint dem *Cyclops strenuus* Platz zu machen, denn in den Teichen Zseminye, Fekete, Zenoga und Bukura, worin sie Daday noch gesammelt hat, fand ich sie nicht mehr vor. Sie ist eine häufige Art der Tátrateiche, und ihre vertikale Verbreitung erreicht somit die annähernde Höhe von 2000 m.

3. *Cyclops affinis* Sars.

Diese Art lebt an mehreren Orten des siebenbürgischen Landestheils von Ungarn; auf dem Retyezát fand ich sie jedoch nur in einem Tümpel des Buta Mic genannten Circusthals in 1600 m Seehöhe, und zwar in reifen männlichen und weiblichen Exemplaren.

4. *Cyclops strenuus* Fisch.

Durch das charakteristische fünfte Fusspaar und die Behaarung der Furca ist diese Art leicht zu erkennen und stimmt mit den vorzüglichen Abbildungen Schmeil's vollständig überein. Ich fand sie in vier grösseren Teichen, meist an Stellen über 2000 m. Auch in der Tátra gemein.

Cyclops sp. indet.

In mehreren Teichen fand ich ferner unreife Exemplare einer *Cyclops*art, welche wahrscheinlich einer der obigen Arten, etwa dem *Cyclops strenuus*, angehören.

II. Familie: Harpacticidae.

5. *Canthocamptus staphylinus* JUR.

In bedeutender Anzahl fand ich diese Art in mehreren Teichen des Zseminyethales, im Zenogasee aber, wo DADAY im Jahre 1883 noch einige fand, lebt sie heute nicht mehr. Kommt an verschiedenen Orten Ungarns, so auch in der Tátra vor; ich sammelte sie über 2000 m.

III. Familie: Calanidae.

6. *Diaptomus bacillifer* KÖLB.

Diese interessante Art wurde auf dem Retyezát, und zwar in dem Feketeteich, schon von DADAY beobachtet und dort, sowie in dem kleineren Teiche der Pelagagruppe fand auch ich sie in zahlreichen Exemplaren. Ihr Merkmal ist der stäbchenförmige Fortsatz am dritten Endgliede der rechten Antenne des Männchens, welcher seiner Länge und Form nach etwas variiert. KÖLBEL beschreibt diese Art nach Exemplaren aus dem Balatonsee* und DADAY fand sie in mehreren Pusztenteichen, sie kommt aber auch in den Seen der Tátra, Sibiriens und der Alpen vor; in Briançon sammelte sie BLANCHARD in 2400 m Seehöhe. Zufolge der Güte des Herrn RICHARD hatte ich Gelegenheit, die mir vorliegenden Alpenexemplare mit unseren Pusztenthieren zu vergleichen, fand jedoch keinen wesentlichen Unterschied zwischen denselben. Es ist indessen zu bemerken, dass ich unter den Exemplaren aller Fundorte Weibchen fand, welche eine auswärts gebogene und zugleich nur am äusseren, und nicht — wie sonst — auch am inneren Rande gezähnte Endkralle am Exopodit des fünften Fusspaares aufwiesen. Es giebt aber auch Uebergangsformen, welche ganz gerade, beiderseits gezähnte Endkrallen besitzen. Fraglich ist es, ob diese Verschiedenheit in einem, und zwar in welchem Zusammenhang mit den Functionen des Geschlechtslebens steht.

---

* KÖLBEL: Carcinologisches. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien 1884.

7. *Diaptomus tatricus* WIERZ.

WIERZEJSKY beschrieb dies Thier auf Grund der in den Tátraseen gefundenen Exemplare als neue Art.* Auf dem Retyezát fand sie schon DADAY und er hat auch ihre ausführliche Beschreibung geboten (Természetrajzi Füzetek 1890). Ist als die gemeinste Crustacee des Retyezát zu bezeichnen; ich fand sie an 13 Stellen von 1850 bis 2200 m., in Pfützen sowie in Teichen und Torflachen. Abweichungen von den bekannten Charakteren beobachtete ich nicht. Zu bemerken ist, dass ich am fünften Fusspaare des Weibchens stets einen eingliedrigen Innenast (Entopodit) sah, welcher am Ende mit zwei kleinen Borsten und einem feinen, hyalinen Wimperkranz bewehrt war.

Leicht zu unterscheiden sind die entwickelten Weibchen, bei welchen die dorsolateralen Theile des letzten Thoraxsegments sich in zwei birnenförmige divergierende Fortsätze abschnüren, welche die aus den ventrolateralen Theilen verbliebenen Seitenhöcker beinahe bedecken. Die Dorsalfortsätze tragen zwei Dornen, einen am Gipfel, den andern einwärts, gegenüber dem entsprechenden postabdominalen Dorn. Die physiologische Bedeutung dieser Organe kenne ich nicht; da sie stets nur an reifen Exemplaren auftreten, könnte man sie als secundäre Geschlechtsmerkmale auffassen.

II. Ordnung: Ostracoda.

I. Familie: Cypridae.

8. *Cypria ophthalmica* JUR.

Diese Art determinierte ich nach der Beschreibung von VAVRA (Monographie der Ostracoden Böhmens 1891), mit der sie völlig übereinstimmt. Auf dem Untergrunde zweier kleinerer Pfützen und des Feketeteiches fand ich sie, und letztere Stelle (2014 m) ist nach den vorliegenden Daten ihr höchster Fundort in Ungarn.

* Die Uebersetzung der russischen Beschreibung ist enthalten in: „Revision des Calanides d'eau douce" von DE GUERNE et RICHARD. (Mém. de la Soc. Zool. de France 1889.)

9. *Eucypris conchacea* JUR.

Nach der „Monographie der Ostracoden Böhmens" von VENZEL VAVRA kann man diese Art nur als *Cypris incongruens* determinieren, obgleich sie sich von derselben wesentlich unterscheidet; so hat sie eine andere Furcabehaarung und durchaus nicht „incongruente" Schalen. Aus diesem Grunde verwende ich obigen Namen, welchen DADAY mir mittheilte nach der neuen Arteneintheilung, die sich in seinem eben erschienenen Werke befindet. Es ist nicht ohne Interesse, dass ich diese Art, welche kein Hochgebirgsbewohner ist, auf der Hauptthallinie des Retyezát in einer Strassenpfütze am Nagyvizbache (Riu Mare), als Gast in der Gesellschaft von *Moina brachiata* vorfand.

III. Ordnung: Phyllopoda.

I. Familie: Lynceidae.

10. *Chydorus globosus* BAIRD.

Die retyezáter Exemplare sind durch die feine Bewimperung der Seiten des Postabdomens charakterisiert, welche an der Gegend des Analhöckers am auffallendsten erscheint. Diesen Umstand erwähnen die Autoren nicht. Ich fand sie selten in Gesellschaft von *Chydorus sphaericus.*

11. *Chydorus sphaericus* O. F. MÜLL.

Eine der gemeinsten Arten. Auf ihren Schwanzkrallen sah ich in den meisten Fällen mindestens eine feine Strichelung, was HELLICH als Hauptmerkmal von *Chydorus punctatus* auffasst*; STINGELIN nimmt dies jedoch als gewöhnliche Eigenschaft des *sphaericus* in Text und Bild an.** STINGELIN schildert in genauen Messungen die Formveränderungen dieser Art von der Kugelform bis zur ovalen (die bei HELLICH schon *Chydorus globosus* wäre). Er fand sogar unter den Jungen die *Chydorus coelatus* genannte Formvarietät. All dies führte mich zu der Folge-

* Die Cladoceren Böhmens 1886.

** Die Cladoceren der Umgebung von Basel. Revue Suisse de Zoolog. 1895.

rung, dass *Chydorus coelatus* eine unsichere Art sei und *Chydorus sphaericus* sich durch Formvariationen an *Chydorus globosus* anschliesse. Eine solche Uebergangsform ist möglicherweise *Chydorus punctatus* HELL. Die Frage hinsichtlich dieser schwer zu unterscheidenden Arten wäre natürlich nur durch eingehende Vergleichung der Originalexemplare mit den Daten eines umfassenderen Gebietes zu lösen.

12. *Alona affinis* LEYD.

Eine gemeine Art, die auf dem Retyezát auch in den höchstgelegenen Gewässern vorkommt (2100 m) und auch in der Tátra häufig ist; ich sammelte sie an acht Punkten meines Gebietes. Die beste Abbildung (Postabdomen) enthält das obengenannte Werk STINGELIN's. *Alona oblonga*, welche DADAY im Feketeteiche fand, kann von dieser Art nur durch die Form des Postabdomens etwas abweichen. Dies ist jedoch ein so transitorischer Unterschied, dass ich diese kaum abweichenden Exemplare mit Berufung auf HELLICH („Die Cladoceren Böhmens" 1886) nicht als selbständige Art betrachten kann.

13. *Alona intermedia* SARS (Fig. 1 und 2).

Diese Art bezeichnete DADAY auf Grund der guten Abbildung und Diagnose, die sich in MÜLLER's „Danmarks Cladocera" befinden, — mit dem Namen *Alona guttata*. Später rectificiert MÜLLER („Naturhistorisk Tidsskrift" 1868/69, p. 355) die aus Irrthum vor die richtige Diagnose geratene Bezeichnung *„guttata"* auf *„intermedia"*, und aus diesem Grunde habe ich auch DADAY's Angabe abgeändert. SARS giebt eine recht mangelhafte Beschreibung dieser Art, demzufolge die Forscher unter diesem Namen verschiedene, irgend differierende Formen vereinigt zu haben scheinen. Bei HELLICH's und STINGELIN's *intermedia* ist der Pigmentfleck bedeutend grösser als das Auge, im Gegensatze zu den MÜLLER'schen und retyezáter Exem-

Fig. 1.

plaren. MÜLLER's Abbildungen zeigen jedoch eine rhombische Reticulierung der Schale mit concavem Bauchrande, während STINGELIN eine ausgesprochene Längsstreifung und einen welligen Ventralrand erwähnt.

Auf dem Retyezát fand ich die Weibchen dieser Art in dem kleinen Teiche oberhalb der Papusa-Stina* (1870 m) und in einem kleinen Tümpel bei der Buta-Stina. Meine Angaben sind nicht genügend, um den Nachweis zu führen, dass meine Exemplare von *Alona intermedia* wesentlich verschieden seien, d. i. dass die von mir beobachteten feineren Details bei ausländischen Thieren fehlen; ich fasse daher hier bloss die wichtigeren Merkmale zusammen:

Fig. 2.

1. Körper kurz, eiförmig, mit gerundetem hintern und etwas concavem, ventralen Rand.

2. Schale mit 13 scharfen Furchen gestreift.

3. Pigmentfleck rundlich, kleiner als das Auge.

4. Postabdomen am Ende abgerundet; Endkralle schwach gekerbt; beide Seiten des Postabdomens mit einer Reihe von Haargruppen versehen; die Dornreihe der Analkante beginnt mit einem einsamen Dorn; darauf folgen 3—4 doppelte und 2 bis 3 Gruppen von je 3 Dornen, dann mehrere kleine Dorngruppen, welche sich bis zum Analhöcker fortsetzen. Diese Randdornen divergieren nicht, sondern stehen parallel und der erste Dorn ist immer der längste in der Gruppe (Fig. 2).

5. Länge: 0,48 mm.

---

* Stina = Hirtenhütte.

II. Familie: Daphniidae.

14. *Moina brachiata* Jur.

Nahe dem Riu Mare oder Nagyvizbache fand ich diese Art in der erwähnten Regenpfütze in Gesellschaft von *Eucypris concha-cea;* in Folge dessen zähle ich sie nur als Hospesart zu der Fauna des Retyezát.

15. *Daphnia alpina* Daday (Fig. 3—6).

Bisher nur vom Retyezát bekannte Art, welche Daday nur in weiblichen Exemplaren in einer Pfütze fand. Auf Grund der kurzen lateinischen Diagnose in Daday's „Monographie der unga-

Fig. 3.

Fig. 4.

rischen Cladoceren" beschreiben sie C. L. Herrich und C. H. Turner in ihrer „Synopsis of the Entomostraca of Minnesota" als selbstständige Art, wogegen Richard sie nur für eine Formvarietät hält und sie zu *Daphnia obtusa* stellt. Nachdem ich in den Torfpfützen des Nechis- und Giudelethalhauptes nicht nur die ephippientragenden Weibchen, sondern auch Männchen beobachtete und diese von dem Männchen von *Daphnia obtusa* abweichend fand, kann ich die Artberechtigung von *Daphnia alpina* Daday bestätigen.

Die Beschreibung meiner Exemplare ist folgende:

Länge: ♀ = 1,5—2,1 mm; ♂ = 0,8—1,0 mm.

Des Weibchens Kopf ist breit und erreicht $^1/_4$ der Körperlänge; die Stirn ist abgerundet, an der Vorderkante tief, eckig ausgeschnitten; der Schnabel spitzig. (Fig. 3.) Der Fornix ist gut ausgebildet und verliert sich erst vor dem Auge. Die Schale ist breit, ihr Stachel fehlt gänzlich, sie endet in einem etwas dorsal liegenden stumpfen Winkel, während der Stachel der *obtusa* sogar auf dem Ephippium verbleibt, — wenn er nicht etwa ab-

Fig. 5.

Fig. 6.

gebrochen ist. Die Schalenoberfläche ist unregelmässig vieleckig reticuliert. Die Darmcoeca sind kurz und gerade. Der erste Abdominalfortsatz hat nur am Ende einige Borsten, der zweite und der dritte sind stark entwickelt und mit Borstengruppen besetzt, sowie auch die Seiten des Postabdomens. Das Postabdomen trägt meist 14 Randzähne und auf der Schwanzkralle einen elfdornigen Hauptkamm und einen Nebenkamm (Fig. 5). Dagegen ist beim Weibchen von *obtusa* der erste Abdominalfortsatz der längste und nur am Ende mit Stacheln bewehrt, der dritte breit, halbrund, das Postabdomen aber hat 11 Saumzähne und einen Kamm von 8 Dornen auf der Schwanzkralle.

Das Männchen hat einen runden Kopf und eine etwas concave Stirn (Fig. 4). Die Dorsalkante ist hinter dem Kopfe stark buckelig, wodurch das Thier eine charakteristische rhombische Gestalt erhält. Der Schalenstachel ist kurz, gerade und steht in der Mittellinie und ist wie das hintere Drittel der Schalenkante mit zerstreuten Dornen gesäumt. Die Schalenoberfläche hat eine unregelmässig polygonische Gitterung. Das erste Antennenpaar ist so lang, wie das zweite ohne Schwimmborsten; das Basalglied ist gebogen, cylindrisch, an der Innenseite vor dem Ende mit einem Riechstäbchenpinsel, auf der Aussenseite mit einer feinen Borste versehen; das Flagellum ist gebogen und so lang wie das Basalglied. Der erste Fortsatz des Abdomens ist stets sehr lang und dicht behaart, der zweite kahl und kaum entwickelt, die übrigen fehlen (Fig. 6). Das Postabdomen ist an den Seiten mit einer zarten Borstenreihe und auf der Dorsalkante mit 8—9 Saumzähnen bewaffnet. Der Doppelkamm der Schwanzkralle besitzt zweimal vier Zähne.

Als Hauptmerkmale sind hervorzuheben:

1. Der auffallende Habitus beider Geschlechter.
2. Die Zahl der Rand- und Krallenzähne.
3. Die Abdominalfortsätze des Männchens.
4. Der Bau der Vorderantennen des Männchens.

Letztere stimmen zwar überein mit den Antennen der *Daphnia obtusa* nach RICHARD's Beschreibung, umsomehr aber weichen sie ab von den Abbildungen von KURZ, des Autors, der das Flagellum auch im Text nur als wenig länger als die Riechstäbchen bezeichnet. (Dodekas Neuer Cladoceren. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien. 1875.)

16. *Daphnia obtusa* KURZ.

In einigen Lehmpfützen fand ich die Weibchen dieser Art. Neben *obtusa* stellt DADAY in der Fauna des Retyezát auch eine neue Art auf, nämlich *Daphnia brevispina**, in deren Beschreibung ich jedoch keinen artbestimmenden Unterschied fand, weshalb ich, der Auffassung RICHARD's mich anschliessend, dieselbe mit

* A magyarországi cladocerák magánrajza. 1888.

Daphnia obtusa für identisch betrachte. Der Schalenstachel der eiertragenden Weibchen steht immer in der Mittellinie und verbleibt häufig auf dem Ephippium. Am Hauptkamme zählte ich 7, am Postabdomenrand meist 11 Zähne. Diese Art lebt auch in der Tátra und der „Tengerszem"teich ist zugleich ihr höchster Fundort in Ungarn (1550 m).

17. *Daphnia longispina var. Leydigi* Hell.

Gemeines Thier der glacialen Hochgebirgsseen (1900—2200 m). Ich zähle sie — nach Richard* — zu jenen *Daphnia*-Arten ohne Nebenkamm, welche Daday in seinen Arbeiten über die Fauna des Retyezát unter dem Namen *Daphnia longispina* und *Daphnia lacustris* erwähnte. Von der letzteren sagt nämlich Richard*, dass unter diesem Namen in der Literatur meistens irgend eine Varietät von *Daphnia longispina* figuriere. Die Merkmale der ursprünglich von Sars und Richard beschriebenen *Daphnia lacustris* fehlen den retyezáter Exemplaren in der That. Für eine selbständige Art betrachte ich jedoch zufolge auffallender Unterschiede *Daphnia Zschokkei* (siehe 18.), die Richard zu den Varietäten von *Daphnia longispina* stellt. In solchen Fällen ist die Aufstellung von Varietäten nicht motiviert und schon im Interesse der einfacheren Benennung zu vermeiden.

Um mit der rectificierten Benennung keine Verwirrung zu verursachen, beschreibe ich kurz die von mir gesammelten Thiere.

Die constante Eigenthümlichkeit derselben ist der Bau des Abdomens, hinsichtlich dessen nur bei den Exemplaren aus dem Zseminyeteiche einige Abweichung vorkam (ein kürzerer erster Abdominalfortsatz). Das Abdomen trägt drei entwickelte Fortsätze, deren zwei erstere lang und an der Basis mit einander verwachsen sind (der zweite ist etwas kürzer und hat zurückgebogene Dörnchen am Ende), der dritte ist halbkreisförmig. Alle drei sind beinahe kahl. An den Seiten des Postabdomens sind feine Härchengruppen zerstreut, welche in 2—3, mit einander beinahe parallelen Reihen über die Randzähne (10—14, in der Regel 12) hinlaufen. Die letzten Randzähne scheiden sich oft in

* Revision des Cladoceres. Ann. d. Sciences Nat. 1896.

zwei- oder dreizähnigen Kämmchen. Die Schwanzkralle ist sichelförmig und fein, regelmässig bewimpert.

Ich selbst fand nur Weibchen; die reifen sind 2,0—2,2 mm lang, den kurzen Schalenstachel nicht gerechnet. Ihre Form ist veränderlich und zwar meinen Erfahrungen nach im Verhältniss mit der Grösse; derlei variierende Formen sind somit wahrscheinlich nicht Varietäten, sondern nur einander folgende Generationen. Diese Frage harrt jedenfalls einer physiologischen Erklärung und bis dahin giebt auch die RICHARD'sche Zusammenfassung der in der Literatur vorkommenden Beschreibungen keine Aufklärung.

18. *Daphnia Zschokkei* STINGELIN (Fig. 7).

Unter den RICHARD'schen Varietäten der vorigen Art wäre diese am besten charakterisiert; deshalb, sowie wegen ihrer speciallen Verbreitung ist es zweckmässiger, sie als selbständige Art zu betrachten. STINGELIN* entdeckte sie auf dem Grand Saint Bernard (2600 m), und seitdem wurde sie nur in Finnland und Norwegen gefunden; ich halte es daher für nothwendig, die ungarischen Exemplare des bisher selten erscheinenden Thieres zu beschreiben.

Fig. 7.

Die Hauptmerkmale derselben sind:

1. Die harten, sepiabraunen Schalen, deren Form (vom Kopfe abgesehen) einem regelmässigen Kreise sehr nahe kommt.

2. Der kurze, nach hinten gebogene Schalenstachel.

3. Der breite Kopf mit concaver Stirnlinie, der spitzige Schnabel und

* Zwei neue Cladoceren. Verh. d. Natf. Ges. Basel 1897.

4. Die grosse Zahl der Sommereier (20—25).
5. Länge: 2,0—2,5 mm.

Stimmt übrigens mit *var. Leydigi* ziemlich gut überein. An manchen Exemplaren war auch ein schwacher Nebenkamm zu erkennen; die letzten Randzähne sind auch bei diesen zuweilen doppelt oder dreifach.

Diese charakteristischen Alpenthiere fand ich auf dem Retyezát ausschliesslich in den höchstgelegenen kleinen Gewässern mit steinigem, seichten Boden, welche im Winter einfrieren. Diese Teiche liegen unter dem Bukuragipfel und zwar auf dessen westlicher und nordöstlicher Seite in 2100—2200 m Seehöhe. Diese Art ist für die ungarische Fauna eine interessante Bereicherung.

III. Familie: Branchipodidae.

19. *Branchipus diaphanus* PREV.

Diese Art wurde in Ungarn bisher nur auf den Bucsecs- und Retyezátalpen gesammelt; aus dem Comitat Zemplén ist die Varietät *Chyzeri* DAD. bekannt.

DADAY hat diese hübschen Thierchen auf seiner retyezáter Excursion im Feketeteiche und in einem Tümpel in der Nähe des Zenogasees gefunden. In ersterem giebt es auch jetzt noch viele *Branchipus*, an letzterer Stelle aber fand ich statt dieser bloss eine gut genährte Gesellschaft von Wassermolchen (Triton cristatus). Bezüglich ihrer Verbreitung erlangte ich manche neuere Angaben, indem ich sie in mehreren Teichen des Dobrunthalhauptes, in den drei Nachbarteichen des Bukarasees, in verschiedenen Tümpeln der Circusthäler Borescu, Vurvu Petri und Giudele, an letzterer Stelle auch in einem Torftümpel antraf. Es ist nicht ohne Interesse, dass ich in den zeitweiligen Tümpeln zahlreiche und grosse (16—20 mm) Exemplare fand, während sie in den grösseren Teichen nur einzeln umherschwammen oder sehr klein (5—10 mm) waren, wie z. B. in dem kleinen Teiche oberhalb des Bukarasees und im Feketeteiche. Aus dem Zenoga-, Bukara- und Zseminyesee wurden sie von den Fischen ausgerottet. Die von mir beobachteten Fundorte haben eine Lage von 1850 bis 2100 m Seehöhe. Mit Rücksicht auf die vor 16 Jahren

herstammenden Daten DADAY's können wir diese Thierchen von prachtvoller Farbentracht als beständige Bewohner des Retyezát betrachten, obwohl das Abnehmen ihrer Anzahl bei meiner zweiten Excursion an mehreren Stellen constatiert werden konnte.

IV. Ordnung: Amphipoda.

I. Familie: Gammaridae.

20. *Gammarus pulex* DE GEER.

Der Flohkrebs ist der einzige Entomostrake der retyezáter Bäche; an einer Stelle fand ich ihn jedoch in einem Teiche. Dieser, der Doppelteich im Centralbecken der Borescugruppe, wird von einer kleinen, langsam abfliessenden Wasserader durchzogen, und auch eine kalte Quelle entspringt auf seinem Grunde; derselbe kann also nicht als absolut stehendes Wasser bezeichnet werden.

* * *

Von den hier beschriebenen 20 Arten waren folgende aus der Fauna des Retyezát bisher nicht bekannt:

Cyclops affinis
Eucypris conchacea
Moina brachiata und
Gammarus pulex, ferner:

Daphnia longispina var. Leydigi und
Daphnia Zschokkei, welche auch für die Fauna von Ungarn neu sind; schliesslich neu für die Wissenschaft ist das Männchen von *Daphnia alpina*.

Zur Ergänzung dieser Angaben sind noch diejenigen Arten zu verzeichnen, welche DADAY ausser den schon erwähnten auf dem Retyezát sammelte, die ich jedoch nicht fand; es sind dies folgende:

1. *Cyclops alpestris* DADAY, wovon einige Weibchen im Zenogasee gefunden wurden.

2. *Cyclops nivalis* DADAY, welche SCHMEIL mit *Cyclops strenuus* für identisch hält. Die Originalexemplare sah ich nicht, nachdem ich jedoch *Cyclops strenuus* in mehreren Teichen fand,

halte ich es für möglich, dass unter diesem Namen abnormale Exemplare jener Art mit 10-gliederigen Antennen beschrieben wurden.

3. *Canthocamptus ornatus* DADAY.

(Diese drei Arten wurden bisher nirgends anderswo gefunden.)

4. *Canthocamptus echinatus* MRZ., nach DADAY aus dem Bukurasee.

5. *Alona Leydigi* SCHÖDL., von welchen DADAY einige Exemplare im Zseminyeteiche fand.

6. *Camptocercus Lilljeborgi* SCHÖDL., von welchen DADAY einige leere Schalen im Zseminyeteiche fand.

7. *Daphnia Schäfferi* BAIRD., von welchen DADAY Exemplare im Zseminyeteiche sammelte.

8. *Daphnia caudata* SARS., nach DADAY im Zenogasee.

Besonders interessant sind ferner:

9. *Cyclops viridis* JUR.
10. *Cypris ornata* O. F. MÜLL.
11. *Daphnia pellucida* O. F. MÜLL.
12. *Daphnia psittacea* BAIRD.

Diese spielten als Bewohner von Regenpfützen bloss eine ephemere Rolle auf dem Retyezát (Pelcsinye), und ganz natürlich fand ich sie während meines dortigen Aufenthalts nicht mehr vor. Hierzu zähle ich jene Arten DADAY's nicht, welche in meinen Angaben unter einem andern Namen stehen.

(Alona guttata = Alona intermedia,
Alona oblonga = Alona affinis,
Daphnia brevispina = Daphnia obtusa,
Cyclops agilis = Cyclops serrulatus,
Diaptomus castor = Diaptomus tatricus.)

* * *

Die hier verzeichneten Thierarten bevölkern die grösseren und kleineren stehenden Gewässer des Retyezát, mit Ausnahme von *Gammarus pulex*, welcher nur in denjenigen Seen gedeiht, welche von einem Bache durchflossen werden.

Diese stehenden Gewässer nun habe ich auf Grund eingehender Untersuchung nach vier geographischen Typen gruppiert und mit

Ueberraschung wahrgenommen, dass jede dieser Typen ihre eigenen Arten besitzt. Aus der beigegebenen tabellarischen Zusammenstellung der Daten nach dem Vorkommen in den einzelnen Seen wird es nämlich ersichtlich, dass *das Erscheinen der Crustaceenarten mit der physikalischen Beschaffenheit des betreffenden Wassers in engem Zusammenhange steht.*

Zum Beweis dessen seien die Verhältnisse der durchforschten Gewässer nach den erwähnten vier Kategorien hier kurz skizziert.

1. Gleichwie in den lehmigen Niederungen entstehen auch in den breiteren Thälern des Gebirges nach einem Regen hier und da *Pfützen voll trüben Wassers,* welche nach einigen Tagen wieder austrocknen. Diese Pfützen werden zuweilen in unglaublich kurzer Zeit belebt infolge der Keime, welche Wind oder Sturm vorher hingefegt hatten. In dem Thale des Nagyviz gerieth ich einmal in 635 m Höhe und circa 7 Kilometer von der Thalmündung entfernt an eine solche Pfütze, in welcher *Eucypris conchacea* und *Moina brachiata* förmlich wimmelten; es sind beide häufige Arten, welche nur zufällig in das Hochgebirge gelangt sein konnten, wo sie bisher noch nicht angetroffen wurden. Nach Verlauf eines Monats aber fand ich die Stelle wieder eingetrocknet. Bei Pelcsinye fand DADAY auf einem flachen Bergrücken ein ähnliches Wasser, worin die obenerwähnten Arten *Cyclops viridis, Eucypris ornata, Daphnia pellucida* und *psittacea* vorkamen.

Derlei zufällig in die von Nord nach Süd verlaufenden Hauptthäler gerathene Arten sind jedoch *ebensowenig ständige Bewohner* der Alpen, wie die durchziehenden Wandervögel. Wenn ihr Heim, die kleine Pfütze, nicht vertrocknet, so fegt der nächste Gussregen diese winzigen Kämpfer ums Dasein von hinnen. Nachdem die betreffenden Stellen gegen Norden liegen und der breite, wolkenbrechende Höhenzug dieselben gegen die Südwinde abschliesst, so kann ihre Fauna offenbar nur aus dem Hátszeger Becken herstammen.

2. Eine höhere Lage (1600—1900 m) haben jene kleineren Wasserspiegel, welche stellenweise die Matten der Hochplateaus beleben. Dieselben entstehen zumeist in Vertiefungen, welche ursprünglich Seitenmulden eines Gletscherzuges bildeten, nun aber

durch die Sedimente der Gewässer bereits nahezu ausgefüllt sind; *ihr Grund ist daher stets lehmig.* Sie bieten die günstigsten Lebensbedingungen, und ich fand darin die *meisten Thiere* (zehn Arten). Ein solcher Tümpel bei Buta-Stina war mit grasartigen Pflanzen bewachsen, wogegen der im Barasculthale, sowie der Papusateich von kleinen Algen ganz geröthet erschien; oberhalb des Galbinabaches aber liegen 5—6 solcher Tümpel an der Kante des nördlichen Abhanges. Von den Bewohnern derselben hebe ich *Cyclops affinis*, *Alona intermedia* und *Daphnia obtusa* hervor, welche Arten ich in anderweitigen Wässern nicht antraf. Es ist jedoch zu bemerken, dass man es hier wahrscheinlich abermals mit einer Einwanderung zu thun hat, indem die nördlich des wasserscheidenden Bergkammes Stenuletye-Drechsan nirgends anzutreffenden zwei Arten: *Alona intermedia* und *Cyclops affinis* sicherlich aus dem Thale der Román-Zsil in den bei Buta Stina befindlichen Tümpel zeitweiligen Charakters gelangten, die eine Art, *Alona intermedia*, sogar noch höher, d. i. in den auf einem 1600 m hohen Bergrücken liegenden Papusateich. Dieselben sind somit wohl mit Recht zu den Hospesarten zu zählen und der Buta- und Papusatümpel sind ihre höchstgelegenen Fundorte in Ungarn.

3. Während die vorigen beiden Typen zur subalpinen Region gehören, sind die zwei anderen, die Torfmoore und Hochgebirgsseen auf die eigentliche alpine Region beschränkt und überschreiten die Schneegrenze der Eiszeit nicht, welche hier, im Hinblick auf die untersten Moränen, durchschnittlich mit 1900 m anzunehmen ist.

Die zwischen den Abzweigungen des Bergrückens gelegenen breiten, runden Thalmulden waren dereinst Firnsammelmulden, aus welchen kurze Eiskarren in die Thäler hinabreichten. Das Zurückziehen derselben bezeichnen jene Endmoränen, welche als Reihen von transversalen Steindämmen die Wasseradern zu Hochgebirgsseen (ungarisch „tengerszem“ = Meerauge) anschwellen lassen. Ebenso sind an den Stellen der Gletscherhobelung jene Torflager entstanden, deren Risse hier und da mit Wasser angefüllt sind.

In diesen *Wässern mit Torfgrund* können nicht alle Arten

existieren; ich fand darin bloss die gemeinen Arten *Branchipus diaphanus* und *Diaptomus tatricus* ausser der charakteristischen *Daphnia alpina*, welche ich hingegen ausschliesslich nur in den Torfmooren des Giudele- und Nechisthales zu sammeln vermochte. In einigen Wässern ähnlicher Art, welche von einer schwachen, kleinen Wasserader durchflossen werden, fand ich jedoch kein einziges Thier.

4. Die meisten Teiche aber sind in Vertiefungen *glacialen Ursprungs mit Felsengrund* situiert. Sie liegen insgesammt in einer Seehöhe von 1900—2200 m, entspringen aus einem höher gelegenen See oder Quell, und ihr Abfluss bricht sich durch die Steinschanze des Moränendammes Bahn; es sind mithin nicht absolut stehende Wässer. Das Wasser derselben ist sehr kalt, besonders derjenigen, welche von irgend einem ständigen Schneefleck gespeist werden. Ihre Tiefe kann, der Böschung nach zu schliessen, kaum mehr als 15—20 m betragen, manche aber sind so seicht, dass sie im Winter bis zum Grunde zufrieren. Dagegen frieren die grösseren Seen vermuthlich auch im Winter nicht bis zum Grunde zu, und dem ist es meiner Ansicht nach zuzuschreiben, dass *Branchipus*, welcher — wie bekannt — auch unter dem Eise vegetiert, in diesen Seen zufolge der unausgesetzten Fortpflanzung nicht die Grösse erreicht, wie die Artengenossen, welche in den Winters einfrierenden kleineren Teichen leben und folglich aus zeitweilig ruhenden Eiern herrühren. Der physiologische Grund hierfür ist noch nicht bekannt, der Zusammenhang zwischen der Ueberwinterung der Eier und dem Grössenverhältnisse der verschiedenen Generationen aber ist sicher zu erkennen.

Hinsichtlich der Lebensbedingungen in diesen Seen ist noch zu bemerken, dass die Schlammablagerung in denselben zufolge ihrer kristallklaren Speisewässer eine äusserst geringe ist; auf den reinen, wie gepflastert erscheinenden Granitstücken des Grundes findet sich kaum einiges Sediment, oder ist auch dies nur ein Product der localen Verwitterung des Gesteins. Aus diesem Grunde ist die Vegetation hier eine sehr spärliche und im höheren Niveau ist mit freiem Auge keine Spur von der Vegetation zu sehen. Auch dies ist ein Grund für die Armuth der Fauna an

Individuen, auf welche wir noch zurückkommen. Phanerogame Wasserpflanzen fand ich bloss in dem Skerisoara-, Zenoga- und Borescusee. Es ist übrigens anzunehmen, dass die reiche Fauna des Skerisoara-, Zseminye- und Feketesees im Zusammenhange steht mit der üppigen Grasvegetation der Ufer, denn die von den Gräsern hineinfallenden Insecten bieten sicherlich manchem untergeordneten Organismus die Existenzbedingungen. Dagegen schreibe ich den Faunamangel des unterhalb des kleinen Zenogasees romantisch gelegenen kleinen Torfsees dem Umstande zu, dass das undurchdringliche Dickicht der sie umgebenden Zwergtanne (Pinus Mughus Scop.) die Luft gleichsam infiltriert und damit das Dahingelangen von organischen Keimen verhindert. Trotz alledem sind die Hochgebirgsseen *am reichsten an Arten* (15).

Im allgemeinen fanden sich in manchen Seen sehr viele, in anderen wenig oder kaum einige Thiere, wieder in anderen aber gar keine. Der Grund hiervon beruht ausser in dem obenerwähnten Umstande entweder darin, dass der betreffende Teich (wie z. B. einige Teiche des Bukurathales) von einem reissenden Bache durchflossen wird, dessen Strömung diesen winzigen Geschöpfen, welche nicht stromaufwärts zu schwimmen vermögen, selbst an den Ufern keine Zuflucht lässt, oder aber die ungünstige Lage des Teiches, wenn derselbe nämlich in einem so engen Thalkessel liegt, welcher gegen die herrschenden Windrichtungen durch einen hohen Bergrücken geschützt ist. Sehr gute Beispiele hierfür sind die herrlichen kleinen Wasserspiegel, welche in den nach Süden geöffneten Thalmulden der Vurvu-Maregruppe liegen. Nur in dem einen derselben fand ich ein einziges Exemplar von *Cyclops strenuus*. Auch in dem Teiche oberhalb der Buta-Stina fand ich keine Crustaceen, obgleich in dem grasigen Tümpel bei der Stina sich mehrere interessante Arten vorfanden. Diejenigen Seen, welche die reichste Fauna aufweisen, liegen nördlich des in der Richtung von Ost nach West hinziehenden Hauptrückens, wie der Zseminye- und der Feketeteich nebst den benachbarten kleineren Wasserspiegeln, welcher Umstand gleichfalls für den obenerwähnten Zusammenhang spricht, welcher im Hinblick auf die herrschenden Nordwinde zwischen der Crustaceenfauna des Retyezátgebirges und der Ebene von Hátszeg besteht.

Auch in den Hochgebirgsseen findet sich unter anderen eine Art, welche in anderartigen Seen nicht vorkommt; dies ist: *Daphnia Zschokkei*. Allein die meisten Arten der Hochgebirgsseen meiden auch die unter den drei ersteren Kategorien erwähnten Wässer; es sind dies folgende:

Cyclops serrulatus,
Cyclops strenuus,
Canthocamptus staphylinus,
Diaptomus bacillifer,
Alona affinis,
Daphnia longispina v. Leydigi,
Daphnia Zschokkei,
Gammarus pulex.

Dagegen kommen in den Teichen mit Lehmboden auch Bewohner der Hochgebirgsseen vor, so die folgenden Arten:

Cyclops vernalis,
Cypria ophthalmica,
Chydorus globosus,
Chydorus sphaericus.

Schliesslich sind *Diaptomus tatricus* und *Branchipus diaphanus* wahre Kosmopoliten der retyezáter Gewässer, welche nur in der Regenpfütze bei dem Nagyviz fehlten.

Es ist nicht uninteressant, den heutigen Stand der Crustaceenfauna mit dem vor 15 Jahren zu vergleichen. Als ein Grund für die Veränderung ist auch, hauptsächlich bezüglich der nördlichen Seen, die gelegentliche Einwanderung zu betrachten. Die auffallende Verarmung der Fauna des Bukura- und Zenogasees aber ist nur den in dieselben eingelassenen Forellen zuzuschreiben; dort wo DADAY im Jahre 1894 in einer Wassersäule von 18 m Länge und 15 cm Durchmesser noch 0,06—0,08 gr lebende Thiere fand, vermochte ich vier Jahre später bloss einige Crustaceen zu fischen; manche der Arten sind ganz ausgestorben. Im Jahre 1899 aber war in dem Bukurasee keine einzige Crustacee mehr zu finden. Die Anzahl der Fische hat sehr zugenommen, dieselben erreichen jedoch angeblich nicht mehr die Grösse, wie ehedem, als an Futter kein Mangel war.

* * *

Das Vorgebrachte lässt sich in folgendem kurz resümieren:

I. *In den stehenden Wässern des Retyezát leben derzeit 20 Crustaceenarten.*

Die häufigsten sind:

Diaptomus tatricus,
Chydorus sphaericus,
Daphnia longispina v. Leydigi.

Die meist charakteristischen sind:

Daphnia alpina,
Daphnia Zschokkei,
Branchipus diaphanus.

II. *Die Teiche lassen sich sowohl nach ihrer Genesis, als nach ihrer charakteristischen Fauna in vier gut unterschiedene Typen eintheilen.* Es sind dies folgende:

1. Ephemere Regenpfützen.
2. Ständige Tümpel mit Lehmgrund.
3. Gewässer mit Torfgrund.
4. Hochgebirgsseen.

III. *Auf das Leben und die Verbreitung der Crustaceen übt den grössten Einfluss aus:*

1. Die Lage und der Bodengrund der Seen.
2. Die Vegetation des Grundes und des Ufers.
3. Der chemische Zustand, die Temperatur und Tiefe des Wassers.
4. Die Bewegungsverhältnisse des Wassers und der Atmosphäre.

* * *

Die Daten meiner Sammelergebnisse habe ich auf beigeschlossener Tabelle zusammengestellt. Die kleineren Teiche der Circusthäler, soweit sie gleichartiger Natur sind, haben in meinen Aufzeichnungen keine Sonderstellung.

Anhang.

Seitdem ich vorliegende Arbeit beendigt (November 1899), sind zwei hochwichtige Werke erschienen, welche ihres Stoffes und ihrer Richtung zufolge meine Studien nahe berühren. Ich

kann es nicht unterlassen, derselben zu gedenken, nachdem mich grossentheils gerade das Erscheinen dieser Werke ermuthigt hat, meine Beobachtungen zu veröffentlichen.

Das eine dieser Werke ist G. BURCKHARDT's „Faunistische und systematische Studien über das Zooplankton der grösseren Seen der Schweiz und ihrer Grenzgebiete". (Inauguraldissert. Extrait de la Revue Suisse de Zoologie. 1899.) Genève 1900. Der Verfasser beschreibt darin, als Vorstudium zu seinen Forschungen über die Biologie des Vierwaldstädter Sees, die Thierwelt des Planktons der Schweizer Seen, und zwar hauptsächlich in systematischer Hinsicht. Der Verfasser hat seine Forschungen gleichzeitig mit mir angestellt; da er jedoch sein Augenmerk nur auf das Plankton, auf die pelagischen Bewohner der Seen richtete, welche ich zu meinem Leidwesen gerade nicht zu sammeln vermochte, so bietet sich in unseren beiderseitigen Daten wenig Anlass zur Vergleichung.

Drei Arten aber erwähnt BURCKHARDT, welche ich gleichfalls gesammelt habe und welche demnach sowohl in der Uferfauna der Retyezáter Teiche, als auch in der Planktonfauna der Schweizer Seen vorhanden sind. Es sind dies folgende:

Cyclops serrulatus,
Cyclops strenuus,
Diaptomus bacillifer.

Letztere bezeichnet BURCKHARDT irrig als „alpine Art" (p. 672), denn die von ihm angezogenen zahlreichen Publicationen DADAY's bezeugen es, was ich übrigens aus eigener Erfahrung bestätigen kann, dass dies Thier auch in den Gewässern der mittelungarischen Puszten eine sehr häufige Erscheinung ist.

Allein weit mehr als all das interessiert mich momentan das Bestreben BURCKHARDT's hinsichtlich der Würdigung der geographischen Verhältnisse, und hier kann ich mit Freude konstatieren, dass sich unsere Bestrebungen begegnen. Zum Schlusse seines Werkes (p. 683) versucht er nämlich eine Gruppierung der Seen, welche das Auftreten und die Vertheilung der Arten nach den physikalischen Verhältnissen im ganzen ebenso darthut, wie die Ergebnisse meiner Beobachtungen. Dass er in dieser Hinsicht zu keinen befriedigenden Resultaten gelangte, wird da-

Verbreitung der Crustaceen

	Typus der Gewässer	Pfütze	Torfmoor		Kleinere Teiche mit lehmigem Becken			
	Benennung der Gewässer	Pfütze am Nagyvizebache	Gludeleteich	Nechäteich	Tümpel bei d. Buta-Stina	Pfütze am Baraculbache	Gallinathalteiche	Papusateich
	Seehöhe in Metern	635	1900	1940	1600	1850	1860	1866
Copepoda	Cyclops serrulatus	—	—	—	—	—	—	—
	— vernalis	—	—	—	—	—	+	—
	— affinis	—	—	—	+	—	—	—
	— strenuus	—	—	—	—	—	—	—
	— sp. juv.	—	—	—	—	—	—	+
	Canthocamptus staphylinus	—	—	—	—	—	—	—
	Diaptomus bacillifer	—	-	—	—	—	—	—
	— tatricus	—	+	+	+	+	+	+
Ostracoda	Cypria ophthalmica	—	—	—	—	—	+	+
	Eucypris conchacea	+	—	—	—	—	—	—
Phyllopoda	Chydorus globosus	—	—	—	+	—	+	+
	— sphaericus	—	—	—	—	—	+	—
	Alona affinis	—	—	—	—	—	—	—
	— intermedia	—	—	—	+	—	—	+
	Moina brachiata	+	—	—	—	—	—	—
	Daphnia alpina	—	+	+	—	—	—	—
	— obtusa	—	—	—	+	+	+	+
	— longispina var. Leydigi	—	—	—	—	—	—	—
	— Zschokkei	—	—	—	—	—	—	—
	Branchipus diaphanus	—	+	+	—	+	+	—
Amphipoda	Gammarus pulex	—	—	—	—	—	—	—

in den Gewässern des Retyezát.

Glaciale Hochgebirgsseen mit steinigem Boden

Doppelteich auf d. Borescuberg.	Kleiner Zenogatsich	Nechisteich	Jezerteich	Skerisoarateich	Zenogateich	KL Teich unter d. Bukurasee	Feketeteich (Teu Negru)	Bukurateich	Kleiner Pelagateich	Giudeleteich	Kleiner Teich auf dem Vurvu Mare	Grosser Pelagateich	Zsemlyeteich-gruppe	Kleine Teiche üb d. Bukurasee
1899	1936	1938	1958	1986	2001	2010	2014	2041	2080	2100	2120	2122	2100—2200	
—	+	—	+	—	+	+	+	+	—	+	—	—	+	+
—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	+	—	—	+	+	—	—	+	+	+	—
—	—	+	—	—	—	—	+	+	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—
—	—	—	—	—	—	—	+	—	+	—	—	+	+	+
+	+	—	—	—	+	+	—	—	—	—	—	—	—	—
+	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
+	+	—	+	—	+	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	+	+	+	—	+	+	+	+	+	—	—	+	+
—	—	—	+	+	+	+	+	+	—	—	—	—	—	+
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	+	+	—	+	+	+	+	+	—	+	—	+	+	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	+	—	—	—	+
—	—	+	—	—	—	+	+	—	—	+	—	—	+	+
+	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

durch verursacht, dass er in seiner Eintheilung nicht auf die Berücksichtigung der *sämmtlichen* geographischen und ökologischen Verhältnisse bedacht war. Seine Eintheilung ist folgende:

I. Grosse Seen der Ebene.
   1. Ganz tiefe, kalte Seen ohne seichte Partien.
   2. Tiefe Seen und ganz tiefe, warme Seen.
   3. Wenig tiefe Seen.

II. Kleine Seen der Ebene.
III. Alpenseen (über 750 m).
IV. Gebirgsseen des Schwarzwaldes und des Jura.

Mithin bestätigt auch BURCKHARDT's Zusammenstellung, dass *gewisse Seetypen gewissen Artgenossenschaften entsprechen.*

Das andere Werk ist Dr. F. ZSCHOKKE's „Die Thierwelt der Hochgebirgsseen. 1900". Es wäre unbescheiden von mir, wenn ich zwischen dem monumentalen Werk dieses grossen Gelehrten und meinen lückenhaften Aufzeichnungen eine Parallele ziehen wollte; ich werde es mir vielmehr zur Ehre anrechnen, das Werk von ZSCHOKKE gelegentlich eingehender zu besprechen und den ungarischen Gelehrten als nachahmenswerthes Beispiel vorzuführen. An dieser Stelle möchte ich bloss zwei Punkte berühren, und zwar den auf die Crustaceen bezüglichen Abschnitt und die zielbewusste Beachtung der physikalischen Verhältnisse.

Der specielle Theil des Werkes schildert in systematischer Reihenfolge das Vorkommen der Süsswasserthiere auf den Gebirgen und zwar unter Vergleichung der Erfahrungen des Verfassers mit den literarischen Angaben. Ueber die von mir verzeichneten Arten fand ich nachstehende Daten.

Cyclops strenuus ist die verbreitetste und charakteristischste *Cyclops*art der Gewässer der kalten Gegenden. Auch *Cyclops vernalis* und *serrulatus* sind auf den Schweizer Alpen häufig, selten ist dagegen *Cyclops affinis*, welcher dort höchstens bei 1460 m gefunden wurde, während mein Fundort in einer Höhe von 1600 m liegt.

Diaptomus bacillifer hält auch ZSCHOKKE, gleichwie BURCKHARDT für ein typisches Hochgebirgsthier und erwähnt nur einen ungarischen Fundort unter 1000 m. *Diaptomus tatricus*, diese

für die Tátra und den Retyezát charakteristische Art wird in den Schweizer Alpen durch andere Arten substituirt.

Die kosmopolitische Art *Canthocamptus staphylinus* ist auch in den Schweizer Alpen weit verbreitet.

Von den Ostracoden ist *Cypria ophthalmica* ein häufiger Bewohner der hochgelegenen Schweizer Seen.

Schliesslich werden von den Cladoceren des Retyezát folgende als Bewohner der Schweizer Hochgebirgsseen genannt: *Daphnia Zschokkei, Daphnia obtusa* (1800 m), *Alona affinis, Chydorus globosus, Chydorus sphaericus* und mehrere Formen von *Daphnia longispina.* Es ist ganz natürlich, dass dieselben in den Schweizer Alpen auch weit höher noch vorkommen, als auf dem 1511 m hohen Retyezát.

Anderseits aber — und dies gereicht mir zu grösserer Freude, als alle übereinstimmenden Daten — erblicke ich in den weitgreifenden Beobachtungen, durch welche ZSCHOKKE den Zusammenhang der physikalischen und biologischen Verhältnisse der Hochgebirgsseen zu beleuchten trachtet, die Richtigkeit meiner eigenen Bestrebungen bestätigt.

6.

NEUERE BEITRÄGE ZUR TERTIÄREN DECAPODENFAUNA UNGARNS.

(Mit zwei Tafeln.)

Von E. LÖRENTHEY.

Der erste Theil jener paläontologischen Studien, welche ich seit mehreren Jahren an den tertiären Decapoden bewerkstellige, erschien im Jahre 1898 unter dem Titel: „Palaeontologiai tanulmányok a harmadkorú rákok köréből“* (Paläontologische Studien über Tertiärdecapoden). Dieser enthält zwei Mitteilungen: I. „Adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához“ und II. „A müncheni állami gyüjteményekben lévö harmadkorbeli rövidfarkú rákok“, welche deutsch in den Természetrajzi Füzetek (A musaeo nationali hungarico Budapestinensi vulgato) Bd. XXI im selben Jahre unter den Titeln: „Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs“ und „Ueber die Brachyuren der paläontologischen Sammlung des bayrischen Staates“ erschienen sind. Diesen beiden und der dritten Mittheilung: „Andorina és Daránya, két uj ráknem Magyarországból“** — deutsch: „Andorina und Daránya, zwei neue Brachyurengattungen aus Ungarn“; Math. u. Naturwiss. Berichte aus Ungarn Bd. XVII. 1901 — reihe ich diese vierte an, welche ungarisch in den Math. u. Termtud. Közlemények (Bd. XXVII) unter dem Titel „Ujabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához“ erschienen ist.

Zu dieser meiner neueren Mittheilung habe ich das Material ebenfalls von Mehreren bekommen.

---

* Math. és Termtud. Közlemények. (Math. u. Naturwiss. Mitth. der ung. Acad. d. Wiss.) Bd. XXVII. No. 2.

** Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. No. 5.

So hatte Universitätsprofessor Herr Dr. ANTON KOCH die Liebenswürdigkeit, mir ein sehr interessantes Material zu geben, welches er in den Tertiärbildungen der Siebenbürger Landestheile aufsammelte. Ein noch interessanteres Material ist jenes, welches Polytechnicumsprofessor Herr Dr. ALEXANDER SCHMIDT Jahre hindurch am Budapester Kis-Svábhegy und im Szépvölgy sammelte und voriges Jahr der kön. ung. Geologischen Anstalt gab. Dies reiche Material zum Studium mir zu überlassen hatte Ministerials-Sectionsrath Herr JOHANN BÖCKH, Director der Geologischen Landesanstalt, die Güte. Als ich mir vor zwei Jahren die Sammlungen der Universität zu Freiburg (im Breisgau) besah, fiel mir sofort eine Krabbe auf, welche vom Budapester Kis-Svábhegy herrührte. Diese überliess mir im Tausche für anderes Material Universitätsprofessor, Director der geologischen und paläontologischen Sammlungen, Herr Dr. G. STEINMANN. Eine sehr interessante kleine Krabbe bekam ich auch vom Staatsgeologen Herrn AUREL LIFFA. Wollen sie Alle für ihre liebenswürdige Unterstützung meinen Dank entgegennehmen.

Das hier zu beschreibende Material stammt aus zwei verschiedenen Niveaux: und zwar aus dem oberen Grobkalk von Szucság (Com. Kolozs) und dem Numulitenkalk des oberen Eocens vom Kis-Svábhegy und Szépvölgy.

Der grösste Theil dieses neuen Materials stammt von dem bisher bekannten reichsten Fundort her, vom Budapester Kis-Svábhegy, von welchem BITTNER in seinem über meine Arbeit geschriebenen Referate in den Verhandl. d. k. k. Geol. R. A. Jahrg. 1898 S. 405 sagt, dass „... der Kis-Svábhegy (Kleinschwabenberg) die bisher bekannte reichste Fundstelle an Brachyuren ist". In der Beschreibung der tertiären Decapodenfauna Ungarns erwähne ich auf Seite 121, dass mit den vom Kis-Svábhegy beschriebenen 30 Arten die reiche Fauna noch nicht erschöpft sei, nachdem ich schon damals mehrere, von den beschriebenen abweichende, undeterminierbare Exemplare von hier besass. Eines darunter entpuppte sich auf Grund eines besseren Exemplares als eine neue Gattung, welche ich später *Darányia* benannte. Ueberdies beschreibe ich von hier in folgendem noch eine neue Gattung und eine neue Art.

BANCROFT

Macrura, Latr.

Thalassinidae.

1. Calianassa rapax, Bittn.

[Taf. I, Fig. 5a, 5b.]

1893. *Calianassa rapax, Bittn.* Bittner: Decapoden des pannonischen Tertiärs. [Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wiss. in Wien. Bd. CII. P. 14. Tab. I. Fig. 4.]

1897. *Calianassa rapax, Bittn.* Lörenthey: Adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. [Math. és Termtud. Értesitö. Bd. XV. P. 151.]

1898. *Calianassa rapax, Bittn.* Lörenthey: Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. P. 94 u. 114.

1898. *Calianassa rapax, Bittn.* Lörenthey: Palaeontologiai tanulmányok a harmadkorú rákok köréböl. [Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. P. 8 u. 155.]

1898. *Calianassa rapax, Bittn.* Lörenthey: Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs. [Természetrajzi Füzetek XXI. P. 4 u. 120.]

1901. *Calianassa rapax, Bittn.* Lörenthey: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 804 (4). Tab. I. Fig. 5.

Bittner kannte nur den beweglichen Finger einer rechten und einer linken Hand, als er die Rapax-Art aus den Oligocänablagerungen des Kolozsvárer Törökvágás beschrieb. Ich erhielt vom Univ.-Prof. Koch eine ganze linke Hand, welche die Selbstständigkeit der Art noch mehr bekräftigt. Ein mangelhafter Theil des Unterarmes ist auch vorhanden, worüber ich jedoch, da er schlecht erhalten ist, nichts von Belang zu berichten vermag. Die Hand ist bedeutend länger als breit, auf ihrer Aussenfläche wenig convex und wie auf ihrer ganzen Oberfläche, so auch auf ihren Kanten jeder Verzierung bar. Die Innenfläche ist beschädigt, eingedrückt und somit nicht zu studieren. Der Index ist schmal, spitzig, aussen auf der oberen Parthie mit scharfer Leiste versehen. Auf seiner Innenfläche befindet sich ebenfalls eine obere Leiste, welche jedoch bedeutend schwächer ist, als die äussere. Vom Finger besagte alles Nöthige Bittner, ich kann höchstens nur soviel bemerken, dass auf der Greiffläche meines Exemplares die Zähnchen des Sägerandes ungleichmässiger sind, als auf der Figur Bittner's, indem bei meiner Form, auf dem rechten Finger, welchen auch Bittner kannte, jedoch nicht

abbildete, mehrere kleine Zähne gruppiert und von den Nachbarzähnen oder Zahngruppen schärfer geschieden sind. Die Hand und der Index stimmen mit jenen der *ferox** überein, nur die Löcher der Borsten oder Borstenbüschel sind hier anders vertheilt. Auf der inneren Seite, unter der oberen Kante finden sich auch hier, wie bei *ferox*, zahlreiche vertical stehende Einschnitte (Löcher) vor. Auf der äusseren oberen Kante des Index befindet sich eine ganze Reihe von runden Löchern, in welche Borsten eingefügt waren. In der Nähe des unteren Saumes der Gelenköffnung befindet sich auch ein ziemlich grosses längliches Loch, in welchem wahrscheinlich ein ganzes Borstenbündel gewesen. Uebrigens zeigt die Abbildung die Anordnung der Löcher deutlich, weshalb eine weitere Beschreibung überflüssig ist.

Fundort: Die von Prof. KOCH erhaltene linke Scheerenhand stammt aus mittleren Oligocänschichten von Mérá im Comitat Kolozs. Aus Schichten gleichen Alters beschreibt BITTNER an angeführter Stelle: eine *Neptunus sp.*, weiter die neuen Arten *Calianassa ferox*, *C. rapax*, *C. velox* und *C. simplex*.

Anomura, M. Edw.

Galatheidae.

Palaeomunida, nov. gen.

Ungezählte Male fanden schon jene Palaeontologen, welche sich mit den Brachyuren befassen, so REUSS, BELL, A. MILNE EDWARDS und BITTNER, es sei überaus schwierig, ja beinahe unmöglich, die nähere Verwandtschaft der fossilen Brachyuren mit den lebenden so zu bestimmen, dass es den Anforderungen entsprechend sei. Dies verhält sich besonders bei jenen wenigen fossilen Arten so, welche aus der Subordo *Anomura* bekannt sind. Die fossilen Reste derselben bestehen in einigen Scheeren, so denjenigen der von FISCHER-BENZON** beschriebenen, aus der

---

* Calianassa ferox, BITTNER: Decapoden d. pann. Tertiärs. P. 12. Tab. I. Fig. 8—12.

** Ueber das relative Alter des Faxoe-Kalkes und über die in demselben vorkommenden Anomuren und Brachyuren. Kiel 1866.

Kreideformation stammenden *Galathea* und jenen von *Pagurus priscus, Brocc.**, deren Hergehörigkeit nicht als über allen Zweifeln stehend zu betrachten ist.

Bittner sagt, indem er von der Notwendigkeit einer Revision des jetzigen künstlichen Systems spricht, unter anderem, man müsse sich, solange das System keiner Revision unterzogen werde, in den meisten Fällen mit einer pünktlichen Beschreibung begnügen, ohne die systematische Lage der in Rede stehenden Form fixieren zu wollen. Eben deshalb ist es auch nicht meine Absicht, die hier unter dem Namen *Palaeomunida* zu beschreibende Form endgültig zu den *Anomuren* zu zählen; ich führe sie vielmehr nur in die Literatur ein, bis ihre systematische Lage auf Grund besseren Materials mit vollkommener Sicherheit festzustellen ist und gebe ihr einen Namen, welcher ihr Verhältniss zu den bisher bekannten Formen ausdrückt. Da sie am meisten an die auf der *Hermite-Insel* lebenden *Munida subrugosa, Dana*** erinnert, heisse ich sie *Palaeomunida*, indem ich damit zum Ausdruck bringen wollte, dass meine Form eine schon vor langer Zeit ausgestorbene Vertreterin der lebenden Gruppe sein konnte. Der Name dient so nur zur Bezeichnung und wir vermehren die Namen nur, um Irrthümer zu umgehen, da es unmöglich ist, die mangelhaft erhaltenen fossilen Decapoden in die zwischen allzu enge Grenzen gedrängten Gattungen der lebenden Formen einzufügen. Natürlich werden auch bei den lebenden Formen viele Gattungen überflüssig werden, wenn dereinst auf Grund der fossilen Formen die Descendenz der lebenden festgestellt sein wird. Somit hat Bittner vollkommen recht, wenn er sagt: „Solange wir die Entwicklungsreihen nicht kennen, bedeutet ein neuer Genusname nichts anderes, als die Unkenntnis der näheren verwandtschaftlichen Verhältnisse der Form, welcher er beigelegt wird.“ Deshalb hält er es für zweckmässig, viele neue Arten zugleich auch als neue Gattungen zu betrachten.

---

* Brocchi: Note sur les crustacés fossiles des terrains tertiaires de la Hongrie. (Ann. d. sc. géol. XIV. P. 7. Pl. V. Fig. 9. Paris 1883.)

** Dana J. D. Crustacea of the U. S. Exploring Expedition (in the Pacific Ocean) Part I. P. 479. Pl. 30. Fig. 7. Philadelphia 1852.

Da nur der mangelhafte Cephalothorax vorhanden ist und alle übrigen wesentlichen Theile fehlen, ist es sehr schwer, die Verwandtschaft festzustellen. Es scheint, als stünde meine Form in der Gattung *Munida* der Familie *Galatheidae* am nächsten. Wo meine Form definitiv hingehört, wird erst auf Grund besseren Materials constatiert werden können, möge bis dahin die pünktliche Beschreibung genügen.

2. Palaeomunida defecta, nov. sp.

[Taf. I, Fig. 3.]

1901. *Palaeomunida defecta nov. sp.* Lörenthey: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rakfaunájához. P. 807 (7). Tab. I. Fig. 3.

Der Cephalothorax, welcher länger als breit ist, zeigt sich in der Richtung der Breite etwas convexer, als in jener des Längsdurchmessers. Der Vorderrand fehlt. Die Seiten sind beiläufig mit fünf nach vorn allmählich wachsenden, und durch mindestens noch zwei, vor jenen befindlichen, kleineren scharfen Zähnen geziert. Der Hinterrand ist schwach gebogen. Die Oberfläche des Cephalothorax zeigt wellig verlaufende Querleisten, worunter nicht jede von einer Seite zur anderen reicht, sondern etwa in der Mitte endigt und sich somit nicht über die ganze Oberfläche erstreckt. Die Gastralregion wird von einer tiefen U-förmigen Nackenfurche begrenzt, welche sich gegen ihre vorderen Enden in zwei theilt. Der hintere Zweig dieser Nackenfurche endigt beiläufig in der Mitte des Seitenrandes, von rückwärts gezählt zwischen dem dritten und vierten, der vordere aber hinter dem fünften schwachen Dorn. Hinter dieser Nackenfurche befindet sich eine kurze, sich auf die mittlere Partie des Cephalothorax beschränkende, schwach gebogene, tiefe Furche.

Soweit aus dem vorhandenen Theil geurtheilt werden kann, wäre dies vom Budapester Kis-Svábhegy stammende Exemplar am ehesten für eine *Munida* oder *Grimothea* zu betrachten, obzwar das Frontaltheil fehlt und daher nicht constatiert werden kann, ob es — wie bei *Munida* oder *Grimothea* — aus einem langen mittleren und zwei seitlichen Dornen bestehe. Während sich bei *Munida* auf dem Seitenrand circa 5, bei *Grimothea* 9—10 kleine Zähne befinden,

besitzt die *Palaeomunida* beiläufig 7 derselben, welche auf den Enden der die Oberfläche bedeckenden Leisten angeordnet sind. Die Oberfläche ist auch auf meiner Form mit Querleisten versehen, welche wahrscheinlich Borsten trugen, wie jene der lebenden *Munida subrugosa, ? Dana** oder der *Grimothea gregaria (Fabr.) Leach***. Ausser den bisherigen besteht ein Hauptcharacter, welcher meine Form der *Munida* und *Grimothea* näher bringt, in jener U-förmigen Nackenfurche, welche sich gegen ihre Enden in zwei teilt und bis zum Seitenrand erstreckt, gerade so, wie bei jenen. Letztere entbehren jedoch jener kleinen, tiefen Furche, welche sich hinter der Nackenfurche von *Palaeomunida* befindet. Auch die *Galathea latirostris, Dana**** stimmt bezüglich der Oberflächenornamentik mit der *Palaeomunida* in vielem überein, unterscheidet sich von derselben jedoch ganz wesentlich, was einen weiteren Vergleich überflüssig macht. Davon, dass die *Palaeomunida* trotz der grossen Aehnlichkeit sowohl von der *Galathea-* als auch von der *Grimothea*-Gattung abweicht, kann sich jedermann durch den Vergleich meiner Abbildungen mit jenen DANA's überzeugen. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist *Palaeomunida defecta* jene Urform, welcher die lebende *Munida* und *Grimothea* entstammen. Beide lebenden Formen bewohnen die heisse Zone. *Munida subrugosa ? (White) Dana* kommt in der Umgebung der *Hermite-Insel, Grimothea gregaria, Leach* jedoch in der Oranje-Bay vor.

Fundort: Staatsgeologe AUREL LIFFA sammelte diese Form in jenem, an kleinen Foraminiferen reichen, gelblichen Kalkstein des bei *Budapest* gelegenen *Kis-Svábhegy* auf, welcher über den *Numm. intermedia, d'Arch.* und *Numm. Fichteli, d'Arch.* führenden, *Lithothamnienreichen* graulichen Kalkstein gelagert ist.

Brachyura, Latr.

3. Ranina Bittneri nov. sp.

[Taf. I, Fig. 1—2.]

1875. *Ranina nov. sp.?* BITTNER: Brachyuren des vicentinischen Tertiärgebirges. P. 66. Taf. I. Fig. 3 *a—b*.

* DANA J. D. Crustacea. Part. I. P. 479. Pl. 30. Fig. 7.
** DANA J. D. Crustacea. Part. I. P. 483. Pl. 31. Fig. 1.
*** DANA J. D. Crustacea. Part. I. P. 480. Pl. 30. Fig. 8.

1897. *Ranina cfr. Marestiana, König.* Lörenthey: Math. és Termtud. Értesítö Bd. XV. P. 151 und 167.

1898. *Ranina cfr. Marestiana, König.* Lörenthey: Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. P. 96.

1898. *Ranina cfr. Marestiana, König.* Lörenthey: Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. P. 29 u. 151.

1898. *Ranina cfr. Marestiana, König.* Lörenthey: Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs. [Természetrajzi Füzetek. Bd. XXI. P. 22 u. 118.]

1901. *Ranina Bittneri, nov. sp.* Lörenthey: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 809 (9). Tab. I. Fig. 1—2.

Der grösste Breitendurchmesser des Cephalothorax befindet sich vor der Mittellinie. Von den beiden Enden desselben ausgehend zieht sich der Rand des Cephalothorax in beinahe gerader Linie nach hinten, so dass also der Cephalothorax allmählich schmäler wird. Er verschmälert sich jedoch von diesem Durchmesser aus auch nach vorn, und zwar schneller, als gegen rückwärts. Der ganze Cephalothorax ist mit Ausnahme des Vorderrandes von einer mit Tuberkeln übersäten Leiste umgeben. In der Mitte des Frontalrandes befindet sich ein dreitheiliger breiter Zahn, der in der Mitte stark eingedrückt und in der Mittellinie mit starken, spitzen Tuberkeln verziert ist. Der Vorderrand zieht sich von der Basis des ebenfalls dreitheiligen Mittelzahnes in beinahe gerader Linie bis zu den beiden Seiteneinschnitten. Darauf folgt an jeder Seite je ein schmaler, wenig vorragender, spitzer Seitenzahn. Der zweite Seitenzahn ist mehr lappenförmig, an der Innenfläche schräg abgeschnitten, während er an seinem Aussenrande in einem kräftig hervortretenden Theil endigt. Der Vorderrand ist von einen Saume eingefasst, welcher mit sehr feiner Granulation besetzt ist. Der Vorderrand ist mit kleineren und grösseren Tuberkeln übersät, welche besonders zahlreich auf dem mittleren grossen Lappen sind, während sie auf den Seitenzähnen beinahe vollständig fehlen. Stellenweise sind auf grösseren Exemplaren mehrere Höcker zu förmlichen gekörnelten Warzen vereinigt. Die den Cephalothorax zierenden Querleisten sind sehr regelmässig. Die Vorderleiste ist sehr kurz, beschränkt sich nur auf die Mitte des Cephalothorax und ist entweder ganz gerade oder nach vorn schwach convex; seltener ist sie sehr mässig concav.

Die zweite Leiste erstreckt sich von einem Seitenrand zum andern, nach vorn einen concaven Bogen bildend; die dritte ist unvollkommen, da sie nur an beiden Seiten und in der Mitte entwickelt ist. Die vierte, fünfte und sechste Leiste gleicht der zweiten. Die siebente ist ebenfalls unvollständig, da sie sich nur auf die Ränder beschränkt. Darauf folgen vier Leisten, welche sich wieder über den ganzen Cephalothorax erstrecken und weniger concav sind; die zwei letzten derselben sind beinahe ganz gerade. Die zwei mittleren von den vieren werden in der Mitte von den Branchio-Cardiacalfurchen unterbrochen. Die darauf folgenden Leisten stehen dichter, ihr Verlauf ist mehr oder weniger unregelmässig, indem sie sich mit Unterbrechungen und ineinanderfliessend von einer Seite zur anderen erstrecken. Die dritte und fünfte Leiste endigen am Rande des Cephalothorax an beiden Seiten in kräftige Dornen, deren vordere die grösseren sind. Die Leisten sind beinahe so breit wie der Frontalrand, dabei flach und scheinen einander wie die Ziegeln des Daches zu decken, so dass die Zahnreihen am besten hervortreten. Die Zähne der Leisten sind sehr klein, kurz, stumpf, mit den Spitzen nach oben und ein wenig nach vorn gerichtet. Die Zwischenräume, welche die Zähne von einander trennen, sind in der Mitte des Cephalothorax so breit, wie die Zähne selbst, während sie gegen die Ränder desselben, wo die Zähne grösser und spärlicher werden, breiter sind. Stellenweise sind auch auf der Oberfläche unregelmässig verstreute Tuberkel zu finden, welche am hinteren Theil des Cephalothorax manchmal in Reihen angeordnet sind. Auch sind hie und da die Leisten von kleinen runden Tuberkeln, welche in mehrere Reihen verstreut sind, bedeckt. Um von den Massen der *Bittneri* und dem Verhältnisse, in welchem dieselbe zu den verwandten Formen steht, ein entsprechendes Bild zu entwerfen, stelle ich folgende Maasse neben einander:

	Bittneri:		*Reussi:*	*Marestiana:*
Breite	29 mm	41 mm	43 mm	36 mm
Länge	36 „	50 „	52 „	45 „
Höhe	4,5 „	4 „	9 „	— „
Länge des Frontalrandes	13 „	22 „	20 „	20 „

Auf Seite 22 meiner „Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs" erwähne ich unter dem Namen *Ranina cfr. Marestiana, König* ein von HANTKEN aufgefundenes mangelhaftes Exemplar. Hier hob ich hervor, dass dieses zufolge der Structur seines Frontalrandes nicht mit der *Marestiana*, sondern mit der von BITTNER unter dem Namen *Ranina nov. sp.?* beschriebenen und abgebildeten Form übereinstimmt, da ausser dem dreitheiligen mittleren Lappen nur zwei zahnförmige Seitenlappen vorhanden sind, so wie *Reussi* und nicht drei, wie bei *Marestiana*. Auf diesem mangelhaften Exemplar waren die Charactere nicht deutlich zu erkennen, weshalb ich es mit mehreren anderen ebenfalls mangelhaften Exemplaren zusammen als in den Formenkreis der *Marestiana* gehörige, nicht näher bestimmbare Formen anführte. Seitdem fand ich selbst ein unversehrtes Exemplar (Taf. I, Fig. 2) und bekam auch von der Geologischen Landesanstalt mehrere unverletzte und brüchige Exemplare aus der SCHMIDT'schen Sammlung, welche mich davon überzeugten, dass hier eine neue Species vorliege, welche sowohl von der *Marestiana*, als auch von der *Reussi* abweicht, doch letzterer näher steht. Von dem HANTKEN'schen mangelhaften Exemplar, welches mit Calcitcryställchen bedeckt ist, sagte ich an bereits erwähnter Stelle folgendes: „Da *Reussi* sich als sehr constante Art erweist, bin ich gezwungen, diese Form abzutrennen und bin geneigt, BITTNER's *nov. spec.?* als junges, unentwickeltes Exemplar mit meiner Form zusammen zu *Marestiana* zu ziehen." Jetzt aber, da ich mich im Besitze unversehrter Exemplare befinde, sehe ich, dass diese Form von der *Marestiana* in Vielem abweicht, sowohl in der Entwicklung des Frontalrandes, als auch in Bezug auf den Verlauf und die Verzierung jener Leisten, welche den Cephalothorax bedecken. Weitere Unterschiede zwischen meiner Form und der *Marestiana* sind noch folgende: Der grösste Breitendurchmesser meiner Form liegt ein gut Theil vor der Mittellinie, fällt bei der *Marestiana* jedoch beinahe in dieselbe; meine Form wird sowohl nach vorn, als auch nach hinten vom Breitendurchmesser ab viel schneller schmäler, als die *Marestiana;* endlich ist der Frontalrand der *Marestiana* viel breiter. Somit ist es unnöthig, meine Form mit derselben weiter zu vergleichen. Da jedoch all die Charactere, welche sie von der

Marestiana entfernen, der *Reussi* näher bringen, entsteht die Nothwendigkeit, zwischen diesen beiden eine Parallele zu ziehen.

Die äussere Form der *Bittneri* stimmt mit jener der *Reussi* überein mit dem Unterschiede, dass erstere um ein Beträchtliches flacher ist, wie dies auch aus der obigen Maassangabe erhellt. Der mittlere Fortsatz des dreitheiligen Zahnes am Frontalrande ist in der Mittellinie kräftiger eingedrückt als bei *Reussi*, und die hier befindlichen Tuberkel sind um so augenfälliger. Während sich der Vorderrand der *Bittneri* von der Basis des Mittelzahnes beinahe in gerader Linie bis zu den beiden Seiteneinschnitten hinzieht, ist derselbe bei der *Reussi* viel kräftiger gebogen, da er nach vorn einen concaven Bogen bildet. Die Seitenzähne sind sich bei beiden Arten gleich. Der Rand des Frontaltheiles ist ebenfalls bei beiden gekörnelt. Der Hauptunterschied zwischen diesen zwei Arten besteht in der Structur und Verzierung der die Oberfläche bedeckenden Querleisten. Bei *Reussi* reichen die drei ersten Leisten beinahe ohne Unterbrechung von einer Seite zur anderen, und zwar so, dass sie in der Mitte einen Winkel bilden, dessen Spitze nach vorn gerichtet ist, während bei der *Bittneri* sich die erste Leiste nur auf die Mitte, die dritte nur auf die Mitte und die Ränder beschränkt und sich bloss die zweite, vierte, fünfte und sechste von einer Seite zur anderen erstreckt. Ausserdem bilden dieselben bei *Bittneri* keinen nach vorn gerichteten Winkel, sondern einen nach vorn concaven Bogen. Die Querleisten stehen am Hintertheil des Cephalothorax bei *Bittneri* dichter und ihr Verlauf ist unregelmässiger, wie bei *Reussi*, doch stehen sie vorn wieder bei der *Reussi* dichter. Während mit Ausnahme der Zähnelung der Querleisten und der den Frontalrand bedeckenden Tuberkeln die ganze Oberfläche der *Reussi* glatt ist, finden sich auf jener der *Bittneri* hie und da Höcker, welche besonders am Hintertheile des Cephalothorax zahlreicher werden und beinahe ganze Reihen bilden. Die dritte und fünfte Querleiste endigen an beiden Seiten in je einen spitzen Dorn, wie bei *Reussi* die zweite und vierte, so jedoch, dass bei beiden die vorderen Dornen die kräftigeren sind. Bezüglich der Zähnelung der Leisten ist der Unterschied zwischen den beiden Arten am grössten. Die Leisten der *Bittneri* sind breiter, ihre Zähne

kleiner, die Zwischenräume der kleinen stumpfen Zähne schmäler. Die Spitzen der Zähne sind mehr nach oben gerichtet wie bei der *Reussi*. Während bei dieser die Zähne gegen die Ränder des Schildes minder dicht stehen, sind sie bei *Bittneri* gerade umgekehrt in der Mitte am dichtesten und werden gegen die Ränder schütterer. Dementsprechend sind die Zwischenräume derselben bei der *Reussi* gegen die Ränder schmäler, während sie bei *Bittneri* gerade hier am breitesten sind. Die Querleisten sind breit, flach, doch fehlt von ihren hinteren Enden dort, wo sie die folgende Leiste berühren, bei der *Bittneri* jene Furche, welche bei *Reussi* vorhanden ist. Die Querleisten der *Reussi* sind breiter, wie die der *Marestiana*, die der *Bittneri* wieder breiter, wie die der *Reussi*. Die Furchen der Branchio-Cardiacalregion sind bei der *Reussi* etwas stärker ausgebildet.

Ich glaube, es ist gerechtfertigt, wenn ich auf Grund des bisher Gesagten die hier beschriebene Form getrennt von der *Reussi* als neue Species betrachte. Jetzt möchte ich nur noch mit einigen Worten darthun, inwiefern die bei BITTNER unter dem Namen *nov. sp.?* vom Monte Sugelo beschriebene jugendliche *Bittneri* von den Kis-Svábhegyer entwickelten Exemplare abweicht. Auf dem Exemplar vom Monte Sugelo sind die Granulationen des Frontalrandes „nirgends zu förmlich gekörnelten Warzen vereinigt", wie dies auf jenen vom Kis-Svábhegy stellenweise zu beobachten ist. Während weiter die erste jener Leisten, welche den Cephalothorax zieren, mangelhaft ist und einen nach vorn gerichteten Winkel bildet, ist dieser Winkel auf den Kis-Svábhegyer Exemplaren schwächer, so dass die kurze Leiste eher einen nach vorn schwach convexen Bogen aufweist oder gerade verläuft oder aber manchmal auch sehr wenig concav ist. Diese Unterschiede können nicht als wesentliche gelten, da die Hauptcharactere, welche da sind: Entwicklung des Frontalrandes, Form, Vertheilung und Zähnelung der den Cephalothorax zierenden Querleisten, — auf den Formen der beiden Fundorte übereinstimmen. Die aufgezählten Unterschiede können um so weniger als wesentliche in Betracht kommen, da sie sich nicht auf ständige, sondern auf solche Charactere beziehen, welche bei den einzelnen Exemplaren veränderlich sind.

Fundort: Diese Form beschreibt 1875* BITTNER als fragliche neue Species aus dem Niveau des Hauptnummulitenkalkes vom Monte Sugelo aus einem dichten weissen Kalkstein und setzt hinzu, dass sein einziges mangelhaftes Exemplar vielleicht eine jugendliche *Ranina Marestiana, König* sei; im Jahre 1883 schreibt er darüber, es wäre nicht unmöglich, dass sie mit der *Reussi* identisch ist.** Mein mangelhaftes Exemplar zählte ich in der Beschreibung der Decapodenfauna Ungarns — nebst Erwähnung der abweichenden Eigenschaften — zu jenen nicht mit Sicherheit bestimmbaren Formen, welche ich unter dem Namen *Ranina cfr. Marestiana* zusammenfasste. Jetzt aber, da ich mich auf Grund unversehrter Exemplare davon überzeugte, dass die Formen des Kis-Svábhegy mit jenen des Monte Sugelo identisch und dieselben thatsächlich die Vertreter einer neuen Form sind, benenne ich sie nach ihrem ersten Beschreiber ALEXANDER BITTNER. Ausser dem Monte Sugeloer Exemplar ist mir eines aus dem gelblichen Orbitoidenkalk des Budapester Szépvölgy bekannt und weiter zwölf, theils unversehrte, theils brüchige Exemplare von dem Kis-Svábhegyer berühmten Fundorte, aus dem gelblichen foraminiferenreichen Kalkstein.

4. Phrynolambrus corallinus, Bittn.

[Taf. II, Fig. 4—6.]

1893. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* BITTNER: Decapoden des pannonischen Tertiärs. P. 19.

1897. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* LÖRENTHEY: Math. és Termtud. Értesítő. XV. Bd. P. 151 u. 154.

1898. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* LÖRENTHEY: Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. P. 97.

1898. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* LÖRENTHEY: Math. és Termtud. Közlemények. XXVII. Bd. P. 46.

1898. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* LÖRENTHEY: Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs. [Természetrajzi füzetek. Bd. XXI. P. 35 u. 119.]

1901. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* LÖRENTHEY: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 814 (14). Taf. II. Fig. 4—6.

---

* BITTNER: Brachyuren des vicentinischen Tertiärgebirges. S. 66.

** BITTNER: Neue Beiträge zur Kenntniss der Brachyurenfauna des Alttertiärs von Vicenza und Verona. S. 303.

Bisher waren nur Bruchstücke dieser Art bekannt. Prof. SCHMIDT sammelte jedoch ausser dem Bruchstücke eines grossen drei Exemplare, welche um vieles besser erhalten sind als die bisherigen und welche abzubilden ich für nothwendig erachte. Die hier zur Darstellung gebrachten Exemplare bestätigen, was ich in meiner Beschreibung der Decapodenfauna Ungarns erwähnte, dass nämlich die Exemplare des Kis-Svábhegy meist kleiner sind, als die aus dem jüngeren Bryozoenmergel von Kolozsmonostor beschriebenen. Eines der Kis-Svábhegyer überzeugte mich auch davon, dass der Stirnrand auf der reconstruierten Figur, welche BITTNER auf Grund der bisher von Kolozsmonostor bekannten drei Bruchstücke gegeben hat, etwas mehr nach vorn gezogen ist, als es thatsächlich der Fall.

Fundort: Die in Rede stehenden Exemplare stammen ebenfalls aus dem an Decapoden reichsten Niveau des Kis-Svábhegy, aus dem auf dem Lithothamnienkalk liegenden, gelblichen, foraminiferenreichen Kalkstein.

5. Phlyctenodes Steinmanni, nov. sp.

[Taf. I, Fig. 4.]

1901. *Phlyctenodes Steinmanni, nov. sp.* LÖRENTHEY: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 815 (15). Taf. I. Fig. 4.

Der Cephalothorax ist in der Richtung des Breitendurchmessers mässig, in jener des Längsdurchmessers jedoch stärker convex. Die einzelnen Regionen der Oberfläche sind —, insofern dies auf meinem mangelhaften Exemplare zu beurtheilen ist — gut von einander getrennt. Die mittleren, also die Gastral- und Cardiacalregionen, sind durch kräftige Furchen von den, wie es scheint vereinten Hepatical- und Branchialregionen geschieden. Die Gastralregion zerfällt — wie bei *Ph. Hantkeni, Lörent.* — in eine vorn befindliche Proto-Epigastral- und eine mittlere Meso-Urogastralregion. Die Furchen der Branchiogastral- und der Branchiocardiacalregion sind auch hier, wie bei *Hantkeni* am kräftigsten und erstrecken sich wahrscheinlich vom Orbital- bis zum Hinterrand. Die Cardiacalregion, welche annähernd die Form eines verkehrten Dreiecks besitzt, ist von der Meso-Urogastralregion scharf getrennt, aber besonders von der Branchialregion. Diese

neue Species ist über ihre ganze Oberfläche von in Reihen angeordneten, gegen rückwärts allmählich kleiner werdenden Tuberkeln bedeckt. Auf der Proto-Epigastralregion befinden sich drei Reihen solcher Höcker. Etwas kleiner sind die Tuberkeln auf der fünfeckigen Meso-Urogastralregion, welche vier Reihen von je drei Höckern, zusammen also zwölf Tuberkeln, aufweist; überdies ist ein dreizehntes in der Furche zwischen den Proto-Epigastralregionen vorhanden. Noch kleiner sind die auf der Cardiacalregion unregelmässig verstreuten Tuberkeln. Die Branchialregionen sind lädiert, somit ist von deren Verzierung wenig zu sagen, soviel ist jedoch ersichtlich, dass dieselben von grossen Höckern bedeckt sind, welche in mindestens vier — möglicherweise auch in mehr — Reihen angeordnet sind. Es scheint, dass auch die Branchialregion in Subregionen zerfällt, soweit das vorhandene Bruchstück eine Beurtheilung zulässt. Sie wird nämlich von einer scharfen Furche durchzogen, welche die Fortsetzung der, die Proto-Epigastralregionen von der Meso-Urogastralregion trennenden Furche bildet und wahrscheinlich die Epi- und Mesobranchialregion von einander scheidet. Die stark vorspringende Stirn ist ziemlich breit und wird von einer starken Furche in ihrer Mitte geteilt, welche die Fortsetzung jener Furche bildet, die sich zwischen den Proto-Mesogastralregionen dahinzieht. Die Augenhöhlen sind gross, die Orbitalränder geschwellt.

Meine Form stimmt bezüglich der Regionvertheilung mit *Ph. Hantkeni, Lörent.*, mit Hinsicht auf die Art der die Oberfläche bedeckenden Tuberkeln jedoch mit *Ph. Krenneri, Lörent.* überein; da die Höcker der ersteren Species aus mehreren kleineren Tuberkeln zusammengesetzt erscheinen, während sie bei *Krenneri* und meiner neuen Form einfach sind. Die Grösse ist jene von *Hantkeni*, da ich von letzterer ein Exemplar kenne, welches beträchtlich grösser ist, als das abgebildete, während *Steinmanni* doppelt so gross ist, wie *Krenneri*. Meine Form stimmt in Grösse und Verzierung auch mit der von BITTNER aus den Alttertiärbildungen von Avesa beschriebenen *Phlyctenodes Nicolisi, Bittn.** ziemlich

* A. BITTNER: Beiträge zur Kenntniss tertiärer Brachyurenfaunen. [Denkschrift d. k. Akad. d. Wiss. Wien. Bd. XLVIII. P. 17. Taf. 1 Fig. 5.] 1884.

überein, welche jedoch mit kleineren, unregelmässiger verstreuten Tuberkeln bedeckt ist. Ueberdies weicht mein Exemplar durch die Form seiner Meso-Urogastral- und Cardiacalregion von *Nicolisi* in so hohem Maasse ab, dass jeder weitere Vergleich überflüssig wird.

Zur Orientierung über die Grössenverhältnisse mögen hier die Maasse von *Hantkeni* und *Nicolisi* neben jenen meiner Form stehen:

	Steinmanni:	*Hantkeni:*		*Nicolisi:*
Breite	ca. 25 mm	11 mm	23 mm	28,5 mm
Länge	„ 18 „	8 „	14 „	20 „
Breite der Stirn	10 „	3,5 „	9 „	10 „
Durchmesser d. Augenhöhle	3 „	2 „	— „	5 „

Fundort: Ein einziges mangelhaftes Exemplar bekam ich von Dr. G. STEINMANN, Professor an der Universität zu Freiburg (i. Br.), welches aus dem an Decapoden reichsten, auf dem Lithothamnienkalk gelagerten, gelblichen, reichlich kleine Foraminiferen führenden Kalkstein des Kis-Svábhegy stammt, in dem übrigens auch Lithothamnien und Orbitoides ziemlich häufig sind.

Diese Art benenne ich zu Ehren des Prof. Herrn G. STEINMANN.

6. Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.?

[Taf. II, Fig. 1.]

1865. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.* A. MILNE EDWARDS. Monogr. d. crustacés foss. de la fam. d. Cancériens. P. 277. Pl. XVII. Fig. 3 u. 4.

1897. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.* LÖRENTHEY: Math. és Termtud. Értesítö. Bd. XV. P. 155 u. 167.

1898. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.* LÖRENTHEY: Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. P. 99 u. 113.

1898. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.* LÖRENTHEY: Math. és Termtud. Közlemények. Bd. XXVII. P. 73 u. 153.

1898. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.* LÖRENTHEY: Természetrajzi Füzetek. Bd. XXI. P. 57 u. 119.

1901. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.?* LÖRENTHEY: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 817 (17). Taf. II. Fig. 1.

Meine Form stimmt mit dem bei MILNE EDWARDS in Figur 3 dargestellten reconstruierten Exemplar am besten überein, da ihr Vorderrand ebenfalls mit fünf Dornen verziert ist, während auf meinem brüchigen Exemplar wie auf EDWARDS' Fig. 4 allem

Anscheine nach sechs solcher Dornen vorhanden waren. Der Vorderrand meiner Form ist etwas gebogener und demzufolge fällt der Breitendurchmesser gerade in die Mitte, während er auf den Figuren von EDWARDS etwas mehr nach vorn zu liegen kommt. Der Stirnrand meiner Form ist in der Mitte stärker eingeschnitten und die beiden Loben desselben sind mehr gebogen, als jene der französischen Exemplare. Dies sind jedoch so geringfügige Abweichungen, dass sie eher als locale, wie specifische betrachtet werden müssen, um so mehr da sich Unterschiede von solcher Grösse auch zwischen den französischen Exemplaren vorfinden, wovon die Figuren 3 und 4 von M. EDWARDS wohl ein beredtes Zeugniss liefern.

Fundort. In meinen „Beiträge zur Decapodenfauna des ungarischen Tertiärs" that ich dieser Species, von der ich ein vorderes rechtes Drittel ihres Cephalothoraxes im foraminiferenreichen gelblichen Kalkstein des Budapester Kis-Svábhegy fand, bereits Erwähnung. Neuerdings spendete Dr. ALEXANDER SCHMIDT der Geologischen Anstalt einen vollkommen unverletzten Cephalothorax, welchen er im lithothamnienreichen Orbitoidenkalk des Budapester Szépvölgy auffand. In dem, das Exemplar umschliessenden Kalkstein finden sich noch vor: Steinkerne von *Orbitoides sp., Orbitolites complanata, Lam., Cristellaria sp.* und anderen Foraminiferen, so auch ein an *Lunulites* erinnernder Schnitt.

Telphusograpsus, nov. gen.

So wie die nächste Verwandte der *Palaecomunida* die lebende *Munida* ist, ist die der *Telphusograpsus* die *Telphusa*. Da jedoch unter diesen nicht eine fossile Gattung mit dem lebenden verwandten Genus zu identificieren ist, und da auch keine anderen nahen Verwandten bekannt sind, bin ich gezwungen, auch diese Form für eine neue Gattung zu nehmen, um so mehr, da zwischen *Telphusograpsus* und *Telphusa* eine riesige Altersverschiedenheit obwaltet.

Die schon im Miocän in fossilem Zustande vorkommende *Telphusa* weicht wesentlich von der Mitteläocen-Gattung *Telphusograpsus* nur insofern ab, dass ihr Orbitalrand im Gegensatze zur *Telphusa* gegliedert ist. Dies wäre für sich eine zu geringe

Eigenschaft, als dass sie einer generischen Trennung als Unterlage dienen könnte, da in ein und derselben Gattung Arten mit glattem und gegliedertem Orbitalrand vorkommen. Es ist jedoch höchst wahrscheinlich, da zwischen den beiden Arten — wenigstens nach unserem bisherigen Wissen — ein riesiger Altersunterschied ist, die Lebensweise ebenfalls abweichend ist, dass auch andere Differenzen vorhanden sein mussten, welche sich nicht auf die Oberfläche des Cephalothorax beschränkten, sondern auf anderen Körpertheilen vorkamen und somit auf den bisher bekannten zwei Cephalothorax nicht zu studieren sind. Die Scheidung der bisher zu beschreibenden Szucságer Exemplare von der *Telphusa*gattung erscheint ausser den in der Entwicklung des Orbitalrandes und in der verticalen Verbreitung zu Tage tretenden Unterschieden noch dadurch gerechtfertigt, dass sie im Gegensatze zur continentalen *Telphusa* Meeresbewohner waren und demzufolge auch in anatomischer Hinsicht wesentlich verschieden sein mussten.

Jedenfalls muss *Telphusograpsus* als Ahne der *Telphusa* betrachtet und der Grund für die zwischen ihnen vorhandenen Unterschiede in der Anpassung an die veränderten Existenzbedingungen gesucht werden. Das Verhältniss, in welchem *Telphusograpsus* zur *Telphusa* steht, beweist abermals, dass die continentalen Formen von den marinen abstammen.

7. Telphusograpsus laevis nov. sp.

[Taf. II, Fig. 2 und Fig. 3.]

1901 *Telphusograpsus laevis, nov. sp.* Lörenthey: Újabb adatok Magyarország harmadkorú rákfaunájához. P. 819 (19). Taf. II. Fig. 2—3.

Der beinahe viereckige, an den Seiten abgerundete, nach rückwärts schmäler werdende Cephalothorax ist um Weniges breiter als lang und in der Richtung des Längendurchmessers ebenso wie in der des Breitendurchmessers sehr mässig concav. In letzterer Richtung ist die Verbindungslinie der hintersten Zähne des vorderen Seitenrandes am meisten erhaben. Der vordere Seitenrand geht, einen schwachen Bogen bildend, unvermerkt in den hinteren Seitenrand über. Der Frontalrand bildet im Vereine

mit den Augenhöhlen mehr als zwei Drittel der Breite des Cephalothorax. Der verhältnissmässig schmale und gerade Stirnrand ist kaum abwärts gebogen. In der Mitte der Stirn ist ein so schwacher Einschnitt vorhanden, dass er auch mit der Lupe kaum sichtbar ist; somit ist dieselbe eigentlich nicht in zwei Lappen getheilt. Die Stirn wird gegen die Augenhöhlen von je einer Furche begrenzt. Im Vergleich zur Stirn ist die Augenhöhle breit. Der Orbitalrand erscheint zufolge einer hinter demselben befindlichen Furche geschwellt, obzwar er scharf und glatt ist. Auf dem äusseren Drittel der Augenhöhlen befinden sich je zwei Einschnitte. Diese führen folgende Gliederung des Orbitalrandes herbei: Der Superciliartheil ist am grössten, der praeorbitale — welcher nach aussen von einer schwächeren Furche begrenzt wird, als einwärts — ist schmal und der etwas breitere extraorbitale Theil wird von der vorderen Lobe des vorderen Seitenrandes gebildet. Der vordere Seitenrand zerfällt in drei Lappen, die jedoch durch kaum wahrnehmbare Einschnitte von einander getrennt sind, so dass dem blossen Auge der ganze vordere Seitenrand nur durch eine einfache Leiste geziert erscheint. Dort, wo sich der lange, schwach gebogene Hinterrand mit dem nahezu geraden hinteren Seitenrand vereinigt, weist er einen für die Gehfüsse bestimmten Ausschnitt auf. Den ganzen Hinterrand umsäumt eine glatte Leiste, welche gegen vorn von einer Furche begrenzt wird. Die einzelnen Regionen sind nur sehr mässig von einander getrennt, da bestimmte Furchen kaum vorhanden sind, nur etwaige Einsenkungen zeigen die Grenzen der einzelnen Regionen an. Von bestimmten scharfen Furchen wird nur die Cardiacalregion umgeben. Diese erscheint nämlich vorn gegen die Uro-Gastralregion durch eine nahezu gerade, nach hinten einen mässig convexen Bogen beschreibende, ziemlich tiefe Furche und gegen die Branchialregion durch zwei halbmondförmige Furchen begrenzt, während sie von dem Hinterrand nur eine schwache Vertiefung trennt. Diese Furchen sind bei den entwickelteren Exemplaren stärker, bei den jüngeren schwächer. Abdomen und Gliedmaassen sind unbekannt.

Um von der Proportion der einzelnen Theile und der Grösse der Form ein vollkommenes Bild zu bieten, mögen hier die Maasse

des den Gegenstand der Beschreibung bildenden unverletzten und die des mangelhaften, entwickelteren Exemplares stehen:

Breite	20,0 mm	25,0 mm
Länge	17,0 „	22,0 „
Frontalrand	6,5 „	8,0 „
Augenhöhle (Lumen) . .	3,5 „	4,5 „
Stirn mit Augenhöhle .	16,0 „	18,0 „

Fundort: Dem unermüdlichen Fleisse des Universitätsprofessors A. Koch, mit welchem derselbe die Tertiärbildungen Ungarns durchforscht und deren Fossilien sammelt, verdanken wir aus dem oberen Grobkalk des Szucságer Steinbruches (Com. Kolozs) eine *Catometopa*, welche sich als neue Gattung entpuppte. An derselben Stelle entdeckte Prof. Koch die von Bittner beschriebenen *Neptunus Kochii*, *Goniocypoda transsilvanica* und *Dromia Corvini*, welche im Vereine mit *Telphusograpsus laevis* bisher nur von Szucság bekannt sind.

* * *

Wie wir wissen, stammt der grösste Theil der von Ungarn bisher bekannten tertiären Decapoden aus dem oberen Eocenkalkstein des Budapester Kis-Svábhegy. Auch in dieser Abhandlung beschreibe ich die meisten Formen von hier. Die in Südfrankreich und in dem nördlichen Italien verbreitete *Phlyctenodes*gattung wurde von hier abermals mit einer neuen Art bereichert, so dass wir jetzt aus Ungarn bereits drei ihrer Species kennen, welche alle aus einem Niveau stammen und bisher ausschliesslich nur vom Kis-Svábhegy bekannt sind.

Bisher waren vom Kis-Svábhegy in der Literatur 17 Gattungen und innerhalb dieser 30 Arten besprochen resp. mit der *Darányia granulata*, *Lörent.* und der durch Oppenheim abgetrennten *Micromaja Lörentheyi*, *Oppenh.** — letztere wird nämlich als selbständige Species betrachtet — 32 Arten innerhalb 18 Gattungen. Zu diesen kommen nun die *Phlyctenodes Steinmanni nov. sp.*, *Ranina Bittneri nov. sp.* und *Palaeomunida nov. gen. defecta*

* Rivista Italiana di Palaeontologia. Anno V. Fasc. II. 1899. P. 57.

nov. sp. Somit beträgt die Zahl der Arten der Kis-Svábhegyer Formen 34, welche zu 19 Gattungen gehören.

BITTNER schreibt in seinem über meine Arbeit veröffentlichten und bereits erwähnten Referate von der *Lobocarcinus Paulino-Würtenbergensis, Mayer* auf Seite 404: „Hoffentlich ist die Provenienz des Unicums aus dem Kalke des Kleinschwabenberges völlig sichergestellt." Daraufhin kann ich erwidern, dass ich ganz bestimmt und allen Zweifel ausschliessend weiss, es habe sie ein Arbeiter Namens MAGYAR in dem nördlichst gelegenen Steinbruche des Kis-Svábhegy gefunden.

Das von Prof. SCHMIDT gesammelte reiche Decapodenmaterial legt auch Zeugniss von der Häufigkeit der Arten in der Fauna vom Kis-Svábhegy ab, deshalb halte ich es nicht für überflüssig, zu erwähnen, in welcher Menge die bereits bekannten Formen neben den neuen in diesem Material vorkommen.

Die *Ranina Reussi, Woodw.* ist in 25 Exemplaren vom Kis-Svábhegy und in 5 Exemplaren vom Szépvölgy vorhanden und ist somit thatsächlich die häufigste Form dieses Niveaus.

Calappilia dacica, Bittn. ist häufiger, als ich dachte, da sich ihrer 6 Exemplare in dieser Sammlung vorfinden.

Micromaja tuberculata, Bittn. ist in einem,

Phrynolambrus corallinus, Bittn. in drei schönen und einem brüchigen,

Palaeocarpilius macrocheilus, Desm. in etwa fünf, *var. coronatus Bittn.* in acht Exemplaren vorhanden.

Phymatocarcinus eocenicus, Lörent. ist in der Sammlung durch fünf Exemplare vertreten, deren vier bezüglich der Grösse mit der bisher bekannten grössten Form übereinstimmen.

Phlyctenodes Hantkeni, Lörent. kommt in einem prächtigen Exemplare vor.

Die in dem Kapitel: „Rückblick und Schlussfolgerungen" meiner über die Decapoden des ungarischen Tertiärs festgestellten Facta werden durch die hier mitgetheilten Beiträge nur bekräftigt, worüber ich noch in der „Rivista Italiana di Palaeontologia" schreiben werde. Hier will ich nur noch mit einigen Worten den Reichthum der Fauna besprechen.

Die neueren Formen gehören zu denselben Subordnungen

und Familien der Decapoden, welche auch schon bisher aus Ungarn bekannt waren.

Die *Anomuren* wurden bisher nur durch die *Pagurus*gattung vertreten, die nur eine Species, den *priscus, Brocc.*, aufweist. Dazu kommt jetzt die *Palaeomunida n. g. defecta n. sp.* Während jedoch *Pagurus* aus der oberen Mediterranstuffe stammt, vertritt die *Palaeomunida* das Subgenus der *Anomuren* im oberen Eocän.

Alle Familien der *Brachyuren* sind vertreten; während uns jedoch von den *Dromiaceae* innerhalb einer Gattung nur zwei Arten bekannt sind, kennen wir von den *Raninidae* mit der *Ranina Bittneri n. sp.* zusammen acht Arten in drei Gattungen und von den *Oxystomidae* innerhalb vier Gattungen vier Arten. In der Familie der *Oxyrrhynchidae* trat an Stelle des *Lambrus? sp. ind.* die *Andorina elegans Lörent.* und somit enthält auch diese innerhalb vier Gattungen vier Arten. Die Familie der *Cyclometopidae* wurde um die neue Art *Phlyctenodes Steinmanni* reicher und somit sind innerhalb ihrer 15 Gattungen nunmehr 30 Arten und Varietäten bekannt. Die Familie der *Catometopidae* zählt mit *Daránya granulata, Lörent.* und *Telphusograpsus n. g. laevis nov. sp.* 11 Arten in 9 Gattungen. Somit ist die Zahl der aus den Ländern der ungarischen Krone bekannten Gattungen von 36 auf 39 und die der Arten von 74 auf 79 gestiegen.

Dies neuere Material bekräftigt meine bereits früher ausgesprochene Ansicht, dass die Tertiärbildungen Ungarns bisher an Decapoden am reichsten sind. Auch BITTNER sagt in seinem Referate* über meine Arbeit: „Einen auch nur annähernd ähnlichen Reichthum an fossilen Decapoden hat in der That bisher kein anderes Tertiärgebiet aufzuweisen, selbst das Vicentinische bleibt weit zurück."

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. *Ranina Bittneri nov. sp.* Aus dem gelblichen, foraminiferenreichen Kalkstein des Budapester Kis-Svábhegy, welcher unter den Orbitoidenkalk des letzteren gelagert ist; 1*a*. von oben und 1*b*. von der Seite gesehen.

Fig. 2. *Ranina Bittneri nov. sp.* Ebendaher; 2*a*. von oben, 2*b*. von der Seite gesehen. 2*c*. die Oberfläche —, vergrössertes Bild der Mitte und 2*d*. des Seitentheiles des Cephalothorax.

Fig. 3. *Palaeomunida n. g. defecta n. sp.* Ebendaher. Die Figur ist nicht am besten gelungen.

Fig. 4. *Phlyctenodes Steinmanni nov. sp.* Ebendaher.

Fig. 5. *Calianassa rapax, Bittn.* Aus den mittleren Oligocenschichten von Méra (Comitat Kolozs).

Tafel II.

Fig. 1. *Titanocarcinus Raulinianus, M. Edw.?* Aus dem lithothamnienreichen Orbitoidenkalk des Szépvölgy bei Budapest. 1*a*. von oben und 1*b* von vorn gesehen.

Fig. 2—3. *Telphusograpsus n. g. laevis nov. sp.* Aus den im Steinbruch bei Szucság (Comitat Kolozs) aufgeschlossenen oberen Grobkalkschichten. 2*a*. von oben, 2*b*. von vorn und 2*c*. von der Seite gesehen.

Fig. 4. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* Aus dem gelblichen, foraminiferenreichen Kalkstein des Budapester Kis-Svábhegy, welcher über die lithothamnienreiche Schicht des letzteren gelagert ist. 4*a*. von oben, 4*b*. von der Seite und 4*c*. von vorn gesehen.

Fig. 5—6. *Phrynolambrus corallinus, Bittn.* Ebendaher.

---

* Verh. d. k. k. geol. R. A. Jahrg. 1898. P. 406.

Taf. I.

1a

2a

1b

2b

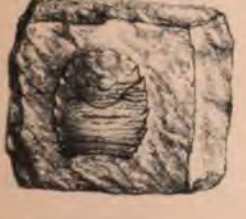
2d

5a

3/1

5b

2c



3

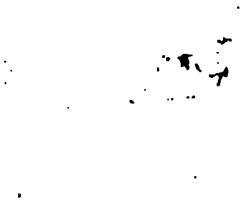
3/1

4

vobodan.d.Nat.gez.u.lith.

Lith.Anst.v.Alb.Berger Wien VIII.

Lörenthey. Tertiär Decapoden



A.Swoboda n.d.Nat.ges.u.lith. Lith.Anst.v.Alb.Berger Wien VIII.

Lörenthey. Tertiär Decapoden

7.

DIE CICINDELIDEN UNGARNS.

Von ERNEST CSIKI, Budapest (Nationalmuseum).

Vorgetragen in der Sitzung der zoologischen Section der königl. ung. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft am 6. April 1900. (In ungarischer Sprache im 1. Heft der „Állattani Közlemények" [Zoologische Mittheilungen] S. 37—52 im Juni 1900 erschienen.)

Ein Einblick in die coleopterologische Litteratur Ungarns zeigt, dass sowohl einheimische als auch ausländische Fachleute in ihren zahlreichen Arbeiten, welche in der letzten Hälfte dieses Jahrhunderts erschienen sind, zahlreiche Daten, Neubeschreibungen und verschiedene Beobachtungen aufhäuften, jedoch kein zusammenfassendes descriptives Werk über die Coleopteren Ungarns geboten haben. Freilich nimmt die Abfassung eines solchen Werkes viel Zeit in Anspruch, was auch gar nicht zu verwundern ist, wenn man den Reichthum der ungarischen Käferfauna betrachtet, welche schon jetzt beiläufig 8000 Arten und Varietäten umfasst. Ich glaube daher all Jenen, die sich für die Käferfauna Ungarns interessieren, einen Dienst zu erweisen, wenn ich einzelne Familien derselben bearbeite. Bei dieser Gelegenheit* biete ich, die systematische Reihenfolge eröffnend, eine Bearbeitung der *Cicindeliden*, einer Familie aus der Familienreihe **Caraboidea.**

Fam. **Cicindelidae** LEC. & HORN.**

Kopf gross; Augen stark vortretend, gewölbt; Clypeus schmal, die Stirn und einen Theil der Wangen begrenzend. Fühler faden-

* Von anderen Familien bearbeitete ich bisher in den „Rovartani Lapok" die Endomychiden, Cleriden und von den Chrysomeliden die Subfamilie Criocerinae (Orsodacnini, Donaciini et Criocerini).

** Um Anfängern leicht über die Terminologie hinwegzuhelfen, haben wir GANGLBAUER's ausgezeichnete Abbildung (s. Fig. 1) übernommen.

förmig, elfgliedrig, an der Stirn innerhalb der Wurzel der Mandibeln eingefügt; die ersten vier Glieder kahl, die übrigen behaart.

Das Halsschild vor dem Vorder- und Hinterrand quer eingedrückt und in der Mittellinie gefurcht; bei den in Ungarn vorkommenden Arten theilweise oder ganz mit weisser Behaarung bedeckt. Schildchen dreieckig, durchschnittlich bei *Cicindela campestris* LINN. am grössten und bei *Cicindela soluta* LATR., DEJ. am kleinsten.

Die Flügeldecken bedecken den Hinterleib ganz. Auf den dunklen Flügeldecken finden sich gewöhnlich weisse Flecken oder Binden, bezw. Lunulen. Die Zeichnung besteht aus: 1. einer Humerallunula, die auch in zwei Theile getheilt sein kann; 2. zwei Flecken im ersten Viertel, einer neben dem Seitenrand und einer neben der Mitte; 3. zwei den vorigen entsprechenden Mittelflecken, die auch zu einer breiten Querbinde verschmelzen können; 4. schliesslich eine Apicallunula, die ebenfalls getheilt sein kann. Ausserdem kommen noch folgende Variationen vor, die wir nach HORN und ROESCHKE folgendermaassen bezeichnen:

1. *forma humeralis:* wenn die Schulterflecke verbunden sind, also eine Lunula bilden, oder die Humerallunula getheilt ist;

2. *forma apicalis:* wenn die Flecken an der Flügeldeckenspitze verbunden sind, oder die Apicallunula getheilt ist;

3. *forma marginalis:* wenn sich die breite Querbinde der Flügeldecken neben dem Spitzenrande verbreitert oder wenn sie verbreitert ist, ihre Seitentheile fehlen;

4. *forma circumflexa:* wenn sich einzelne Flecken so stark verlängern, dass sie die Mittelbinde mit der Humeral- und Apicallunula verbinden;

5. *forma semicircumflexa* ist der vorhergehenden ähnlich, allein die Mittelbinde ist nur mit der Humeral- oder nur mit der Apicallunula verbunden;

6. *forma dilatata:* wenn die weisse Farbe sehr ausgedehnt ist;

7. *forma dilacerata:* wenn die Mittelbinde vom Seitenrande getrennt, wenn sie zerrissen ist oder ganz fehlt;

8. *forma connata:* wenn der Mittelfleck mit dem mittlern Seitenrandfleck verbunden ist.

Der Farbe nach kennen wir rothe *(rufa)*, röthliche *(rufescens)*,

schwarze *(nigra)*, schwärzliche *(nigrescens)*, blaue *(coerulea)*, bläuliche *(coerulescens)*, grüne *(viridis)* und grünliche *(viridescens)* Abänderungen.

Die Flügel entsprechen denjenigen der Carabiden, verschieden sind sie nur darin, dass die *vena externomedia* mit der medianen Längsader der *area externomedia* nur durch eine einfache Querader verbunden ist, es fehlt also das den Carabiden charakteristische Oblongum. Die Flügel der einzelnen Cicindela-Arten sind beinahe ganz gleich, Unterschiede sind nur in der Form und den Maassen zu finden. Die Flügel von *Cicindela chiloleuca* FISCH. (s. Taf. II, Fig. 19) sind schon vom Flügel der *Cicindela campestris* LINN., *C. hybrida* LINN. oder *C. soluta* LATR., DEJ. (s. Taf. II, Fig. 20) verschieden. Ein Unterschied findet sich ausser der Form auch im Flügelgeäder, nämlich innerhalb der *vena analis* befindet sich noch ein Ast.

Die Hinterbrust ist durch eine Quersutur getheilt, der hintere Theil sendet einen dreieckigen Fortsatz zwischen die Hinterhüften.

Die Beine sind lang; die Trochanteren der Vorder- und Mittelbeine sind klein, die der Hinterbeine sind gross; Tarsen fünfgliedrig. Die drei ersten Glieder der Vordertarsen sind beim Männchen breiter und ihre Sohle bürstenartig behaart. Die Haftharre finden nach SIMMERMACHER (Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. XL. Bd., 1884, p. 517, Taf. XXVI, Fig. 31) bei der Paarung Verwendung, sie dienen nämlich den Männchen zum Anklammern an die Weibchen.

Die Zahl der Abdominalsegmente ist bei den Männchen um eins mehr als bei den Weibchen; Männchen haben 8 Rücken- und 7 Bauch-, Weibchen 7 Rücken- und 6 Bauchsegmente. Die ersten drei Bauchsegmente sind verwachsen, aber die einzelnen Segmente durch deutliche Suturen getrennt.

Die Lebensweise der *Cicindeliden* ist den Fresswerkzeugen und langen Beinen entsprechend räuberisch; ihr behendes Laufen ist ihnen beim Ergreifen der Beute sehr behilflich. Ueberhaupt sind die Cicindelen im Sonnenscheine sehr lebhaft, auch ihr Flug ist dann ein rascher. Wie es scheint, wird die Körperfarbe durch die Trockenheit oder Feuchtigkeit des Bodens beeinflusst;

so sind auch die auf Sandflächen vorkommenden Arten grau- oder gräulich-bronzefarbig (z. B. *C. hybrida* LINN.), während die auf Wiesen und Feldern vorkommenden grün (z. B. *C. campestris* LINN.), die auf Salzboden lebenden Arten (z. B. *C. stigmatophora* FISCH., *C. chiloleuca* FISCH.) stark weiss gezeichnet sind. Einzelne Arten leben auf salzigem oder sodareichem Boden, andere in Fichtenwaldungen. Die indo-australischen *Tricondyla*-Arten laufen, von unseren Cicindela-Arten verschieden, auf Baumstämmen umher. Die Cicindeliden gehen tagsüber ihrer Beute nach und zwar grösstentheils bei Sonnenschein; bei schlechtem Wetter und nachts ziehen sie sich in ihre unterirdischen Gänge zurück. Eine Ausnahme bilden die *Megacephala*-Arten, welche Nachtthiere sind; diese sind aber fast ausschliesslich amerikanische, australische und afrikanische Thiere, nur *Megacephala* (Tetracha) *euphratica* DEJ. kommt auch in Spanien vor.

Was die Systematik anbelangt, so wurde bis vor kurzem LACORDAIRE's Eintheilung aus dem Jahre 1842 befolgt, spätere wurden nicht berücksichtigt, so auch CHAUDOIR's Berichtigungen nicht. In jüngster Zeit wies WALTHER HORN darauf hin, wie unhaltbar die früheren Systeme sind, da sie einseitig nur auf die Bildung der Mundtheile basierten, diese aber oft bei ein und derselben Art sehr grossen Veränderungen unterworfen sind. W. HORN's Verdienst ist es, eine neue Eintheilung geboten zu haben*; nach dieser zerfällt die Familie der *Cicindelidae* in folgende Subfamilien: *Ctenostominae*, *Collyrinae*, *Theratinae*, *Cicindelinae*, *Megacephalinae*, *Neomantichorinae*, *Palaeomantichorinae*** und *Platychilinae*. Bei uns kommt nur eine Gattung (*Cicindela* LINN., DEJ.) vor, die in die Unterfamilie der *Cicindelinae* und deren Tribus *Cicindelini* gehört.

Die Cicindeliden sind auf der ganzen Erde verbreitet und namentlich in der warmen Zone durch zahlreiche Arten vertreten.

---

* „Revision der Cicindeliden mit besonderer Berücksichtigung der Variationsfähigkeit und geographischen Verbreitung". Beiheft der Deutsch. Entom. Zeitschr. 1898 und „Ueber das System der Cicindeliden". (Deutsche Entom. Zeitschr. 1899, p. 33—51.)

** Den Nomenclaturregeln gemäss ist jedoch statt Neomantichorinae *Amblychilinae* und statt Palaeomantichorinae *Mantichorinae* zu gebrauchen.

Bisher sind gegen 1300 Arten bekannt, davon leben jedoch in der paläarktischen Region nur 60, in Ungarn aber nur 11 Arten.

1. Gattung. **Cicindela** (Linn.) Dej.

Linné, Systema Naturae, ed. X. (1758) 407. — Dejean, Species générales des Coléoptères. I. (1825) 17. — Lacordaire, Genera des Coléoptères. I. (1859) 17. — Schaum, Naturgeschichte der Insekten Deutschlands. I. (1856) 8. — Jacquelin-Duval, Genera des Coléoptères d'Europe. I. (1855) 2. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa. I. (1892) 10.

Synonyme: *Cylindera* Westwood, Mag. Zool. Bot. I. 251. — *Chaetostyla* Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa. I. (1892) 11.

Literatur: W. Horn & H. Roeschke, Monographie der paläarktischen Cicindelen. Berlin 1891.

Der Kopf auf den Wangen, Schläfen und auf der Stirn neben den Augen parallel gestreift. Kinn in der Mitte mit einem Zahn. Letztes Glied der Kiefertaster länger als das vorletzte, gegen die Spitze erweitert. Die Glieder der Lippentaster sind cylindrisch, das erste Glied kurz, das zweite lang, das Endglied kürzer als das zweite. Fühler fadenförmig. Das Halsschild schmäler als die Flügeldecken. Flügeldecken punktiert; Flügel entwickelt. Die ersten drei Tarsenglieder der Männchen erweitert, auf der Unterseite bürstenartig behaart.

Von den in Ungarn vorkommenden *Cicindela*-Arten sind bisher die Larven von *C. campestris, hybrida* und *maritima* bekannt. Bei dieser Gelegenheit will ich die Beschreibung einer weiteren bisher unbekannten Larve, der von *C. chiloleuca* Fisch. geben.

Die Larve dieser Art gleicht im Ganzen der von Schiödte beschriebenen und abgebildeten Larve von *C. hybrida* (Naturhistorisk Tidsskrift. III Raekke, 4. Bd. 1866, p. 440, tab. XII. f. 1—6). Sie ist gelblich-weiss, Kopf und Halsschild schwarzbraun (ohne grünlichen Metallschimmer). Unterschiede finden sich nur in der Bildung des Kopfes, dieser ist viel breiter als lang, oben stark ausgehöhlt, ohne Längsfurchen; Clypeus glatt, vorn bogenförmig abgerundet, die Ecken stumpf; Mandibeln kräftig, innerer Zahn breit, dessen Spitze abgerundet. Die Kehlfurche reicht bis zur kurzen Transversalfurche, bildet also eine T-Form; der hintere Rand der Kehle bildet einen schwächeren Bogen (Taf. II, Fig. 21 u. 22). Im übrigen ist sie mit der Larve

von *C. hybrida* übereinstimmend, nur das letzte Abdominalsegment ist nicht gerade abgestutzt, sondern schwach ausgeschweift. Ihr Vorkommen ist dasselbe wie bei den anderen Larven; sie gräbt

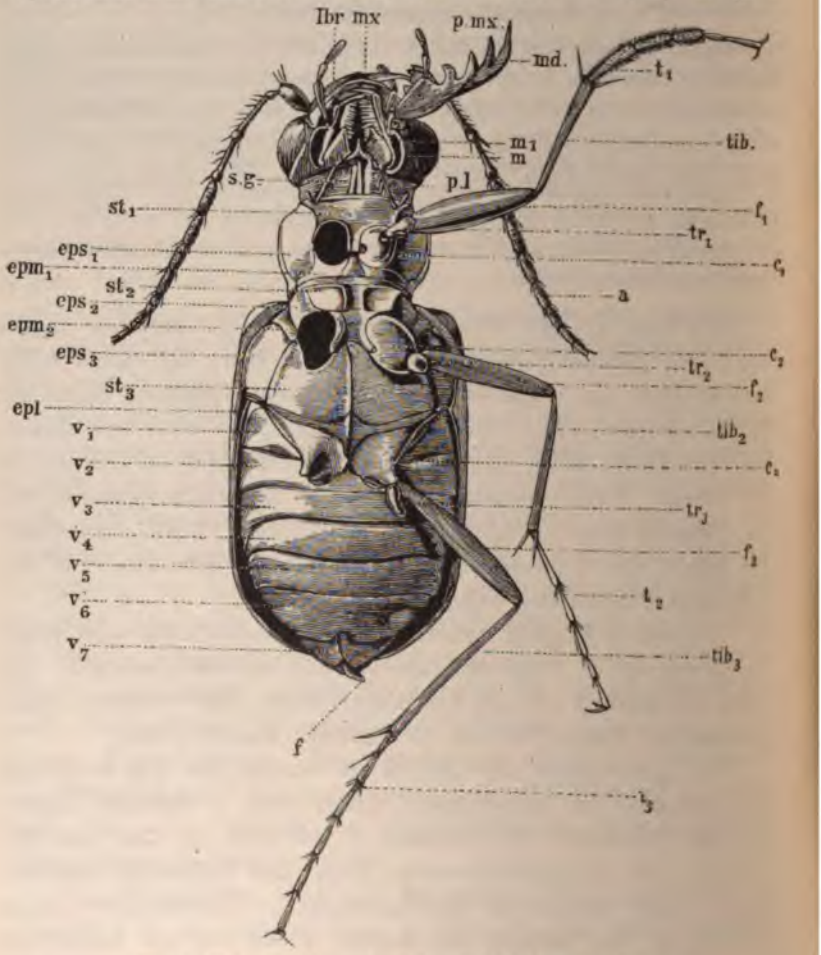


Fig. 1. Unterseite einer männlichen *Cicindela campestris* Linn.

a. Fühler (antenna); *lbr*. Vorderrand der Oberlippe (labrum); *md*. Oberkiefer (mandibula); *mx*. Unterkiefer (maxilla); *p. mx*. Kiefertaster (palpus maxillaris); *m*. Kinn (mentum); m_1. Kinnzahn; *p. l*. Lippentaster (palpus labialis); *s. g*. Kehlnähte (suturae gulares); st_1. Vorderbrust (prosternum); st_2. Mittelbrust (mesosternum); st_3. Hinterbrust (metasternum); eps_1, eps_2, eps_3. Episternen der Vorder-, Mittel- und Hinterbrust; epm_1, epm_2. Epimeren der Vorder- und Mittelbrust; V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7. erstes bis siebentes Ventralsegment (segmentum ventrale 1—7); *f*. Penis; Theile der Vorder-, Mittel- und Hinterbeine: c_1, c_2, c_3. Hüften (coxae); tr_1, tr_2, tr_3. Schenkelringe (trochanteres); f_1, f_2, f_3. Schenkel (femora); tib_1, tib_2, tib_3. Schienen (tibiae); t_1, t_2, t_3. Füsse (tarsi). [Nach Ganglbauer.]

nämlich 15—50 cm tiefe, beinahe senkrechte Gänge in sandigem oder mehr lehmigem Boden, und lauert in diesen auf ihre Beute, die sie in das Ende des Ganges hinabzieht und aussaugt.

Die *Cicindeliden*, sowie der grösste Theil der *Caraboiden* sind Raubthiere, sie gehören also zu den landwirthschaftlich nützlichen Thieren.

Bestimmungstabelle der Arten:

1. Flügeldecken in der Mitte der Basis mit gelblich-weissen Haaren bedeckt . . . . . 1. *soluta* LATR., DEJ.
— Flügeldecken an der Basis ohne Behaarung . . . . . 2.
2. Episternen der Vorderbrust behaart . . . . . 3.
— Episternen der Vorderbrust nicht behaart. 6. *germanica* LINN.
3. Mitte des Halsschildes nicht behaart . . . . . 4.
— Mitte des Halsschildes behaart . . . . . 9.
4. Oberlippe schwarz, in der Mitte mit Längskiel. 2. *silvatica* LINN.
— Oberlippe gelblich-weiss, ohne Längskiel . . . . . 5.
5. Wangen kahl . . . . . 6.
— Wangen behaart . . . . . 8.
6. Stirn sehr fein gestreift, die Streifen parallel. Halsschild vorn schwach vorgezogen . . . . . 7.
— Stirn gerunzelt und kräftig gestreift. Vorderrand des Halsschildes gerade, nicht vorgezogen. 5. *campestris* LINN.
7. Erstes Fühlerglied vorn behaart. Oberlippe dreifach ausgeschweift, in der Mitte mit einem kräftigen Zahn (Taf. II, Fig. 17). . . . . 3. *silvicola* LATR., DEJ.
— Erstes Fühlerglied vorn kahl, nur an der Spitze mit einigen Haaren. Oberlippe gerade abgestutzt oder schwach bogenförmig gerundet, in der Mitte ohne Zahn (Taf. II, Fig. 18), oder wenn ein solcher vorhanden, so ist er sehr klein . . . . . 4. *hybrida* LINN.
8. Mitte der Bauchsegmente (mit Ausnahme des Hinterrandes) nicht punktiert. Kleinere Thiere; Länge 6—12 mm. 10. *Fischeri* ADAMS.

8. Mitte der Bauchsegmente stark punktiert. Grössere Thiere; Länge 10—16 mm . . . . . 11. *litoralis* FABR.
9. Halsschild hinten schmäler als in der Mitte . . . . . 10.
— Halsschild hinten so breit als in der Mitte. 9. *viennensis* SCHRNK.
10. Die Längsstreifen der Stirn neben den Augen sehr fein. 7. *stigmatophora* FISCH.
— Die Längsstreifen der Stirn neben den Augen kräftig. 8. *chiloleuca* FISCH.

* * *

Beschreibung der Arten und Varietäten:

1. Cicindela soluta LATR., DEJ. 1822.

Hist. Nat. Icon. Col. 1822—1824, p. 47, t. 3, f. 8.

DEJEAN, Species Coléopt. I, p. 70; Iconogr. d. Coléopt. I, 1829, p. 28, pl. 3, f. 7. — SEIDLITZ, Fauna Transsylvanica. 1888, p. 1. — BEUTHIN, Entom. Nachrichten. 1890, p. 90. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 14, t. I, f. 1. — GANGLBAUER, Die Käfer v. Mitteleuropa. I, 1892, p. 14 u. 536. — *sylvicola subspec. soluta* DEJ. — REDTENBACHER, Fauna Austriaca. 3. Aufl. Bd. I, 1874, p. 4, Note.

ab. Kraatzi BEUTHIN, Entom. Nachrichten. 1890, p. 90. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 14. — GANGLBAUER, Die Käfer v. Mitteleuropa. I, 1892, p. 15.

ab. violacea CSIKI, Természetrajzi Füzetek. XXII, 1899, p. 247.

Tafel I, Fig. 1.

Flügeldecken parallelseitig, stark punktiert, hinten abgerundet, an der Mitte der Basis gelblich-weiss behaart. Oberseite grünlich-kupferfarbig oder kupferig-roth, die Eindrücke des Halsschildes grün oder bläulich-grün. Unterseite kupferig-roth, Abdomen grün oder bläulich. Die weisse Zeichnung der Flügeldecken besteht aus einem kleinen runden Schulterflek und einem nach aussen gerichteten kommaartigen Fleck im ersten Drittel neben dem Seitenrand (diese beiden würden also verbunden die Humerallunula bilden), aus einer zweimal geknickten, die Naht nicht erreichenden Mittelbinde hinter der Mitte, und aus einer Apicallunula, die an der Naht breit beginnt, sich allmählich verengend bis zum Seitenrand zieht und von hier einwärts laufend, in einem grossen runden Fleck endigt. Länge 13—15 mm.

Ausser der Stammform kommen in Ungarn zwei Farbenvarietäten vor, nämlich *ab. Kraatzi* BEUTH. mit metallisch-grünen Flügeldecken, und die schöne dunkelblaue oder blauviolette *ab. violacea* CSIKI.

Ihre Verbreitung erstreckt sich ausser Ungarn westlich bis Niederösterreich (Wien), östlich durch Südrussland bis Westsibirien. Sie kommt auf sandigen Ebenen vor, dringt aber neben Flüssen auch in die Gebirge ein. In Ungarn ist sie im grossen Alföld nicht selten; einmal wurde sie auch bei Brassó in Siebenbürgen gefangen (MÉHELY).

Ich selbst kenne sie von folgenden Fundorten: I. Budapest, Rákos-Palota, Isaszegh, Gödöllö, Hadház, Peszér; II. Kup; VI. Grebenácz. Die *ab. Kraatzi* BEUTH. kommt bei Rákos und auf der Insel Csepel, *ab. violacea* CSIKI bei Rákos vor.*

2. Cicindela silvatica LINNÉ, 1758.

Systema Naturae. Ed. X, 1758, p. 407.

STURM, Deutschlands Insekten. VII, 114. 9. tab. 180. f. a. — DEJEAN, Species gen. des Coléoptères. I, 1825, p. 71; Iconogr. des Coléoptères. I, 1829, p. 20, t. 3, f. 3. — SCHAUM, Naturg. Insekt. Deutschl. I, 1856, p. 12. — SEIDLITZ, Fauna Transsylvanica. 1888, p. 1. — BEUTHIN, Entom. Nachr. 1890, p. 211. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicindelen. 1891, p. 22, T. 1, f. 2. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa. I. 1892, p. 12.

ab. hungarica BEUTHIN, Entom. Nachr. 1890, p. 211. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 24, T. 1, f. 2b. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa. I. 1892, p. 12.

Tafel I, Fig. 2—3.

Oberlippe schwarz, in der Mitte mit einem Längskiel; Mandibeln schwarz, nur ihre Basis auf der Aussenseite gelblich-weiss; Kiefer- und Lippentaster metallisch. Oberseite bronzeschwarz oder grünlich bronzefarbig, Flügeldecken seidenartig glänzend; unten dunkelviolett; Tibien und Tarsen kupferig-grün. Die weisse Zeichnung der Flügeldecken besteht aus einer Humerallunula, die nicht selten unterbrochen ist, aus einer schiefen, wellenartigen Mittelbinde und einem runden Fleck im letzten Viertel neben dem Seitenrand. Selten sendet der runde Spitzenfleck einen mehr

* Die römischen Zahlen bedeuten die zoogeographischen Regionen Ungarns, wie sie in der „Fauna Regni Hungariae" bestimmt wurden.

oder weniger langen Spitzenast gegen Spitze (Taf. II, Fig. 3); solche Stücke bilden *ab. hungarica* BEUTH. — Länge 14—19 mm.

Cicindela silvatica lebt mehr in nördlicheren Gebieten (nördliches Europa, Sibirien) und ist Bewohner der Fichtenwälder. In Ungarn ist sie sehr selten und nur aus Nordungarn, von Sasvár (Com. Nyitra) und Bártfa (Com. Sáros) bekannt. *Ab. hungarica* BEUTH. wurde nach ungarischen Stücken beschrieben, sie kommt aber überall neben der Stammform vor.

3. Cicindela silvicola LATR., DEJ. 1822.

Hist. Nat. Icon. Col. Eur. 1822—24, 51, pl. 4, f. 4.

DEJEAN, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 67; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 23, pl. 3, f. 2. — SCHAUM, Naturg. Insekt. Deutschl. I, 1856, p. 20. — REDTENBACHER, Fauna Austriaca. 3. Aufl., I, 1872, p. 4. — SEIDLITZ, Fauna Transsylvanica. 1888, p. 1. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 29, t. I, f. 6. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa. I. 1892, p. 13 u. 535.

ab. tristis DTORRE, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 22. — *bicolor* SCHULZ, Entom. Nachr. XXVI, 1900, p. 159.*

Tafel I, Fig. 4.

Grünlich-kupferfarben oder grün, selten bläulich-violett oder kupferbraun (*ab. tristis* DTORRE). Das erste Fühlerglied vorn behaart. Kopfschild dreifach ausgeschweift, in der Mitte mit einem starken Zahn (Taf. II, Fig. 17). Kopf gross, das Halsschild etwas schmäler, trapezförmig. Flügeldecken oval, im zweiten Drittel am breitesten, von hier nach rückwärts oval gerundet. Die weisse Zeichnung besteht aus einer gewöhnlich unterbrochenen Humerallunula, aus einer breiteren Mittelbinde und einer Apicallunula, welch letztere nur sehr selten getheilt ist. Länge 14—17 mm.

Ihre Verbreitung erstreckt sich auf die Gebirge von Mitteleuropa. In Ungarn in den gebirgigen Gegenden nicht selten; in den Karpathen überall zu finden. Bisher wurde sie an folgenden Orten gesammelt: II. Köszeg, Sopron; III. Selmecz, Hermánd, Zsolna, Koritnyicza, Tátrafüred; IV. Bártfa, Ungvölgy, Simonkahegy, Varannó, Szinnaikö, Rabaszkala, Lopuszánkavölgy; V. Bogdánháza, Zilah, Apácza, Szászrégen, Bükszád, Büdöshegy, Héviz,

* Das Aufstellen dieser neuen Abänderung war ganz überflüssig, DTORRE beschrieb dieselbe Form schon 1877 als *tristis*.

Brassó, Predeal, Kerczi hegység, Vöröstorony, Lotriora völgye, Porcsesd, Fenyöfalva, Nagy-és Kis-Talmács, Kis-Disznód, Praesbe, Riuszadului, Paring, Zsil-völgye, Retyezát; VI. Szemenik, Herkulesfürdö; VII. Fuzine, Stalak.

4. Cicindela hybrida Linné, 1758.

Systema Naturae. Ed. X, 1758, p. 407.

Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, 64; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, 19, t. 2, f. 6. — Schaum, Naturg. Ins. Deutschl. I, 1856, 21. — Seidlitz, Fauna Transsylv. 1888, p. 1. — Roeschke, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 34. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 13 u. 536.

In Ungarn vorkommende Varietäten:

ab. virescens Letzner, Zeitschr. f. Entom. Breslau 1849, II, Nr. 10, p. 46.

ab. bipunctata Letzner, Zeitschr. für Entom. Breslau 1849, II, Nr. 10, p. 46.

ab. monasteriensis Westhoff, Die Käfer Westfalens. 1882, p. 2. — *riparia* auct. nec Dej.

var. magyarica Roeschke, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 40. — *Sahlbergi* Frivaldszky Imre, Jellemzö adatok Magyarország faunájához. 1865, p. 54. — Frivaldszky János, Magyarország futonczféléi (Carabidae). M. Tud. Akad. Értek. term. tud. köréböl. 1874. p. 24. — *transversalis* Frivaldszky János, Magyarország futonczféléi (Carabidae) 1874, p. 74.

subsp. riparia Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 66. — Roeschke, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 36 u. 41, t. 1, f. 9. — *danubialis* Dahl i. l.

subsp. maritima Latr., Dej. Hist. Nat. Icon. Coléopt. 1822—24, p. 52, t. 4, f. 5. — Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 67; Iconogr. des Coléopt. I, 1826, p. 22, t. 3, f. 1. — Roeschke, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 37 u. 44. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 14 u. 536.

Tafel I, Fig. 5—15.

Kupferig-grün, grau-grün, bronze- oder schwärzlich kupferfarben. Stirn und die Seiten des Halsschildes gelblichweiss behaart. Flügeldecken oblongoval, beim ♂ beinahe parallelseitig, beim ♀ nach hinten verbreitert, stark punktiert; ihre Zeichnung besteht aus einer Humeral- und Apicallunula und einer breiten mehr oder weniger geknickten Mittelbinde. Von Varietäten sind zu nennen: die lebhaft grüne *ab. virescens* Letzner, dann *ab. monasteriensis* Westhoff (Taf. I, Fig. 7) mit weniger gebogener, fast gerader Mittelbinde (diese Form wurde bisher in der ungarischen coleopterologischen Litteratur immer als *riparia* Dej. auf-

geführt). Unter den weiblichen Exemplaren der *C. hybrida* finden sich auch solche, bei welchen sich im ersten Drittel nahe der Naht ein runder schwarzer Fleck befindet. Diese bezeichnete LETZNER als *ab. bipunctata* (Taf. I, Fig. 8). Länge 11—19 mm.

Eine der interessantesten *hybrida*-Varietäten ist die nur in Ungarn vorkommende *var. magyarica* ROESCHKE. Diese kommt hauptsächlich auf der Deliblater-Sandpuszta vor, ist aber auch auf den Flugsandgebieten des grossen Alföld zu finden. In der ungarischen Literatur wurde sie bis zum Jahre 1891 als *var. Sahlbergi* FISCH. und *var. transversalis* DEJ. aufgeführt. *Var. magyarica* ist eine sogenannte dilatata-Form der *hybrida*, also eine solche Form, bei der die weissen Zeichnungen sehr breit sind. Der Kopf und das Halsschild sind kupferroth, die Flügeldecken etwas matter kupferbraun, das Abdomen grün. Der hintere Ast der Humerallunula reicht beinahe bis zur Mittelbinde oder ist mit dieser, oder die Mittelbinde ist am Seitenrand mit der Apicallunula verbunden. Diese charakteristische, in der Zeichnung jedoch sehr variable Form Ungarns ist auf Tafel I, Fig. 11 bis 15 abgebildet. Ihre Fundorte sind: I. Isaszegh, Akasztó, Keczel; VI. Grebenácz, Ulma. Noch kenne ich ein Exemplar aus Brassó, welches wahrscheinlich ebenso wie das schon oben erwähnte eine Exemplar von *C. soluta* durch heftige Ostwinde dahin gebracht wurde. Es wäre sehr interessant, festzustellen, von wo diese Pusztenthiere hierher gelangten: aus der Moldau oder aus Bessarabien? Letzteres wäre insofern sehr interessant, als sodann *C. var. magyarica* eine grössere Verbreitung hätte als bisher bekannt.

Ausser diesen Varietäten ist noch zweier Subspecies zu gedenken, diese sind *C. riparia* DEJ. und *C. maritima* DEJ.

C. riparia DEJ. (Taf. I, Fig. 6) bewohnt die subalpine Region der grösseren Gebirge und war bisher aus den Pyrenäen, den Alpen und dem Kaukasus bekannt. Im vorigen Jahre (1899) sammelte sie Herr ZOLTÁN SZILÁDY auch im Retyezátgebirge (Com. Hunyad), so dass wir sie jetzt auch in die Fauna von Ungarn aufnehmen können. Die Humerallunula der *C. riparia* DEJ. ist gewöhnlich getheilt, und wenn sie auch ganz ist, so ist der verbindende Ast sehr schmal. Die Mittelbinde ist schmal.

Die Flügeldecken sind schwach gekörnt, die punktförmigen Grübchen sind häufig blau, so auch die Farbe der Flügeldecken blau oder grün, selten schwarz, dunkel kupferbraun oder bräunlichgrün. Die Epipleuren der Flügeldecken sind gewöhnlich metallisch.

C. maritima Dej. bewohnt die Meeresküsten und ist beinahe an allen Küsten Europas zu finden, sie kommt jedoch auch im Binnenlande an solchen Stellen vor, welche dereinst Meeresboden bildeten. So ist ihr Vorkommen bei Udbina (Com. Lika-Krbava, Croatien) aufzufassen, wo sie von Herrn M. Padewieth (Zengg) gesammelt wurde. Für *C. maritima* Dej. ist die Form der Mittelbinde sehr characteristisch; diese sendet nämlich unter einem rechten Winkel einen schmalen Ast nach hinten, welcher dann in einen runden Fleck endigt (Taf. I, Fig. 9 und 10). Die Stirn ist meistens behaart. Die Epipleuren der Flügeldecken sind mit Ausnahme des Schultertheiles leicht gefärbt, ohne Metallglanz.

5. Cicindela campestris Linné, 1758.

Systema Naturae. Ed. X, 1758, p. 407.

Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 59; Iconogr. des Coléopt. I, p. 16, t. 2, f. 3. — Schaum, Naturgesch. Insekt. Deutschl. I, 1856, p. 13. — Redtenbacher, Fauna Austriaca. 3. Aufl., I, 1872, p. 3. — Seidlitz, Fauna Transsylv. 1888, p. 1. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 63. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p 12 u. 534.

ab. rubens Frivaldszky, Magy. Tud. Akad. évk. 1835, p. 251, t. 5, f. 1. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 70. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 535.

ab. coerulescens Schilsky, Deutsche Entom. Zeitschr. 1888, p. 179. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 70. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 12.

ab. funebris Sturm, Deutschl. Insekten VII, p. 105, t. 180, f. p. — Roeschke, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 70. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 12.

ab. 5-maculata Beuthin, Entom. Nachr. 1889, p. 231. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 69.

ab. protos DTorre, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 21. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 69.

ab. 4-maculata Beuthin, Entom. Nachr. 1889, p. 231. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 69.

ab. affinis Fisch., Entom. Ross. III, p. 18. — Roeschke, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 69. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 12.

ab. conjuncta DTorre, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 21. — Roeschke, Monogr. der paläark. Cicind. 1891, p. 69.

ab. connata Heer, Fauna helvet. I, p. 2. — Roeschke, Monogr. der paläark. Cicind. 1891, p. 69. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 12.

Tafel I, Fig. 16—22.

Grün, glänzend; die Stirn neben den Augen, die Seiten des Halsschildes, das Schildchen, der Seitenrand der Flügeldecken, die Beine, Fühler und die Brust kupferroth, das Abdomen bläulichviolett. Stirn verworren gerunzelt oder grob gestreift; Kopf und Halsschild fein aufstehend weiss behaart. Halsschild breiter als lang, nach hinten verschmälert, Vorderrand gerade. Flügeldecken kurz, oval, fein gekörnt. Die Vorder- und Mittelbrust, das Abdomen, die Schenkel und Hüften dicht weiss behaart. Länge 9—18 mm.

Von *C. campestris* Linn. sind mehrere Farbenabänderungen bekannt, von welchen in Ungarn die rothe *ab. rubens* Friv. (*farellensis* Graëlls, *Saxeseni* Endrulat), die blaue *ab. coerulescens* Schilsky und die schwarze *ab. funebris* Sturm gefunden worden ist. Auf den Flügeldecken sind sechs weisse Flecke, zwei an der Schulter, zwei in der Mitte und zwei an der Spitze (Taf. I, Fig. 16). Durch das Verschwinden oder Zusammenfliessen der Flecke entstehen zahlreiche Aberrationen; so z. B. wenn der zweite Humeralfleck fehlt: *ab. quinquemaculata* Beuth. (Taf. I, Fig. 18), wenn der zweite Humeral- und der seitliche Mittelfleck fehlt: *ab. quadrimaculata* Beuth. (Taf. I, Fig. 19), wenn nur der seitliche Mittelfleck fehlt: *ab. protos* DTorre (Taf. I, Fig. 20) und wenn alle Flecke fehlen: *ab. affinis* Fisch. (Taf. I, Fig. 21). Selten sind die zwei Mittelflecke: *ab. connata* Heer (Taf. I, Fig. 22) oder die Apicalflecke verbunden: *ab. conjuncta* DTorre (Taf. I, Fig. 17).

Cicindela campestris Linn. lebt in der ganzen paläarktischen Region, und zwar in characteristischen Unterarten, wie: *pontica* Motsch. (Meeresküste von Italien, Griechenland, Cyprus, Kleinasien und Küsten des Schwarzen Meeres); *maroccana* Fabr. (Spanien, Marokko, Algier); *corsicana* Roeschke (Nizza, Corsica, Sardinien); *Suffriani* Loew. (Cycladen, Rhodos, Creta, Smyrna); *herbacea* Klug (Kleinasien, Syrien, griechische Inseln) und *desertorum* Dej. (subalpin im Kaukasus). Die Stammform kommt von Westeuropa

durch Sibirien (mit Ausnahme der nördlichsten Theile) bis zum Baikalsee vor, stellenweise gemeinsam mit den aufgeführten Formen.

Sie ist in ganz Ungarn verbreitet, aber speciell in den Mittelgebirgen häufig. Ihre Varietäten kommen mit der Stammform zusammen vor. Seltener sind: *ab. rubens* FRIV., die nach EMERICH FRIVALDSZKY bei Budapest und im Comitat Krassó-Szörény gefunden wurde; *ab. coerulescens* SCHILSKY, die ich aus dem Cód-thal (Riuszadului) und von Puj kenne, und *ab. funebris* STURM, die aus Brassó (MÉHELY) und Zsombolya (MERKL) bekannt ist. Von *ab. affinis* FISCH. sah ich bisher ein ungarisches Exemplar aus der Umgebung von Nagyszeben; *ab. protos.* DTORRE sammelte Dr. EUGEN DADAY bei Szucság (Com. Kolozs).

6. Cicindela germanica LINNÉ, 1758.

Systema Naturae. Ed. X. 1758. 407.

DEJEAN, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 138; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 49, t. 6, f. 2. — SCHAUM, Naturgesch. Ins. Deutschl. I, 1856, p. 33. — REDTENBACHER, Fauna Austriaca. 3. Aufl., I, 1872, p. 4. — SEIDLITZ, Fauna Transsylv. 1888, p. 2. — HORN, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 81, t. 3, f. 1. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 18 u. 539.

ab. fusca DTORRE, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 21. — HORN, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 83. — *cuprea* WESTHOFF, Die Käfer Westfalens. 1881, p. 2.

ab. obscura FABR., Systema Eleuth. I, 1801, p. 238. (Habitat: America borealis?!). — HORN. Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 83.

ab. coerulea HERBST, Käfer X, p. 182, t. 172, f. 4. — HORN, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 83.

ab. deuteros DTORRE, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 21.

ab. protos DTORRE, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 21.

var. sobrina GORY, Ann. Soc. Entom. France. 1833, p. 176.

Tafel II. Fig. 1—4.

Oberseite mattgrün, der Kopf und das Halsschild mehr oder weniger kupferroth, unten grün oder grünlich-blau, Tibien und Tarsen gelbbraun, stellenweise metallisch. Kopf breiter als das Halsschild, auf der Stirn längsstreifig, Scheitel fein runzlig gekörnt, kahl. Halsschild cylindrisch, länger als breit, vorn und hinten quer eingedrückt, Epimeren kahl. Flügeldecken schmal, nach hinten verbreitert und im letzten Viertel am breitesten, sehr fein punktiert. Die weisse Zeichnung der Flügeldecken besteht

aus einem kleinen Humeralfleck, einem grösseren Mittelfleck neben dem Seitenrand und einer Apicallunula (Taf. II, Fig. 1). Selten fehlt der Humeralfleck, solche Exemplare bilden *ab. deuteros* DTORRE (Taf. II, Fig. 4); bei *ab. protos* DTORRE fehlt der seitliche Mittelfleck (Taf. II, Fig. 3); manchmal entsendet der Mittelfleck nach hinten und einwärts einen Ast, diese Form wird als *ab. sobrina* GORY bezeichnet (Taf. II, Fig. 2). Von Farbenabänderungen sind zu nennen: die kupferrothe *ab. fusca* DTORRE, die schwarze *ab. obscura* FABR. und die blaue *ab. coerulea* HERBST. Länge 9—10 mm.

C. germanica kommt auf Feldern, Waldwegen, speciell auf schwach bepflanzten lehmigen und sonnigen Hügeln vor. Mit Ausnahme des grossen Alföld (von da herstammende Exemplare sah ich wenigstens bisher nicht) kommt sie in ganz Ungarn vor. Die einzelnen Varietäten kenne ich von folgenden Fundorten: *ab. fusca* DTORRE (*cuprea* WEST.) V. Szent-Erzsébet; *ab. obscura* FABR. V. Nagyszeben, Szent-Erzsébet, VII. Raduc; *var. sobrina* Gory II. Öszöd, VIII. Crkvenica; *ab. deuteros* DTORRE V. Szent-Erzsébet. Szent-Gothárd; *ab. protos* DTORRE IV. S.-A.-Ujhely, V. Szent-Erzsébet; *ab. coerulea* HERBST. VII. Comit. Lika Krbava.

7. Cicindela stigmatophora FISCHER, 1825.

Entomographia imperii rossici. III, 1825, p. 42, t. 1, f. 10.

KRAATZ, Deutsche Entom. Zeitschr. 1890, p. 110. — SEIDLITZ, Fauna Transsylvanica. 1891, p. 855. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 16 u. 538. — *Seidlitzi* KRAATZ, Deutsche Entom. Zeitschr. 1890, p. 111. — *decipiens* SEIDLITZ, Wiener Entom. Zeitg. 1890, p. 149 (nec FISCH.); Fauna Transsylv. 1891, p. 855. — *elegans* SCHWAB (nec FISCH.) Verh. u. Mitth. des sieb. Ver. f. Naturw. in Hermannstadt XXXIX, 1889, p. 90. — *elegans var. Seidlitzi* HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 120 Taf. IV, Fig. 1*a*.

Tafel II, Fig. 6.

Mattgrün, stellenweise kupferroth, die Fühler vom fünften Glied an, die Trochanteren, Tibien und Tarsen gelbroth. Kopf kahl, sehr fein längsstreifig. Halsschild fein quer gerunzelt, niederliegend weiss behaart. Schildchen fein runzlig gekörnt. Flügeldecken breit oval, an der Basis am schmälsten, nach hinten verbreitert; die weisse Zeichnung ist folgende: der hintere Ast der

Humerallunula weit nach hinten reichend, am Ende verbreitert oder schwach nach vorn gebogen; die Mittelbinde erst schräg nach vorn gerichtet, dann bildet sie einen Winkel, läuft mit der Naht parallel und endigt mit einem scharf gebogenen Haken, der beinahe die Naht erreicht. Die zwei Enden der Apicallunula sind breit gerundet. Die Humeral- und Apicallunula und die Mittelbinde sind am Seitenrand durch einen breiten Streifen verbunden. Kiefer- und Lippentaster gelblich-weiss, nur die Spitze des Endgliedes ist schwarzbraun. Clypeus seitlich nur um ein Drittel schmäler als in der Mitte. Länge 14—15,6 mm.

Diese aus Südrussland beschriebene Art kommt in Ungarn an den nördlicher gelegenen siebenbürgischen Salzstellen in Gesellschaft mit *C. chiloleuca* FISCH. vor, für die sie auch bis zum Jahre 1889 gehalten wurde. Ich kenne sie von folgenden Fundorten: V. Torda, Apahida (Tarcsa völgye), Szamosfalva, Szék (Szolnok-Doboka vm.).

8. Cicindela chiloleuca FISCHER, 1820.

Entomographia imperii rossici. I, 1820, p. 5, t. 1, f. 2.

DEJEAN, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 79; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 35, t. 4, f. 5. — SEIDLITZ, Fauna Transsylv. 1888, p. 2; Wiener Entom. Zeitg. 1890, p. 150. — HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 121, t. 4, f. 2. — GANGLBAUER, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 16 u. 538.

ab. Mniszechi (MANNH. i. l.) W. HORN, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 122, t. 4, f. 2*a*.

Tafel II, Fig. 5.

Kopf breit, Augen stark vorstehend, Stirn und Scheitel grob gerunzelt. Halsschild cylindrisch, etwas länger als breit, quer gerunzelt, anliegend gelblich-weiss behaart. Flügeldecken stärker punktiert. Matt- oder graugrün; Kopf, Halsschild und Flügeldecken zwischen der Punktierung zum Theil kupferroth. Die Zeichnung der Flügeldecken ist ganz so wie bei *stigmatophora*, aber viel breiter; der hintere Ast der Humerallunula ist nur schwach nach vorn gebogen, der nach hinten gerichtete Ast der Mittelbinde ist breit und zerrissen. Selten ist der hintere Ast der Humerallunula und der Mittelbinde ganz zerrissen oder ganz fehlend, so dass nur deren Spuren vorhanden sind; solche Exem-

plare bilden die *ab. Mniszechi* (Mannh. i. l.) W. Horn, die ich bei Vizakna (Com. Alsó-Fehér) sammelte. Trochanteren, Tibien und Tarsen mehr gelb. Länge 10—14 mm.

Ausser Russland, Turkestan, Westsibirien und der Türkei kommt sie auch in Ungarn vor und zwar auf den siebenbürgischen Salzgebieten, so bei Déva, Szerdahely, Vizakna, Felsö-Bajom, Segesvár, Idecspatak, Görgény-Sóakna, Szamosujvár, Szék, Szamosfalva, Torda és Mezö-Záh.

9. Cicindela viennensis Schrank, 1781.

Enum. Insect. Austr. 1781, p. 190.

Schaum, Naturgeschichte Insekt. Deutschl. I, 1856, p. 28. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 537. — *sinuata* Panzer, Faun. Germ. II, 1793, p. 19. — Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 76; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 31, t. 4, f. 1. — *litterata* W. Horn, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 141. — *litterata* Sulz *var. sinuata* Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 15. — *arenaria* Fuessly *var. sinuata* Panz., Kuthy, Fauna regni Hungariae, Coleoptera. 1897, p. 21.

ab. apicalis D Torre, 8. Jahresber. Ver. Naturk. Linz 1877, p. 22. — W. Horn, Monogr. paläarkt. Cicind. 1891, p. 142.

Tafel II, Fig. 7—8.

Grün oder grünlich-kupferfarben, auf den Flügeldecken weiss gezeichnet. Kopf jederseits fein längsstreifig, in der Mitte und auf dem kahlen Scheitel fein runzlig gekörnt; Augen vorspringend. Das Halsschild etwas breiter als der Kopf (ohne die Augen), hinten ebenso breit als in der Mitte, fein gekörnt und weiss, quer anliegend behaart. Flügeldecken nach hinten schwach erweitert, mit punktförmigen Grübchen bedeckt, die im Grunde blau sind, die schmale weisse Zeichnung besteht aus einer Humerallunula, die in einen Haken endigt, aus einer Mittelbinde, die wie aus zwei Monden zusammengesetzt erscheint und neben dem Seitenrand nach vorn und hinten einen Ast zur Humeral- und Apicallunula sendet; letztere ist neben der Naht am breitesten, neben dem Seitenrand sendet sie einen Haken nach vorn und innen, der sehr selten auch fehlen kann. Diese Form bezeichnen wir als *ab. apicalis* D Torre (Taf. II, Fig. 8). Unten grün; die Brust ist bronzeglänzend, ebenso die Tibien. Unten weiss behaart, besonders an den Seiten. Länge 8—9 mm.

C. viennensis hat eine Verbreitung von Mitteleuropa bis Westsibirien. In Ungarn ist sie ziemlich häufig, besonders an sandigen Flussufern, wo sie auf kleinere Insekten Jagd macht; ihre Fundorte sind: I. Budapest, Péczel, Isaszegh, Keczel, Hajós, P.-Poó, Debreczen; II. Keszthely, Öszöd; III. K.-Kálna; IV. Szomotor; V. Mezö-Záh, Szászrégen, Dicsö-Szent-Márton, Medgyes, Nagyenyed, Porcsesd, Vöröstoronyi szoros; VI. Szászkabánya. *Ab. apicalis* DTorre kenne ich nur in einem Exemplar, welches Prof. Julius Szalay bei Szászkabánya sammelte.

10. Cicindela Fischeri Adams, 1817.

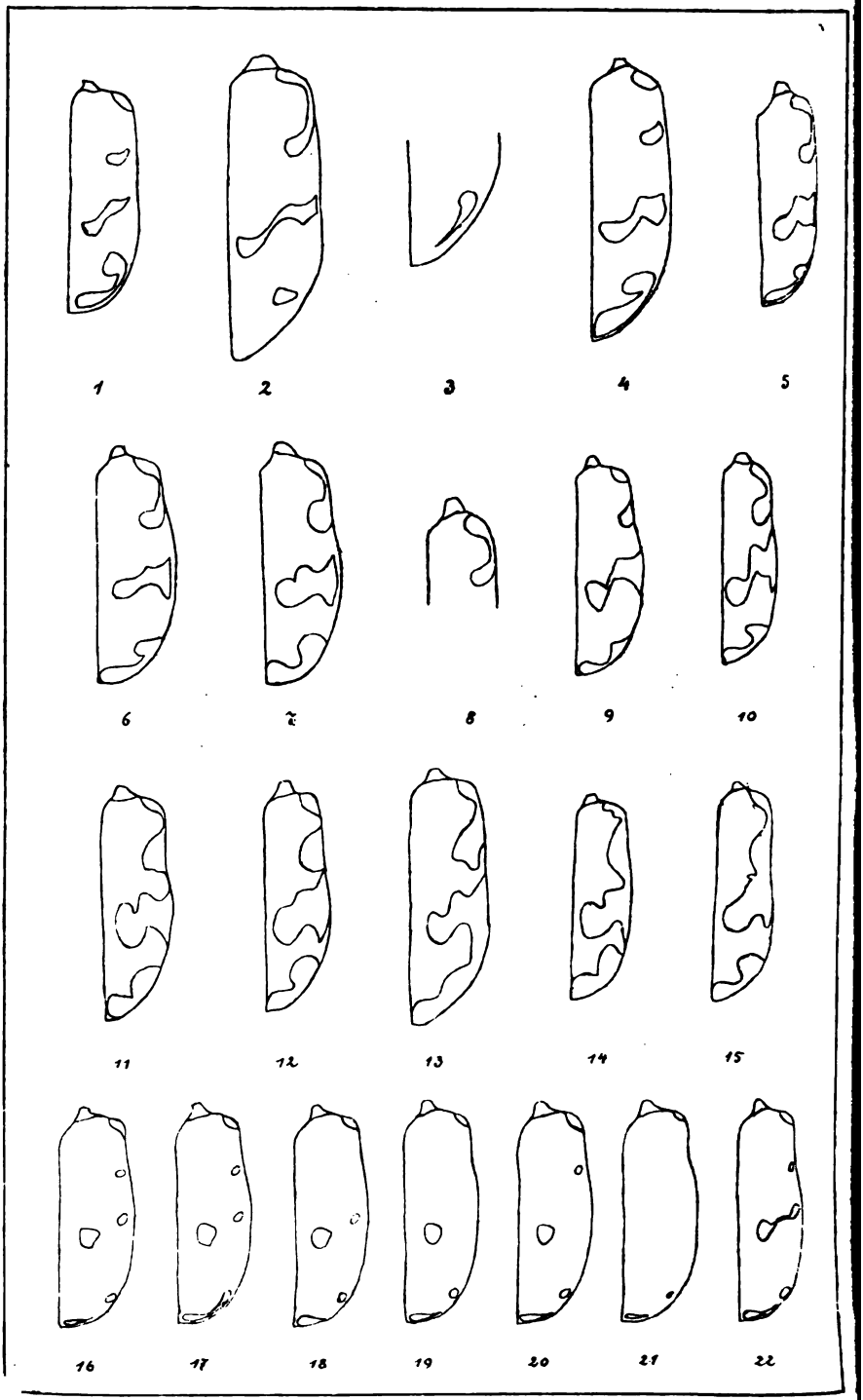
Mém. Soc. Imp. Moscou. V, 1817, p. 279.

Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 103; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 41, t. 5, f. 3. — W. Horn, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 153, t. 6, f 3. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 17 und 538.

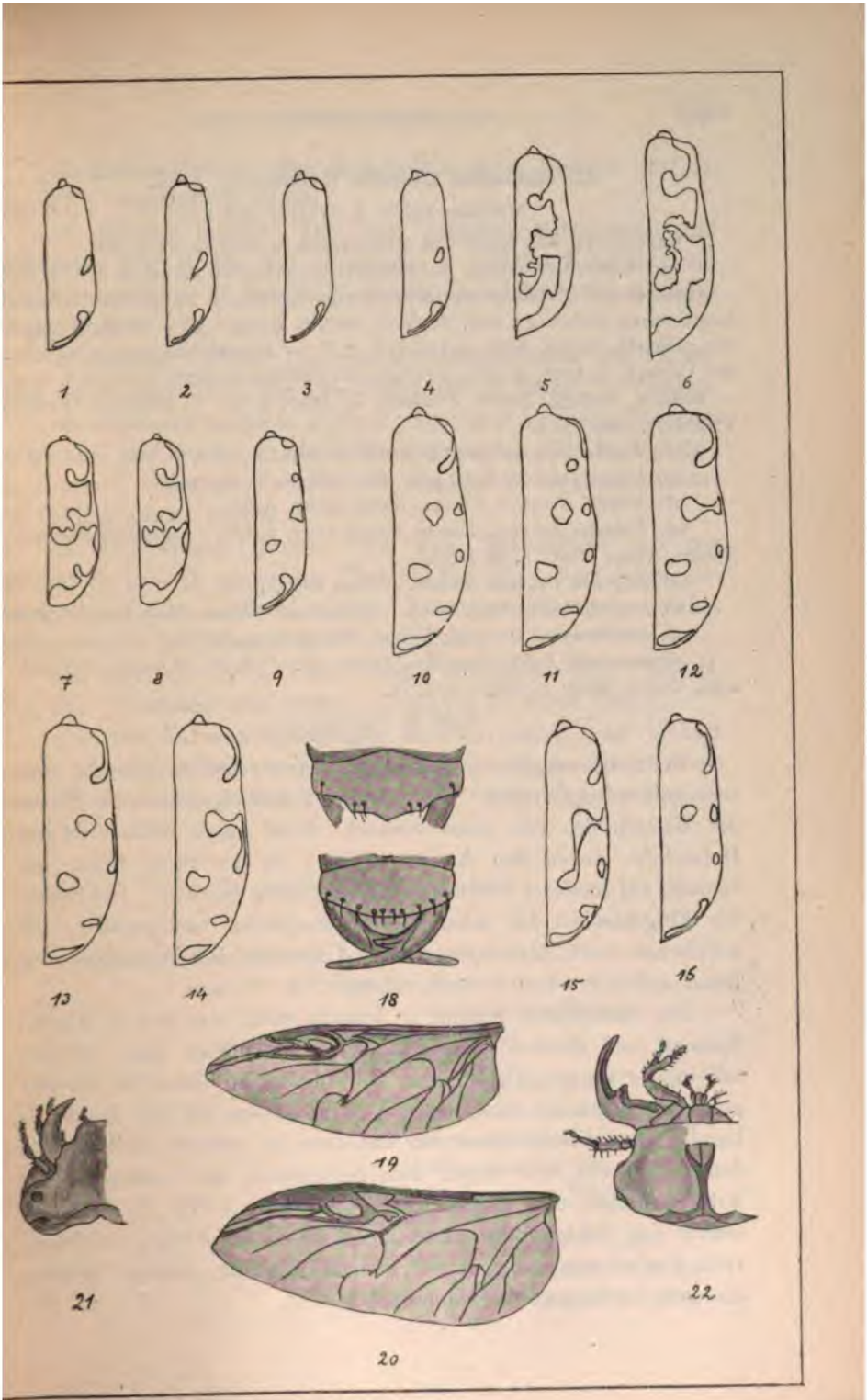
Tafel II, Fig. 9.

Hat Aehnlichkeit mit *C. litoralis*, ist aber viel kleiner, die Flügeldecken sind anders gefleckt und die Mitte der Bauchsegmente (mit Ausnahme des Hinterrandes) ist unpunktiert. Kupferfarben, grün, grünlich-blau oder selten schwarz. Auf den Flügeldecken hat sie einen Humeralfleck, selten auch einen hinter den Schultern, einen Querfleck in der Mitte neben dem Seitenrand, manchmal hinter diesem noch einen zweiten in der Mitte der Flügeldecken und endlich eine Apicallunula, die auch in zwei Flecke getheilt sein kann. Die Seiten der Flügeldecken sind parallel. Unterseite blau oder grün. Länge 6—10 mm.

Verbreitet ist diese Art über die Türkei, Südrussland, den Kaukasus, Kleinasien, Syrien, Cyprus, Turkestan, sowie angeblich Ungarn und Oesterreich (Schönbrunn). Aus Ungarn wird sie ohne näheren Fundort von W. Horn (Monogr. der paläarkt. Cicindelen 1891, p. 153) und Beuthin (Entom. Nachr. XVIII, 1892, p. 376) erwähnt. Ich selbst habe noch kein ungarisches Exemplar gesehen und halte ihr Vorkommen in Ungarn für sehr unwahrscheinlich.



Tafel I (Fig. 1—22).



Tafel II (Fig. 1—22).

11. Cicindela litoralis Fabricius, 1787.

Mantissa Insect. I, 1787, p. 185.

Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 17 u. 538.

var. nemoralis Olivier, Entomologia II, 1790, Nr. 33, p. 13, t. 3, f. 36. — Ganglbauer, Die Käfer von Mitteleuropa I, 1892, p. 17 u. 538. — *lunulata* Fischer, Entomogr. imp. rossici I, 1820, p. 3, t. 1, f. 16. — Horn, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 159, t. 6, f. 7. — *Litoralis* Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 104; Iconogr. des Coléopt. I, 1829, p. 42, t. 5, f. 4. — Schaum, Naturg. Insekt. Deutschl. I, 1856, p. 31. — Seidlitz, Fauna Transsylv. 1888, p. 2.

ab. discors Dejean, Spec. gen. des Coléopt. I, 1825, p. 105.

ab. lugens Dejean, Spec. gen. des Coléopt. V, p. 214.

ab. Koltzei Beuthin, Entom. Nachr. 1890, p. 93.

ab. Fabricii Beuthin, Entom. Nachr. 1892, p. 360. — *lunulata* Beuthin, Entom. Nachr. 1890, p. 93 (olim.).

ab. Ragusae Beuthin, Entom. Nachr. 1890, p. 93.

ab. conjunctae-pustulata Dokht. Horae Soc. Entom. Ross. 1887, p. 438.

ab. mediterranea Beuthin, Entom. Nachr. 1892, p. 361.

ab. venatoria Poda, Ins. Mus. Graec. 42. — Horn, Monogr. der paläarkt. Cicind. 1891, p. 162, t. 6, f. 7*e*.

Tafel II, Fig. 10—16.

Grün, bronzegrün, grünlich-blau, braunschwarz, schwarz oder sehr selten kupferroth. Wangen und Schläfen, ebenso die Seiten des Halsschildes fein weiss behaart. Kopf kaum breiter als das Halsschild, neben den Augen stärker, an der Stirn feiner gerunzelt, auf letzterer Stelle selten fein runzlig gekörnt. Die Seiten der Flügeldecken bei männlichen Exemplaren fast parallel, bei weiblichen nach hinten erweitert. Unterseite mit Ausnahme der Brust spärlich weiss behaart. Länge 10—16 mm.

Die Stammform kommt in Ungarn nicht vor, nur in Algier, Spanien und Sicilien; ihre Farbe ist dunkelblau oder schwarz mit breiter weisser Mittelbinde. Die ungarische bisher für *litoralis* gehaltene Form ist *var. nemoralis* Oliv. Diese hat eine Humeral-lunula, zwei Flecke im ersten und zwei im zweiten Drittel, von denen sich der eine neben dem Seitenrand, der andere in der Mitte befindet, und endlich einen Apicalmond (Taf. II, Fig. 10). Durch das Fehlen oder Zusammenfliessen der Flecke entstehen viele Variationen; von diesen können folgende genannt werden, die auch in Ungarn vorkommen:

ab. Koltzei BEUTH. Die Humerallunula ist getheilt (Taf. II, Fig. 11). Fundort: II. Öszöd.

ab. Fabricii BEUTH. Die zwei vorderen Mittelflecke sind verbunden (Taf. II, Fig. 12). Fundorte: I. Gödöllö, Fehértó, Szegvár, Peszér, Gyón; II. Öszöd; V. Szamosújvár, Szék; VI. Szászkabánya, Palics; VIII. Novi.

ab. Ragusae BEUTH. Die zwei Mittelflecke neben dem Seitenrand verbunden (Taf. II, Fig. 13). Fundorte: II. Öszöd; V. Vizakna.

ab. conjunctae-pustulata DOKHT. Die zwei Flecke neben dem Seitenrand und der vordere Mittelfleck verbunden (Taf. II, Fig. 14). Fundorte: I. Isaszegh, Gödöllö; II. Öszöd; V. Vizakna, Torda; VI. Szászkabánya, Palics.

ab. mediterranea BEUTH. Die zwei Mittelflecke und der vordere Seitenfleck verbunden (Taf. II, Fig. 15). Von dieser seltenen Aberration ist mir nur ein Exemplar bekannt, welches FRIVALDSZKY bei Ulma (reg. VI) sammelte.

ab. venatoria PODA. Der hintere Mittelfleck fehlt (Taf. II, Fig. 16). Ebenfalls sehr selten. Fundort: V. Torda (BIRÓ).

Von den Farbenabänderungen sind zu nennen: die lebhaft grüne *ab. discors* DEJ. und die schwarze *ab. lugens* DEJ. Diese zwei Formen ebenso wie *var. nemoralis* OLIV. sind in Ungarn nicht selten.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. Flügeldecke von *Cicindela soluta* LATR. DEJ.
„ 2. „ „ „ *silvatica* LINN.
„ 3. „ „ „ „ *ab. hungarica* BEUTH.
„ 4. „ „ „ *silvicola* LATR. DEJ.
„ 5. „ „ „ *hybrida* LINN.
„ 6. „ „ „ „ *subsp. riparia* DEJ.
„ 7. „ „ „ „ *ab. monasteriensis* WESTH.
„ 8. „ „ „ „ *ab. bipunctata* LETZNER.
„ 9—10. „ „ „ „ *subsp. maritima* DEJ.
„ 11—15. „ „ „ „ *var. magyarica* ROESCHKE.
„ 16. „ „ „ *campestris* LINN.
„ 17. „ „ „ „ *ab. conjuncta* DTORRE.
„ 18. „ „ „ „ *ab. quinquemaculata* BEUTH.
„ 19. „ „ „ „ *ab. quadrimaculata* BEUTH.

Fig. 20. Flügeldecke von *Cicindela campestris ab. protos* DTorre.
„ 21. „ „ „ „ *ab. affinis* Fisch.
„ 22. „ „ „ „ *ab. connata* Heer.

Tafel II.

Fig. 1. Flügeldecke von *Cicindela germanica* Linn.
„ 2. „ „ „ „ *var. sobrina* Gory.
„ 3. „ „ „ „ *ab. protos* DTorre.
„ 4. „ „ „ „ *ab. deuteros* DTorre.
„ 5. „ „ „ *chiloleuca* Fisch.
„ 6. „ „ „ *stigmatophora* Fisch.
„ 7. „ „ „ *viennensis* Schrnk.
„ 8. „ „ „ „ *ab. apicalis* DTorre.
„ 9. „ „ „ *Fischeri* Adams.
„ 10. „ „ „ *litoralis* Fabr. *var. nemoralis* Oliv.
„ 11. „ „ „ „ *ab. Koltzei* Beuth.
„ 12. „ „ „ „ *ab. Fabricii* Beuth.
„ 13. „ „ „ „ *ab. Ragusae* Beuth.
„ 14. „ „ „ „ *ab. conjunctae-pustulata* Dos
„ 15. „ „ „ „ *ab. mediterranea* Beuth.
„ 16. „ „ „ „ *ab. venatoria* Poda.
„ 17. Oberlippe „ „ *silvicola* Latr. Dej.
„ 18. „ „ „ *hybrida* Linn.
„ 19. Flügel „ „ *chiloleuca* Fisch.
„ 20. „ „ „ *soluta* Latr. Dej.
„ 21. Kopf der Larve von *Cicindela chiloleuca* Fisch. von oben.
„ 22 Derselbe von unten.

8.

UEBER DIE PHYSIKALISCHE DEUTUNG DER STERNGRÖSSE.

Vom corr. Mitgl. R. von KÖVESLIGETHY.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 19. Februar 1900.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö". (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVIII, p. 113—120.

Der Begriff der Sterngrösse wurde von PTOLEMAIOS in die Astronomie eingeführt, indem er die Sterne des von HIPPARCHOS übernommenen Kataloges nach ihrem auf das Auge ausgeübten Lichteindruck durch Schätzung in sechs Klassen theilte. Das Verfahren schien eine solche Sicherheit zu bieten, dass der Urheber in einigen Fällen selbst Unterabtheilungen unterscheiden konnte, und in der That beträgt der wahrscheinliche Fehler einer PTOLEMAIOS'schen Grössenschätzung nach den ausgedehnten Untersuchungen PICKERING's nur $\pm$ 0,3 mg. (magnitudo). Die Methode findet auch heute noch Anwendung, und der grösste, nur auf Schätzungen beruhende Katalog ist die Bonner Durchmusterung, welche noch lange als Grundlage jeder auf die Lichtintensität der Fixsterne Bezug nehmenden Untersuchung dienen wird. Mit den Resultaten der Potsdamer Photometrischen Durchmusterung verglichen, haben diese Schätzungen, wenn Sterne bis zur 7,5 Grösse mitgenommen werden, einen wahrscheinlichen Fehler von nur $\pm$ 0,2 mg.

ARGELANDER, der Begründer des erwähnten Verzeichnisses, empfahl ein interpolatorisches Vorgehen, die sogenannte Stufenschätzung, welche für das Studium der veränderlichen und neuen Sterne auch heute noch unentbehrlich ist. Die Genauigkeit des

Verfahrens geht bis $\pm$ 0,06 mg, ist also ebenso gross, als die Genauigkeit der mit dem besten Instrumente, dem ZÖLLNER'schen Photometer angestellten Beobachtungen, so dass die besten Schätzungen mit den besten Messungen gleichwerthig zu nennen sind. Der ausserordentliche Fortschritt, den die Astronomie in der Ortsbestimmung der Gestirne aufweist, ist auf dem Gebiete der Photometrie einem fast völligen Stillstande entgegen zu halten.

Die Vergleichung der Schätzungen mit den Resultaten der Messung erwies zunächst die Richtigkeit des FECHNER'schen psychophysischen Gesetzes, und führte sodann zum Zusammenhang der Sterngrösse mit der Intensität. Bedeuten m_1 und m_2 die Grössen zweier Sterne, deren Intensitäten J_1 und J_2 sind, $\varkappa$ eine Constante, so hat man

$$m_2 - m_1 = -\frac{1}{\log \varkappa} \log \frac{J_2}{J_1}, \qquad (1)$$

wobei das negative Vorzeichen der Gewohnheit entspricht, schwächere Sterne mit höherer Ordnungszahl zu belegen. Die Nebeneinanderstellung von Schätzung und Messung zeigt zwar, dass die Grössenordnung der Sterne kein ganz homogenes Maass darstellt, insofern $\varkappa$, das für Sterne der 3.—6. Grösse merklich constant ist, für hellere Sterne grösser wird. Für die mit freiem Auge sichtbaren Sterne gilt jetzt als bester Werth $\log \varkappa = 0{,}340$, für die telescopischen Sterne dagegen $\log \varkappa = 0{,}394$.

Der in (1) gegebene Zusammenhang kann aber bei beliebiger Wahl der Constante $\varkappa$ gerade zur einheitlichen Definition der Sterngrösse dienen. Nimmt man nämlich, wie dies allgemein geschieht, mit POGSON $\log \varkappa = 0{,}400$ an, so kommt

$$m_2 - m_1 = -2{,}5 \log \frac{J_2}{J_1}, \qquad (2)$$

und jene Sterne haben einen um *eine* Grössenklasse verschiedenen Glanz, deren Intensitätsverhältniss $\frac{J_2}{J_1} = 2{,}512$ beträgt.

Wie zu ersehen ist, bringt die POGSON'sche Constante die Messungsergebnisse der Sterne 6ter und höherer Ordnung in Uebereinstimmung mit den Schätzungen der Bonner Durchmusterung. Bei den helleren Sternen kommen natürlich systematische Ab-

weichungen vor, doch sind diese ohne Belang, da für diese bereits genaue Intensitätskataloge angelegt sind.

Die in dieser Weise festgelegte Definition der Sterngrösse ist noch vollkommen subjectiv: sie hängt von der mit der Wellenlänge veränderlichen Empfindlichkeit des Auges ab, ist also selbst für ein normales Auge von der spectralen Zusammensetzung des Sternlichtes, also dem Sterntypus abhängig, und verändert sich streng genommen mit der Absorption sowohl des Instrumentes, als der Luft, welche auf Mischlicht verschiedener Zusammensetzung verschiedenartig wirkt. Besonders anschaulich wird diese Abhängigkeit, wenn visual und photographisch abgeleitete Sterngrössen verglichen werden, da die empfindliche Platte nicht nur zwischen anderen Grenzen der Wellenlänge appercipiert, sondern auch zwischen diesen Grenzen nach ganz anderen Gesetzen, als die Netzhaut des Auges.

Es ist daher von Wichtigkeit, die physikalische Deutung der Sterngrösse zu haben, da diese mit vollem Rechte besonders in dem Studium der veränderlichen und neuen Sterne als leicht zu schätzendes Moment noch lange Zeit Anwendung finden wird. Ich denke hier natürlich nicht an den Umstand, der in Abschätzungen der Dimensionen des Sternsystems hin und wieder herangezogen wird, dass nach Gleichung (2) zwei gleich intensive Sterne, deren Entfernungsverhältniss 1 : 1,585 beträgt, um eine Grössenklasse verschieden erscheinen, sondern versuche die, besonders in der Beurtheilung der Natur neuer Sterne wichtige Frage zu beantworten, ob und wie die Grösse durch bloss physikalische Zustandsvariabeln ausgedrückt werden könne?

Das vereinte Mischlicht eines continuierlichen Spectrums besitzt die visuelle Intensität

$$J = \frac{4}{\pi}\,\mu A \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} s \,\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+\mu^2)^2}\,d\lambda, \qquad (3)$$

wenn A die ganze, zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ genommene objective Intensität, μ die Wellenlänge des Intensitätsmaximums, λ_1 und λ_2 die Grenzen des sichtbaren Spectrums und s die Empfindlichkeit des Auges bezeichnen, welch letztere wenig-

stens für ein normales Auge eine continuierliche, auffallende Maxima und Minima nicht aufweisende Function der Wellenlänge ist. Die analytische Form dieser Function ist allerdings unbekannt, doch kann sie empirisch bestimmt werden, wenn die visuellen Intensitäten mit den Angaben eines vollkommen geschwärzten Bolometers verglichen werden. Etwas einfacher gewinnt man numerische Werthe des Differentialquotienten, indem man den wahrscheinlichen Fehler bestimmt, mit welchem ein homogenes Strahlenbündel der entsprechenden Spectralgegend eines continuierlichen Spectrums eingefügt werden kann.

Einem bekannten Satze der Integralrechnung nach kann ein zwischen den Grenzen λ_1 und λ_2 geeignet gewählter Mittelwerth s_0 der Function s vor das Integral gesetzt werden, und wenn nun

$$F(\mu) = \frac{4}{\pi}\,\mu \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda^2}{(\lambda^2 + \mu^2)^2}\, d\lambda \qquad (4)$$

geschrieben wird, so erhält man (3) in der folgenden Gestalt:

$$I = s_0 A F(\mu). \qquad (5)$$

Für dasselbe Auge und einen Stern gleicher Zusammensetzung ist s_0 dasselbe, für die Sterne verschiedener Typen dagegen verschieden. Praktisch kann jedoch von der Verschiedenheit der s_0 ganz abgesehen werden, insofern in Potsdam die Intensitäten sämmtlicher Sterne mit dem constant belassenen und auf (dem II. Typus entsprechende) „mittlere Sternfarbe" eingestellten künstlichen Sterne verglichen wurden.

Die nachfolgenden Resultate werden also genau gelten, wenn die beiden zu vergleichenden Sterne demselben Typus angehören, und werden angenähert richtig sein, wenn die Spectraltypen der Sterne verschieden sind.

Infolge der Gleichung (5) kann das POGSON'sche Gesetz (2) auch in der Form

$$m_2 - m_1 = -2{,}5 \log \frac{A_2 F(\mu_2)}{A_1 F(\mu_1)} \qquad (6)$$

geschrieben werden. Hieraus ersieht man sogleich, dass eine einheitliche Definition für die Einheit der Sterngrösse *nicht* gegeben werden kann, da ja A und μ sowohl von der stofflichen

Beschaffenheit, als dem Zustande, also der Temperatur und Dichte des strahlenden Körpers abhängt. Doch kann eine allgemein gültige Formel erlangt werden, wenn man sich an absolut schwarze Körper hält, denen ja die Sterne wegen der Dicke der durchstrahlten Schichte einigermaassen nahe stehen dürften. Es ist dabei stets möglich, den in der Temperatur begangenen Fehler wenigstens der Richtung nach zu bestimmen.

In dem genannten einfacheren Falle wird A und μ eine reine Function der Temperatur, so dass man hat

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\right)^4, \quad \text{und} \quad \mu\Theta = 2880, \tag{7}$$

wenn die Wellenlängen in Tausendstel mm ausgedrückt werden.

Demzufolge wird nun

$$m_2 - m_1 = 10 \log \frac{\mu_2}{\mu_1} - 2{,}5 \log \frac{F(\mu_2)}{F(\mu_1)}, \tag{8}$$

und in dieser Gleichung ist der Unterschied der Grössen rein durch die absolute Temperatur bestimmt, denn wenn μ bekannt ist, so wird es laut der zweiten Gleichung in (7) auch Θ.

Nun möge μ_1 die Wellenlänge des Intensitätsmaximums in dem Spectrum eines Sternes von der Grösse m_1 bedeuten, der seine Ordnung (jedoch nicht durch Entfernungsänderung) um $m_2 - m_1 = 1$ mg ändert. Das entsprechend veränderte μ_2 kann sohin aus der Gleichung (8) berechnet werden, wenn man beachtet, dass

$$F(\mu) = \frac{2}{\pi}\left(\text{arctang}\,\frac{\mu(\lambda_2 - \lambda_1)}{\mu^2 + \lambda_1\lambda_2} - \mu\,\frac{(\mu^2 - \lambda_1\lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1^2 + \mu^2)(\lambda_2^2 + \mu^2)}\right) \tag{9}$$

ist. Der letztere Ausdruck kann für bequeme numerische Rechnung leicht umgewandelt werden. Schreibt man nämlich

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} \quad \text{und} \quad \text{tang}\,\varphi_2 = \frac{\lambda_2}{\mu}, \tag{10}$$

so hat man einfach

$$F(\mu) = \frac{2}{\pi}\Big((\varphi_2 - \varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\cos(\varphi_2 + \varphi_1)\Big). \tag{11}$$

Nach früheren von mir in O'-Gyalla angestellten Messungen* ist für die Sterne des I., II. und III. Typus bez. $\mu_1 = 0{,}45,\ 0{,}53,$

* Beob. angest. am astrophys. Observ. O'-Gyalla, Bd. IX.

0,60. Sind $\lambda_1 = 0{,}39$ und $\lambda_2 = 0{,}76$ die Grenzen des sichtbaren Spectrums für ein normales Auge, so erhält man durch Substitution der besagten Werthe für die Grössenänderung 1 aus (8)

$$\begin{array}{llll} \text{für Typus} & \text{I:} & \log \mu_2 - \tfrac{1}{4} \log F(\mu_2) + 0{,}0923 = 0 & \\ \text{„} \quad \text{„} & \text{II} & \text{„} \quad \text{„} & + 0{,}0079 = 0 \\ \text{„} \quad \text{„} & \text{III} & \text{„} \quad \text{„} & - 0{,}0592 = 0. \end{array} \tag{12}$$

Die Auflösung der Gleichungen, die am leichtesten mit Hülfe der im Anhange gegebenen numerischen Tafel geschieht, ergiebt für die drei Typen der Reihe nach

$$\mu_2 = 0{,}546; \quad 0{,}637; \quad 0{,}715. \tag{13}$$

Wächst daher die Grössenklasse eines Sternes des ersten Typus um *eine* Einheit, so nimmt das Licht des Sternes ebenso ab, als ob die Wellenlänge des Intensitätsmaximums im Spectrum desselben von 0,450 auf 0,546 gewandert wäre.

Diese einander entsprechenden Werthe von μ_1 und μ_2 können laut (7) auch in absoluter Temperatur ausgedrückt werden; man hat so

$$\begin{array}{llll} \text{für Typus} & \text{I:} & \Theta_1 = 6400^0; \quad \Theta_2 = 5274^0; & \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1{,}213 \\ & \text{II} & 5434 \qquad 4524 & 1{,}201 \\ & \text{III} & 4799 \qquad 4028 & 1{,}191, \end{array} \tag{14}$$

und kann daher den vorigen Satz auch in der folgenden Fassung aussprechen: Der Zunahme der Grössenklasse eines weissen Sternes um eine Einheit entspricht ein Sinken der Temperatur von 6400° auf 5274°. Das Verhältniss der Anfangs- und Endtemperatur, welche dem Wachsen um *eine* Grössenklasse entspricht, zeigt für die einzelnen Typen zwar einen entschiedenen Gang, der jedoch so gering ist, dass man innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der besten Messungen

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1{,}202 \tag{15}$$

setzen kann. Der so begangene Fehler beträgt bei den Sternen des I. Typus 0,049, bei jenen des III. Typus 0,051 mg, ist also noch etwas kleiner, als der wahrscheinliche Fehler der schärfsten Messungen.

Jetzt kann man statt (2) die physikalisch ganz streng deutbare Gleichung aufstellen:

$$m_2 - m_1 = -12{,}5 \log \frac{\Theta_2}{\Theta_1}, \qquad (16)$$

welche so ausgesprochen werden kann: *Wenn die absolute Temperatur eines punktförmigen, absolut schwarzen Körpers innerhalb der die Sichtbarkeit ermöglichenden Temperaturgrenzen um 20 % erhöht wird, so wächst die den Glanz ausdrückende Grössenklasse annähernd unabhängig von der Farbe des Mischlichtes um eine Einheit.*

Kann der Stern nicht als absolut schwarz betrachtet werden, so kommt neben der Temperatur natürlich auch der Druck in Rechnung, und die Lösung der Frage wird für jeden einzelnen Stern verschieden. In diesem Falle bilden die in (14) gegebenen Temperaturen nur die untere Grenze an, insofern als — falls zwei Körper dieselbe Wellenlänge der Maximalintensität besitzen — stets der *nicht* schwarze Körper von höherer Temperatur ist. Man kann also sagen, dass die Temperatur derjenigen Schichte, welche den Haupttheil des Spectrums der Fixsterne liefert, für den I., II. und III. Typus höher ist, als bez. 6400°, 5430° und 4800°.

Wollte man die Sterngrösse nicht durch die visuelle, sondern die Totalintensität definieren, so wäre laut (4) $F(\mu) = 1$ zu setzen, wonach (6) und (7) vereint geben

$$m_2 - m_1 = -10 \log \frac{\Theta_2}{\Theta_1}. \qquad (17)$$

Die Auflösung dieser Gleichung für $m_2 - m_1 = 1$ ist

$$\frac{\Theta_2}{\Theta_1} = 1{,}259, \qquad (18)$$

also ein von (15) nicht sehr verschiedener Werth. Die (wie man sie nennen könnte) energetische Sterngrösse unterscheidet sich also wenig von der visuellen.

Vollkommenheit halber möge noch der Versuch gemacht werden, die inzwischen aufgetauchte Frage nach den Temperaturgrenzen der Sichtbarkeit der Strahlung eines absolut schwarzen Körpers zu beantworten.

Schliesst man Luminiscenzerscheinungen aus, so beginnt der Glühzustand eines jeden Körpers sichtbar zu werden, wenn die

Temperatur 525° C. oder $\Theta = 798°$ erreicht. Für den absolut schwarzen Körper ist dann nach (7) $\mu = 3{,}609$ und dementsprechend $F(\mu) = 0{,}003935$. Dies ist also der Minimalwerth, neben welchem die Strahlung beobachtet werden kann. Von hier ab wächst $F(\mu)$ mit μ zusammen und erreicht für $\mu = 0{,}309$ den Maximalwerth $F(\mu) = 0{,}2684$, dem die Temperatur $\Theta = 9320°$ entspricht. Bei weiter zunehmendem μ nimmt nun $F(\mu)$ ab, und es ist wahrscheinlich, dass die Sichtbarkeit der Strahlung wieder aufhört, wenn $F(\mu)$ den vorher gefundenen Anfangswerth erreicht. Die zweite reelle Wurzel der Gleichung $F(\mu) = 0{,}003935$ ist aber $\mu = 0{,}002476$, der die Temperatur $\Theta = 1163000°$ entspricht.

Derjenige absolut schwarze Körper, dessen absolute Temperatur niedriger als 798° und höher als 1163000° ist, emittiert so lange, bez. kurze Wellen, dass deren Mischlicht das normale Auge nicht zu percipieren im Stande ist. Die von SECCHI auf Grund des NEWTON'schen Strahlungsgesetzes errechnete (doch schon lange als übertrieben erkannte) Sonnentemperatur von etwa 5 Millionen Graden, ist auch von dem jetzt gewonnenen Standpunkte aus abzuweisen. Die Strahlung von über jene Temperaturgrenzen hinausgehenden Körpern kann nur mit andern Reagentien als dem Auge beobachtet werden. Dies mag zum Theil den GOTHARD'schen Stern erklären.

Die gewonnenen Resultate lassen sich fast ungeändert auch aus jener Formel ableiten, welche PASCHEN-WIEN für den absolut schwarzen Körper geben, und werden mithin sozusagen unabhängig von der zu Grunde gelegten Spectraltheorie.

Nach PASCHEN ist die Spectralgleichung des absolut schwarzen Körpers unter Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungen:

$$i = \frac{5^4}{6}\,\mu^4 A\,\lambda^{-5} e^{-\frac{5\mu}{6}}.$$

Es besteht daher wieder die Gleichung (5), wenn darin statt des durch (9) gegebenen $F(\mu)$

$$\mathfrak{F}(\mu) = \frac{125}{6} e^{-\frac{5\mu}{\lambda_2}} \left(\frac{\mu^3}{\lambda_2^3} + \frac{3}{5}\frac{\mu^2}{\lambda_2^2} + \frac{6}{25}\frac{\mu}{\lambda_2} + \frac{6}{125}\right) -$$

$$- \frac{125}{6} e^{-\frac{5\mu}{\lambda_1}} \left(\frac{\mu^3}{\lambda_1^3} + \frac{3}{5}\frac{\mu^2}{\lambda_1^2} + \frac{6}{25}\frac{\mu}{\lambda_1} + \frac{6}{125}\right)$$

gesetzt wird. Nun werden die Gleichungen (12), welche das einer Grössenänderung *Eins* entsprechend veränderte μ_2 liefern:

$$\begin{aligned} \text{für Typus I: } & \log \mu_2 - \tfrac{1}{4} \log \mathfrak{F}(\mu_2) + 0{,}1679 = 0 \\ \text{II} \quad & + 0{,}0881 = 0 \\ \text{III} \quad & + 0{,}0200 = 0, \end{aligned}$$

und deren Lösungen sind

$$\mu_2 = 0{,}551; \quad 0{,}633; \quad 0{,}706.$$

Die an Stelle von (14) tretende Tabelle wird dann:

für Typus I:	$\Theta_1 = 6400^0$,	$\Theta_2 = 5230$;	$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1{,}224$
II	5434	4547	1,195
III	4799	4080	1,176.

Die Temperaturen sind nach der neuen Grundlage kaum verändert, nur der Gang des Verhältnisses von Anfangs- und Endtemperatur ist etwas stärker. Das Mittel

$$\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = 1{,}198$$

dagegen fällt weit innerhalb der Fehlergrenzen photometrischer Messungen mit dem Werthe (15) zusammen.

Die gegebene Deutung der Sterngrösse liefert im Falle der neuen Sterne sofort wichtige Ergebnisse, insofern man nun von der Grösse unmittelbar auf Temperaturen übergehen kann. Die rascheste Veränderung des Glanzes war bisher an T-Coronae zu beobachten, da der Stern innerhalb etwa $2^1/_2$ Stunden von der Grösse 5 bis zur Grösse 2 zunahm. Dem entspricht — da ja an eine Lichtzunahme infolge sehr rascher Annäherung nicht wohl zu denken ist — eine Temperaturzunahme von 4000^0 oder $0^0{,}495$ per Secunde, was ein ganz annehmbarer Werth erscheint, man möge das Aufleuchten durch Collision oder das Hervorquellen des noch feurig-flüssigen Innern erklären.

Logarithmen der visuellen Intensität.

Die Werthe $F(\mu)$ beziehen sich auf die von KÖVESLIGETHY, $\mathfrak{F}(\mu)$ auf von PASCHEN-WIEN gegebene Spectralformel.)

μ	$\log F(\mu)$	$\log \mathfrak{F}(\mu)$	μ	$\log F(\mu)$	$\log \mathfrak{F}(\mu)$
0,000	$-\infty$	—	0,60	9,2762	9,5930
001	7,2013	—	65	2354	5412
005	9001	—	70	1931	4818
020	8,5161	—	75	1499	4162
			80	1066	3454
0,05	8,8958	7,5916	85	0628	—
10	9,1682	8,5586	90	0195	—
15	3053	9,0460	95	8,9759	—
20	3795	3249	1,00	9336	—
25	4165	4961			
30	4286	5995	1,50	8,5437	—
35	4240	6579	2,00	2252	—
40	4073	6827	2,50	7,9629	—
45	3821	6842	3,00	7394	—
50	3507	6671	3,50	5498	—
55	3150	6357	4,00	3802	—

9.

NEUERE EXPERIMENTELLE DATEN ZUR KENNTNISS DER REFLEXVERBINDUNGEN ZWISCHEN OHR UND AUGE.

Vorgelegt der Akademie von Dr. ANDREAS HÖGYES, Prof. a. d. Universität Budapest, ordentliches Mitglied der Akademie der Wissenschaften, in der Sitzung vom 15. Mai 1899.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesitö". (Math. und Naturw. Anzeiger). Band XVII, pp. 449—456.

Zu Beginn der achtziger Jahre (1880—86) hatte ich öfter Gelegenheit, der geehrten Akademie über jene Untersuchungen Mittheilung zu machen, welche ich theils noch in Klausenburg, theils schon in Budapest angestellt hatte, und welche bewiesen, dass zwischen den Gehörsnervenendigungen und den Augenbewegungen eine constante bilaterale Reflexverbindung vorhanden ist; auch jene Experimente führte ich schon damals an, welche auf die innere Einrichtung des Nervenmechanismus dieser Reflexverbindung Licht zu werfen bestimmt waren. Es stellte sich heraus, dass die je 6 Augenmuskeln mit den je 6 Nervenendigungen in den Ampullen der halbkreisförmigen Kanäle des häutigen Labyrinthes beider Ohren in gekreuzter Reflexverbindung stehen und dass die associierte Bewegung beider Augen durch diese bewunderungswürdige Einrichtung automatisch geregelt wird.

Die Methodik dieser Untersuchungen, welche ich in den Berichten unserer Akademie anfangs der achtziger Jahre ausführlich mitgetheilt habe, blieb den Fachgelehrten des Auslandes unbekannt; deshalb findet man in den der deutschen, französischen und eng-

lischen Literatur angehörigen einschlägigen Arbeiten nur das Resultat meiner Untersuchungen mitgetheilt, ohne dass hierbei auf eine experimentelle Kritik eingegangen wäre. Zwei Autoren, BAGINSKI in Berlin und STEIN* in Moskau, versuchten zwar die Experimente an dem Labyrinthe des Kaninchens zu wiederholen; da ihnen aber die experimentelle Technik unbekannt war, gelangen die Versuche nur unvollständig. Am weitesten gelangte noch in dieser Frage EWALD** in Strassburg, der seine ausgebreiteten Versuche an Tauben anstellte und auf Grund seiner erschöpfenden literarischen Studien über die Function des Labyrinthes meine Versuche in die Reihe der bedeutendsten Arbeiten stellt, insofern er sie zu den epochemachenden Arbeiten von FLOURENS, GOLTZ, BREUER, MACH, SCHIFF und SCHRADER zählt und anerkennt, dass jene Versuche es bewiesen haben, dass der durch Drehen verursachte Schwindel — Drehschwindel — mit dem Labyrinth in Zusammenhang steht.

Da man sich in neuerer Zeit im Auslande viel mit dieser Frage befasst hatte und da man in den diesbezüglichen Arbeiten, obzwar auf anderen Wegen, aber dennoch auf jene Bahnen der experimentellen Forschung gelangt war, welche bei uns, durch meine oben erwähnten Untersuchungen schon zu Beginn der achtziger Jahre experimentell festgestellt und geklärt waren, entschloss ich mich, die Versuche von Neuem aufzunehmen, und, eventuell durch neuere experimentelle Daten ergänzt, auch in ihren Details in der ausländischen Literatur zu veröffentlichen.

Einige Resultate meiner neueren Forschungen beehre ich mich in folgendem der geehrten Akademie vorzulegen.

---

* STEIN: Die Lehre von den Functionen der einzelnen Theile des Labyrinthes. Aus dem Russischen übersetzt von Dr. C. VON KRZYWICKI. Jena 1894.

** EWALD: Physiologische Untersuchungen über das Endorgan des Nervus octavus. Wiesbaden 1892.

I.

Vollständiger und endgültiger Ausfall der bilateralen compensatorischen oder associierten Augenbewegungen bei Vögeln (Tauben, Krähen) nach beiderseitiger Zerstörung des Labyrinthes.

Der Hauptversuch zum Beweise, dass die associierten Augenbewegungen mit den Gehörsnerven des Labyrinthes im Zusammenhange stehen, wird folgendermaassen ausgeführt:

Man bindet ein Kaninchen in natürlich sitzender Stellung und mit natürlicher Kopfhaltung fixiert auf ein Operationsbrett und befestigt dieses an der Scheibe einer Centrifuge (Drehscheibe). Setzt man nun diese in der horizontalen Ebene in Drehung, so geräth der Kopf und der Körper des Kaninchens mit der Scheibe in Drehbewegung. Die Augen bleiben aber zurück und folgen sprungweise der Drehungsrichtung nach; es entwickelt sich ein bilaterales Zittern der Augäpfel (Nystagmus horizontalis), welches bei langsamer Bewegung seltener wird, bei schnellerer Bewegung aber zunimmt, eine gewisse Schnelligkeit indessen nicht überschreitet, ja bei einer gewissen Drehgeschwindigkeit sogar gänzlich aufhört, sodass die Augen nun unverrückt an der Drehbewegung des Körpers theilnehmen. Wenn nun die Bewegung der Drehscheibe plötzlich unterbrochen wird, so erscheint an den während des längeren Drehens zur Ruhe gekommenen Augen der Nystagmus von Neuem. Beide Augen oscillieren in der Drehungsrichtung weiter und kommen nach einer Zeit, die mit der Anzahl und Schnelligkeit der Drehungen proportioniert ist, wieder zur Ruhe. Dieser, während des Drehens und nach demselben erscheinende Nystagmus, welcher nichts weiter als eine associierte bilaterale Augenbewegung vorstellt, kann nach Belieben hervorgerufen, seine Erscheinungen wann immer beobachtet werden, falls das Thier gesund und in wachem Zustande ist. Die beschriebenen Erscheinungen der Augenbewegungen kommen immer auf dieselbe Weise zu Stande. Präpariert man nun bei Kaninchen das knöcherne Labyrinth frei und zerstört dann auf entsprechende Weise das häutige Labyrinth sammt den darin befindlichen Gehörsnervenendigungen und zwar in beiden Ohren, so bemerkt man den vollständigen Ausfall der bei Drehung sich sonst ein-

stellenden, oben beschriebenen Augapfelschwingungen; beide Augen verharren ganz unbeweglich in der Bewegungsrichtung des mit der Scheibe sich drehenden bewegungslosen Körpers und es tritt auch bei Einstellen der Drehung die horizontale Oscillation der Augen nicht auf. Es ist daher offenbar, dass jene associierten Augenbewegungen, welche die Bewegungen des Körpers und Koptes unwillkürlich zu begleiten pflegen, nur dann zu Stande kommen, wenn beide Labyrinthe unversehrt sind und in anhaltender Reflexverbindung mit dem die Augen bewegenden Nervenmuskelapparate stehen.

Erweitert wird dieser grundlegende Versuch dadurch, dass man durch unmittelbare Reizung der Gehörsnervenendigungen im Labyrinthe bilaterale Augenschwingungen hervorrufen kann.

Durch die in verschiedener Richtung vorgenommenen Abänderungen dieses Fundamentalversuches konnte ich bereits zu Beginn der achtziger Jahre die Einzelheiten der Reflexverbindung zwischen den Gehörsnervenendigungen der beiden Labyrinthe und den zwölf Augenmuskeln klar darlegen.

Das Freilegen des knöchernen und das Zerstören des häutigen Labyrinthes stellt bei Kaninchen, besonders beiderseitig ausgeführt, eine schwierige und langwierige Operation dar, die grosse Uebung erfordert; ferner kann das Thier zufolge der unausweichlichen Beschädigung des Kleinhirns nur einige Tage am Leben erhalten werden. Bei Tauben sind die Schwierigkeiten der Operation bedeutend geringer; diese Thiere können bei gehöriger Vorsicht längere Zeit, sogar Monate lang am Leben erhalten werden, da zufolge der Lage des Labyrinthes eine Verletzung des Kleinhirns sich vermeiden lässt, und obzwar die während und nach dem Drehen erscheinenden Augenbewegungen bei Tauben weniger ausgesprochen sind, können sie doch in jedem Falle constatiert und genügend gut beobachtet werden.

Da die Frage, *ob das Ausbleiben der Augenschwingungen nach Zerstörung des Labyrinthes eine bleibende Erscheinung ist, und ob sich vielleicht in dieser Richtung irgend eine Functionscompensation entwickeln kann*, von grosser Wichtigkeit ist, habe ich meinen Assistenten, Herrn Dr. Georg von Marikovszky, der sich durch einschlägige Experimente die gehörige Fertigkeit bereits erworben

hatte, mit der Ausführung der bezüglichen Experimente betraut. Zunächst stellte er sich nun die Aufgabe zu untersuchen, ob bei Fixierung des Kopfes und Körpers wie bei Kaninchen durch Drehung ein künstlicher Nystagmus (auch bei Tauben) hervorgebracht werden kann und ob nach beiderseitiger Exstirpation des Labyrinthes die eigenartigen Augenschwingungen andauernd oder nur auf kürzere Zeit in Erscheinung bleiben.

Die Versuche zeigten, dass bei einigen Taubenarten nach sehr schnellem Drehen, bei Krähen, ferner bei Elstern, die grosse und theilweise vorstehende Augen haben, auch bei langsamerem Drehen sowohl während als auch nach dem Drehen Augenbewegungen entstehen, welche den bei Kaninchen zu beobachtenden durchaus ähnlich sind; es können daher zu gleichartigen Versuchen auch diese Thiere verwendet werden.

Auch zur Exstirpation beider Labyrinthe eignet sich die Krähe ebenso wie die Taube, da bei ihr die halbkreisförmigen Kanäle leicht zugänglich sind.

Sowohl bei Tauben als auch bei Krähen blieben die nach Drehen zu beobachtenden bilateralen Augenschwingungen nach beiderseitiger Exstirpation des Labyrinthes aus; die Thiere konnten Monate lang am Leben erhalten werden, nur jene Eigenschaft ihrer Augenbewegungen, dass während und nach dem Drehen bilaterale Schwingungen zu beobachten sind, kehrte nimmer wieder, obzwar die nach solchen Exstirpationen gewöhnlich auftretenden sonstigen Gleichgewichtsstörungen ziemlich verschwanden, die Thiere wieder zu gehen, zu essen und zu trinken vermochten und nur das Flugvermögen bisher nicht zurückkehrte.

Es verschwinden daher die bilateralen compensatorischen, d. h. die associierten bilateralen Augenbewegungen auf die Dauer, falls das Labyrinth beiderseitig zerstört wurde.

II.

Die Einwirkung des Cocains auf die Nervenendigungen des Labyrinthes. Das Ausbleiben der associierten Augenbewegungen.

Angenommen, dass die Quelle der nach Drehen des Körpers und Kopfes gesetzmässig eintretenden Augenschwingungen in Wirklichkeit in den Nervenendigungen des häutigen Labyrinthes

zu suchen ist, so müsste die zeitweilige Aufhebung der Reizempfänglichkeit dieser Nervenendigungen auch das Zustandekommen jener Augenschwingungen zeitweilig aufheben.

Die Zuführung von anästhesierenden Mitteln auf die Nervenendigungen des häutigen Labyrinthes kann ohne Schwierigkeit bewerkstelligt werden. Falls man nämlich die Fossa mastoidea in der Weise auspräpariert, wie ich es bereits zu Beginn der achtziger Jahre erprobte, kann das Dach des Vestibulums leicht angebohrt und durch eine feine Glascanüle in die Perilymphe verschiedene chemische Lösungen eingebracht und mittelst eines an die Canüle angesetzten Kautschukschlauches diese Lösungen mit der Perilymphe durch abwechselndes Aussaugen und Einblasen vermischt werden. In gleicher Weise können chemische Lösungen auch in die halbkreisförmigen Kanäle der Taube eingebracht werden, wenn an jener Stelle, wo sich die horizontalen und hinteren verticalen halbkreisförmigen Kanäle kreuzen, eine Oeffnung gemacht wird, durch welche dann die Flüssigkeit in der oben erwähnten Weise eingespritzt wird.

Zu Beginn der achtziger Jahre verfügten wir noch nicht über ein Mittel, mit welchem die peripheren Endigungen der sensiblen Nerven local unempfindlich gemacht werden konnten. Deshalb führte ich damals Versuche in dieser Richtung nicht aus. Seitdem wurden wir aber mit dem Cocain bekannt gemacht; wir wissen, dass es, local angewendet, je nach der Concentration der angewandten wässerigen Lösung eine verschieden lang andauernde locale Empfindungslosigkeit erzeugt. Es war daher naheliegend, dieses Mittel an den Nervenendigungen des Labyrinthes zu erproben, um auch auf diese Weise Daten zu meiner Theorie über die Reflexverbindungen zwischen den Nervenendigungen des Labyrinthes und der associierten Augenbewegungen zu erhalten.

Ich untersuchte daher gemeinsam mit meinem Assistenten, Herrn Dr. G. von Marikovszky, die Wirkung des Cocains an dem Labyrinthe des Kaninchens, der Krähe und der Elster. Nachdem das Vorhandensein der Augenschwingungen bei den in der horizontalen Ebene gedrehten Thieren während und nach dem Drehen festgestellt war, legten wir beide Labyrinthe frei, führten zur Perilymphe 2—5proc. Lösung von Cocain zu und bemerkten

danach, dass bei Anwendung von 2proc. Lösung der Dauer der Cocainwirkung entsprechend während des Drehens ein schwacher Vor- und Nachnystagmus entstand, bei Anwendung von 5proc. Lösung aber die Augenschwingungen während der Drehens gänzlich wegblieben und nur nach beiläufig einer halben Stunde zurückkehrten, als neuerlich die Wirkung des Cocains vollständig verschwunden war.

Das Ergebniss dieser Versuche entsprach also vollständig den theoretischen Voraussetzungen, zum Beweise, dass die auf experimentellen Untersuchungen fussende Theorie unanfechtbar zu Recht besteht: *Die Anästhesierung der sensiblen peripherischen Endigungen des die Augenbewegungen associierenden Nervenmechanismus mittelst Cocain unterbricht auf die Dauer der Empfindungslosigkeit die Function des ganzen Reflexmechanismus vollständig.*

Dass die Function des diese Reflexbewegung associierenden Nervenreflexmechanismus durch Lähmung der motorischen Nervenendigungen (Endigungen der Augenmuskelnerven in den Augenmuskeln) gleichfalls zum Stillstand gebracht werden kann, bewiesen meine Schüler Ludwig Kovács und Ludwig Kertész* schon im Jahre 1881, indem sie bei ihren diesbezüglichen Versuchen fanden, dass bei Kaninchen die nach Drehen zu beobachtenden bilateralen nystagmischen Augenbewegungen im Laufe der Curarevergiftung, bei welcher die Nervenendigungen in den Muskeln gelähmt werden, gänzlich ausblieben.

III.

Bilaterale associierte Augenbewegungen bei Winterschläfern.

Wie ich bereits in den achtziger Jahren experimentell nachwies, besteht der die Augenbewegungen associierende nervöse Apparat aus einem nervösen Centrum, einem centrifugalen und einem centripetalen Theile. Den centripetalen Theil bilden die beiden Nn. acustici mit ihren Endigungen im Labyrinthe (die zwölf maculae cristae der sex Ampullen), den centrifugalen Theil die je drei beiderseitigen Augenmuskelnerven (oculomo-

* Ueber die Wirkung einiger chemischer Stoffe auf die associierten Augenbewegungen. Arch. f. exp. Pathologie 1882.

torius, trochlearis und abducens) mit den zwölf Augenmuskeln, das nervöse Centrum endlich erstreckt sich im Mittelhirne und in der Medulla oblongata in der Höhe der vorderen Vierhügel und der abducens-Kerne, an jener Stelle, wo die Ursprungsganglien der beiden Nn. acustici, abducentes, trochleares und oculomotorii ihre Lage haben. Ausser diesem subcortical gelegenen Centrum unterstehen die obenerwähnten Centren noch einzelnen Bezirken der Hirnrinde und des Kleinhirnes, was besonders daraus erhellt, dass wir im Stande sind, durch Reizung einiger Bezirke sowohl des Hirnes als auch des Kleinhirnes associierte Augenbewegungen hervorzurufen. Jedoch kennen wir den physiologischen Einfluss dieser letzterwähnten Gross- und Kleinhirnbezirke auf die uns hier beschäftigenden associierenden Augenbewegungen nur noch sehr ungenau.

Bereits meine anfangs der achtziger Jahre vorgenommenen Experimente hatten mich gelehrt, dass im Verlaufe von Vergiftungen, welche mit grösseren oder kleineren Störungen des Bewusstseins einhergehen (Chloroform, Aether, Chloralhydrat, Nicotin, Coniin, Morphin, Narcotin, Codein, Atropin), sowie beim Erstickungstode, wo der Giftstoff, resp. das Erstickungsblut ohne Zweifel auf die nervösen Centralorgane einwirkt, in Hinsicht auf das Auftreten der durch Drehen bewirkten Augenbewegungen, verschiedene Veränderungen, Reizungs- und Erschöpfungssymptome zu Stande kommen; einige von ihnen bewirken auch ohne Drehungen nystagmische Augenbewegungen, bei anderen wird der Drehungsnystagmus erst lebhafter, dann in den späteren Stadien der Erschöpfung seltener, andere endlich bewirken, dass dieselben noch zu Lebzeiten des Thieres vollständig ausbleiben. Die verschiedenen Veränderungen, welche die associierten Augenbewegungen unter der Einwirkung von verschiedenen Giftstoffen erleiden, bedeuten, dass die verschiedenen chemischen Gifte die unterschiedlichen Ganglienzellen der die Augenbewegungen associierenden Centren in verschiedener Weise, in verschiedenem Nacheinander in Erregung versetzen und erschöpfen. Die Gesetze dieser Reactionen sind noch unbekannt; meines Wissens sind zu ihrer Erforschung mit Ausnahme der obenerwähnten Versuche noch keine Untersuchungen angestellt worden.

Durch die Liebenswürdigkeit weil. Prof. LAUFENAUER's erhielt ich durch Zufall zwei Winterschläfer — Alpenmurmelthiere — zur Beobachtung. Diese Thiere lagen von Anfang Oktober bis Anfang April in ununterbrochenem tiefen Winterschlaf, dessen sämmtliche wohlbekannte Symptome sie zeigten. Es war nun für mich von Interesse zu untersuchen, wie bei diesen Thieren, bei denen zur Zeit des Winterschlafes die Functionen des Hirnes und des Nervensystems auf ein Minimum herabsinken, der Drehungsnystagmus in Erscheinung treten würde.

Bei den Drehungsversuchen, die ich nun an beiden Thieren vornahm, zeigte es sich, dass die associierten bilateralen Augenbewegungen zur Zeit des Winterschlafes bei jedweder beliebiger Richtung und Schnelligkeit der Körperdrehungen vollständig fehlten, die Augen lagen vollständig bewegungslos in ihren Höhlen sowohl während der Drehungen als auch hernach; erwachten sie aber Anfangs April aus ihrem Winterschlaf, so erschienen an beiden Augen die oscillatorischen Bewegungen ganz gesetzmässig, ja sie waren noch intensiver als bei wachen Kaninchen, eine Erscheinung, die in Zusammenhang stand mit der hochgradigen Hautsensibilität dieser Thiere, welche so gross war, dass sie bei leichtem Anblasen schon zusammenzuckten, das eine sogar hierauf stets mit dem durchdringend schrillen Ton antwortete, welchen es auf den Bergen auszustossen pflegt, wenn es nahende Schritte hört oder die Annäherung des Menschen wahrnimmt.

Es ruhen also im tiefen Schlafe die Functionen der die Augenbewegungen associierenden Centren und kehren erst nach dem Erwachen zurück.

IV.

Im Anschluss an die Resultate obiger Beobachtungen und Versuche bin ich so frei noch einige stereoscopische Photographien vorzulegen, welche der Practicant meines Institutes, Herr Dr. JOSEF v. MADZSAR, theils nach meinen älteren, theils nach jenen neueren Präparaten der halbkreisförmigen Canäle anfertigte, die von meinem Assistenten, Herrn Dr. GEORG VON MARIKOVSZKY, herstammen. Diese Aufnahmen zeigen die beiden Labyrinthe in ihrer natürlichen Lage sowohl zueinander als auch zu den übrigen

Theilen des Schädels; die Ergründung der physiologischen Bedeutsamkeit dieser Verhältnisse wird eine Aufgabe späterer Untersuchungen bilden.

Anschliessend sei es mir gestattet, die stereoscopischen Bilder eines hypnotisierten Individuums vorzulegen; diese demonstrieren jene bilateralen Augenbewegungen, welche in der Hypnose durch die Schwingungen der Tongabel hervorgerufen werden können. Ueber meine diesbezüglichen Experimente habe ich bereits im Jahre 1885 der geehrten Akademie in einer Sectionssitzung kurz berichtet und lege nun die Bilder nur aus dem Grunde vor, um neuerdings in Erinnerung zu bringen, was ich schon damals erwähnte und was auch die vorgelegten Aufnahmen bekräftigen, dass nämlich die Reflexverbindung zwischen den Endigungen der Hörnerven und den bilateralen Augenbewegungen auch beim Menschen experimentell nachgewiesen werden kann. Die stereoscopischen Bilder wurden von Herrn Dr. JOSEF MADZSAR nach damaligen Aufnahmen vergrössert angefertigt.

10.

BEITRAEGE ZUR TRYPSINVERDAUUNG.

Von Prof. FERDINAND KLUG,
ord. Mitglied der Akademie der Wissenschaften.

(Aus dem physiologischen Institute der Universität Budapest).

1. Darstellung künstlichen Pankreassaftes.

Während L. CORVISART[1] fand, dass die wässerigen Extracte des Pankreas, so wie der natürliche Pankreassaft, Blutfaserstoff, Kasein, Gelatin, Fleisch und coaguliertes Albumin löst, behaupteten KEFERSTEIN und HALLWACHS[2], dass das Pankreas keine Wirkung auf coaguliertes Albumin habe. Die letzteren Forscher gelangten zu diesem negativen Resultat dadurch, dass sie Drüsen verarbeiteten, aus welchen ein verdauendes Infusum auf so einfache Art nicht zu erhalten war. Sowohl CORVISART, wie auch MEISSNER, KÜHNE, HEIDENHAIN, HERZEN und Andere haben nämlich nachgewiesen, dass nicht eine jede Drüse und nicht ein jedes Extract verdaut, sondern nur eine solche Drüse, bezüglich nur das Infusum solcher Drüsen, welche von Thieren stammen, die während der Verdauung getödtet worden waren.

KÜHNE[3] konnte gut verdauendes Extract am besten aus der trockenen Drüse gewinnen, indem er 1 Theil Drüse in 15 Theilen Wasser digerierte. Die fein zerkleinerte Drüse wurde 3 Stunden lang in Wasser digeriert und die erhaltene trübe Lösung mit Essigsäure soweit angesäuert bis dieselbe, filtriert, mit Essigsäure keinen Niederschlag gab. Das mit Natronlauge neutralisierte goldgelbe Filtrat, wurde auf 45° C. erwärmt, wonach dasselbe mit Salpetersäure behandelt, oder sonst angesäuert und ge-

kocht, keine Trübung zeigte. Diese Flüssigkeit verdaute gekochten Faserstoff. Die Verdauung wurde gesteigert, wenn man etwas Soda oder Kochsalz zur Verdauungsflüssigkeit gab. Das Trypsin bildete aus dem coagulierten Eiweiss gelöstes Albumin, welches wieder fällbar war, oder durch Neutralisation niedergeschlagen werden konnte und sich auflöste, sobald die Lösung Salze oder Alkalien als Lösungsmittel enthielt. KÜHNE stellte aus den Verdauungsprodukten nicht nur das Fibrinpepton dar, sondern auch einige Spaltungsprodukte desselben, wie das Tyrosin und Leucin, wie KÜHNE auch den von TIEDEMANN und GMELIN[4] entdeckten Körper, welcher Chlorwasser rosenroth färbt, in den Verdauungsprodukten des Pankreas regelmässig vorfand.

Später behandelte KÜHNE[5] die zerkleinerte Drüse mit Alkohol und Aether, um dieselbe zu entfetten. Die so behandelte Drüse kann getrocknet als eine farblose, feinfaserige Masse aufbewahrt werden, aus welcher, bei Bedarf, ein guter Verdauungssaft dargestellt werden kann.

HEIDENHAIN[6], PODOLINSKY[7] und Andere fanden, dass die Pankreasdrüse nicht Trypsin, sondern dessen Zymogen enthält, von welchem, bei Vorhandensein von Oxygen, oder verdünnten Säuren, wie etwa 1 proc. Essigsäure, Trypsin sich abspaltet. Daher der Gebrauch von Salicyl- oder Essigsäure bei der Darstellung des Trypsins. Bei längerer Einwirkung vernichten jedoch die verdünnten Säuren das Trypsin. Eine schwach alkalische Reaction fanden die Forscher für vortheilhaft, daher man jetzt 0,25—0,5 proc. Soda dem künstlichen Pankreassaft beizufügen pflegt.

SALKOWSKI[8] stellte ein kräftig wirkendes, doch nicht reines Infusum aus der Pankreasdrüse dar, indem er die zerkleinerte Drüse in Wasser, welches 5—10 ccm Chloroform auf ein Liter Wasser enthielt, einige Tage hindurch digerierte. HAMMERSTEN[9] bereitete aus der Drüse mit Wasser von 0,01—0,05 proc. Ammoniakgehalt ein Extract, welches mit Essigsäure behandelt einen Niederschlag gab, der kräftig verdaute.

Die Aufgabe meiner Versuche war vor Allem dahin gerichtet, unter diesen Methoden der Darstellung künstlichen Pankreassaftes eventuell die beste heraus zu finden. Ich beobachtete den Fortschritt der Verdauung auch hier in der Weise wie die

Magenverdauung[10] mit Hülfe der spectrophotometrischen Methode durch Benutzung der Biuretreaction; wobei das Verhältniss des Exstinctionscoefficienten des Pankreassaftes zu dem der Verdauungsflüssigkeit als relatives Maass der Verdauung diente. Dieselbe dauerte Anfangs 3, später 24 Stunden. Wohl bilden sich während der Pankreasverdauung, insbesondere wenn dieselbe längere Zeit anhält, Verdauungsproducte, welche die Biuretreaction nicht geben, wie Leucin, Tyrosin, Asparaginsäure, zugleich bilden sich aber auch immer mehr jene Körper, welche KÜHNE[11] als Antipeptone bezeichnet und mit denen die Biuretreaction gelingt. Es kann daher aus der Intensität der Biuretreaction, wenigstens in den ersten 24 Stunden der Verdauung, mit Recht auf den Verlauf der Verdauung selbst geschlossen werden. Die photometrische Methode findet PFEIFER[12] wohl umständlich, die langen Zahlen überflüssig, doch dem gegenüber steht die Thatsache, dass wir auch heute über keine Methode verfügen, welche in gleich kurzer Zeit gleich genaue Resultate liefert. Unzweifelhaft giebt die genauesten Resultate die Nitrogenbestimmung nach KJELDAHL, doch dies Verfahren ist bedeutend langwieriger und zeitraubender, ja wo, wie bei der Bestimmung von Pepton, die Albumose mit Ammonsulfat ausgeschieden wird, auch sehr umständlich. Wer eben mit Logarithmen arbeitet, der muss sich die langen Zahlen gefallen lassen.

Zu den Versuchen benutzte ich am meisten Rinderpankreas und nur ausnahmsweise das Pankreas vom Menschen und Hunden. Verdaut wurde rohes Fibrin und gekochtes Ovalbumin. Die Drüse wurde vor Allem gereinigt und gewaschen, dann fein zermahlen, mit Alkoholäther entfettet und mit Wasser digeriert. Das abfiltrierte Extract benützte ich als Verdauungsflüssigkeit. Zur Vermeidung der Fäulniss diente Thymol oder Chloroform, oft auch beide zugleich.

Meine Erfahrungen, welche ich bezüglich der Pepsinverdauung machte, bezeugen in entschiedener Weise, dass die Menge des Enzyms über eine gewisse Grenze hinaus nicht von wesentlichem Einfluss auf die Verdauung ist, indem mit der Zunahme des Euryms die Verdauung nur bis zu einer gewissen Grenze steigt, über welche hinaus, bei einem Mehr von Enzym, die Verdauung

eher abnimmt. Ich bereitete daher aus verschiedenen Pankreasmengen mit derselben Wassermenge Extracte und untersuchte die Verdauungsfähigkeit derselben. Mit Rücksicht darauf, dass die Verdauungsproducte der Magenverdauung die letztere behindern, machte ich die Verdauungsversuche sowohl mit undialysiertem als auch mit dialysiertem Pankreasinfusum; in letzterem fehlen die Producte der Selbstverdauung. Sowohl die Pankreasdrüse selbst, als das Eiweiss in dem Extract derselben, wurden gewöhnlich 24 Stunden lang, bei 40° C., verdaut. Schliesslich setzte ich auch in gekochtem Pankreasextract Eiweiss einer Temperatur von 40° C. aus. In je 50 ccm künstlichem Pankreassaft wurden 5 gr gekochtes Eiereiweiss, bezüglich 2 gr trockener Faserstoff gegeben.

Die Resultate der Versuche erhellen aus der folgenden Tabelle, dieselben wurden gewonnen, indem ich vorerst den Exstinctionscoefficienten des abfiltrierten Drüsenextractes bestimmte. Dann kam in denselben das betreffende Eiweiss. Nach Abschluss der Verdauung filtrierte ich die Flüssigkeit vom Rückstand ab und bestimmte deren Exstinctionscoefficienten. Der Unterschied dieser beiden Coefficienten dient als relatives Maass der Verdauung und ist in der Tabelle verzeichnet. Schliesslich, um die gebildeten Albumosen und Peptone von dem vorhandenen gelösten Eiweiss zu trennen, wurde die Verdauungsflüssigkeit aufgekocht, filtriert und der Exstinctionscoefficient bestimmt; indem ich von diesem Coefficienten den der gekochten Verdauungsflüssigkeit abzog, erhielt ich den gemeinsamen Exstinctionscoefficienten der Albumosen und Peptone; dieser ist in der dritten Kolumne verzeichnet.

Die erste Zeile der I. Tabelle zeigt, dass vom Pankreas selbst um so mehr verdaut wurde, je mehr Trockenpankreas zur Zubereitung der Verdauungsflüssigkeit benutzt worden war. Ein Vergleich der entsprechenden Exstinctionscoefficienten der nicht dialysierten und dialysierten Flüssigkeiten beweist auch, dass die Verdauung nicht nur im Ganzen, sondern auch relativ, um so lebhafter vor sich ging, je mehr Pankreas der Verdauung ausgesetzt wurde. So beträgt der Exstinctionscoefficient der aus 30 gr Pankreas bereiteten Flüssigkeit nach der Dialyse, bloss etwa $^1/_3$ des Exstinctionscoefficienten, vor der Dialyse (3,29368 und 1,05568), während bei 15 gr Pankreas derselbe die Hälfte (1,40796 bis

0,73224), schliesslich bei 10 gr noch etwas mehr (0,83104 und 0,39760) beträgt. Es wurden also auch relativ um so mehr dialysierbare Verdauungsproducte gebildet, je mehr Pankreas der Verdauung ausgesetzt worden war.

I. Tabelle.

Zubereitung der Verdauungsflüssigkeiten.	1. 5 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.	2. 10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.	3. 10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, Oxygengas, 1 gr Thymol.	4. 15 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.	5. 20 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.	6. 30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.
Exstinctionscoefficient der Flüssigkeit	0,56644	0,83104	0,87412	1,40796	1,91460	3,29368
Eiereiweiss, gesammtes verdautes Eiweiss	0,56644	0,46648	0,35444	0,85828	0,96316	0,14784
Albumose und Pepton . . .	0,39556	0,40368	0,34220	0,92780	0,74692	0,01448
Faserstoff, gesammtes verdautes Eiweiss	1,39025	2,52072	2,28412	2,57020	3,01596	2,46132
Albumose und Pepton . . .	1,13444	2,50268	2,10754	2,35316	2,67020	2,07980
Exstinctionscoefficient der dialysierten Flüssigkeit .	0,38832	0,39760	0,55776	0,73224	0,70812	1,05568
Eiereiweiss, gesammtes verdautes Eiweiss	0,52832	0,74872	0,56872	0,86448	0,80580	0,65296
Albumose und Pepton . . .	0,41138	0,65968	0,50656	0,77184	0,76636	0,55824
Faserstoff, gesammtes verdautes Eiweiss	1,12895	3,17584	2,89904	3,02424	2,82916	2,86088
Albumose und Pepton . . .	1,97414	3,00050	2,80186	2,94576	2,02364	2,39552
Verdauungsflüssigkeit gekocht; **Eiereiweiss**, davon gelöst gesammtes Eiweiss	0,00960	0,04000	0,06204	0,05652	0,54828	0,68528
Albumose und Pepton . . .	0,00960	0,03544	0,06204	0,05652	0,54820	0,65552
Faserstoff, davon gelöst gesammtes Eiweiss	0,06146	0,0728	0,09316	0,38084	0,58820	0,69280
Albumose und Pepton . . .	0,06046	0,0627	0,06204	0,35628	0,52876	0,68512

In der gekochten Verdauungsflüssigkeit löste sich im Thermostat, binnen 24 Stunden, sehr wenig Eiweiss, im Vergleich zu der Menge, welche rohe Verdauungsflüssigkeit löst; dass also die rohe Verdauungsflüssigkeit verdaut, kann nicht bezweifelt werden. Zur Zubereitung der Verdauungsflüssigkeit benutzte ich 5—30 gr Trockenpankreas, und man sieht, dass der aus 5 gr bereitete Ver-

dauungssaft am schlechtesten verdaut, während der aus 10—30 gr bereitete gut verdaute. Doch nahm hier die Verdauungsfähigkeit nicht entsprechend der angewandten Pankreasmenge zu; ja Verdauungsflüssigkeit, die mit 30 gr Pankreas gewonnen worden war, verdaute entschieden schlechter als solche, die aus 10—20 gr bereitet wurde. Die dialysierte und hierdurch von einigen Verdauungsproducten befreite Flüssigkeit, verdaut entschieden besser, löst mehr vom Eiweiss, als die nicht dialysierte, obgleich der Unterschied hier bei weitem nicht so gross ist, als beim künstlichen Magensaft. Schliesslich sieht man auch, dass Pankreassaft das Fibrin viel besser verdaut als gekochtes Eiereiweiss; was übrigens nach den Erfahrungen anderer Forscher eine schon lang bekannte Thatsache ist.

Die Versuche der 2. und 3. Kolumne weichen voneinander darin ab, dass in dem Versuch 3. die Verdauungsflüssigkeit unter Oxygengas bereitet wurde, von welchem HEIDENHAIN nachwies, dass dasselbe die Bildung von Trypsin aus Zymogen beschleunigt. Der Unterschied der Daten der beiden Kolumnen ist unbedeutend, und dies zeigt, dass, wenn die Verdauung längere Zeit andauert, in diesem Falle 24 Stunden lang, das Pankreasinfusum dann auch genug Trypsin enthielt, ohne besondere Zugabe von Oxygen. In einem solchen Falle trifft man auch keine Drüse an, in deren Extract Trypsin nicht enthalten wäre.

Die folgende II. Tabelle (S. 171) rechtfertigt noch mehr die letzte Behauptung, indem zum Pankreas 1‰ Salicylsäure, dann 0,4% Soda gegeben wurden, welches Verfahren nach KÜHNE eben die Umwandlung des Zymogens in Trypsin bezwecken soll, und doch verdaute die auf diese Weise erhaltene Verdauungsflüssigkeit nicht besser.

Hier erweist sich als am besten verdauend die aus 5 gr Trockenpankreas erzeugte Flüssigkeit; bedeutend geringer ist die Verdauung der aus 1 gr und selbst der aus 10 gr Trockenpankreas gewonnenen Verdauungsflüssigkeit. Sowohl die Daten dieser Tabelle, wie auch die der ersten zeigen, dass man aus Trockenpankreas die beste eiweissverdauende Flüssigkeit dann erhält, wenn man 3—5 gr Trockenpankreas auf 100 ccm Wasser giebt. Es erhellt aber aus dieser Tabelle auch, dass die Salicylsäure,

bereits in kleiner Menge (1‰), die Verdauungsfähigkeit schwächt (siehe Tabelle II, Zeile 4), wie auch, dass die Zugabe von 0,4% Soda die Verdauung wesentlich fördert. Aus dem Vergleich der Daten der I. und II. Tabelle lässt sich ersehen, dass das einfache Infusum des Trockenpankreas nicht wesentlich schlechter verdaut, als die aus demselben mit 1‰ Salicylsäure dargestellte und durch 0,4% Soda alkalisierte Flüssigkeit.

II. Tabelle.

Zubereitung der Verdauungsflüssigkeiten	1 gr Pankreas, 200 ccm Wasser, 1‰ Salicylsäure, 1 gr Thymol.	5 gr Pankreas, 200 ccm Wasser, 1‰ Salicylsäure, 1 gr Thymol.	10 gr Pankreas, 200 ccm Wasser, 1‰ Salicylsäure, 1 gr Thymol.
Exstinctionscoefficient der Flüssigkeit. . . .	0,06331	2,33479	2,74621
50 ccm der Flüssigkeit, 0,4% Soda, 10 gr gekochtes **Eiereiweiss**, nach 24 stündiger Verdauung neutralisiert, gekocht, filtriert	0,39462	1,27864	0,06012
50 ccm Flüssigkeit, 0,4% Soda, 5 gr trockenes Fibrin, neutralisiert, gekocht, filtriert . .	0.38209	3,03768	2,74936
50 ccm Flüssigkeit, 0,0 Soda, 5 gr Fibrin, neutralisiert, gekocht, filtriert	0,09885	0,09919	0,23323

In der auf nächster Seite folgenden (III.) Tabelle sind Versuche angegeben, aus welchen der Einfluss des Chloroforms und Thymols, als fäulnisshemmender Körper, auf die Verdauung ersichtlich ist.

Ein Vergleich der Ergebnisse dieser Tabelle zeigt, dass die Behandlung mit Thymol im Allgemeinen eine bessere Verdauungsflüssigkeit giebt, wie das Chloroformwasser; besonders fällt dies auf bei einem Vergleich der mittelst Faserstoff erhaltenen Daten, bei welchen den mit Chloroformwasser erhaltenen folgenden Exstinctionscoefficienten 1,595, 1,391, 1,266 und 2,507 folgende mit Thymol erhaltenen entsprechend gegenüberstehen: 2,502, 2,079, 3,000 und 2,595.

III. Tabelle.

Zubereitung der Verdauungsflüssigkeiten.	1. 10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 3 ccm Chloroform.	2. 30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 3 ccm Chloroform.	3. 10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.	4. 30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1 gr Thymol.
Exstinctionscoefficient der undialysierten Flüssigkeit	0,86620	3,58080	0,83104	3,29368
Eiereiweiss. Verdautes gesammt Eiweiss	0,69105	0,44384	0,46648	0,14784
Albumose und Pepton	0,55684	0,44384	0,40368	0,01448
Faserstoff. Verdautes gesammt Eiweiss	1,60580	1,84876	2,50268	2,46132
Albumose und Pepton	1,59508	1,39168	2,50268	2,07980
Exstinctionscoefficient der dialysierten Flüssigkeit	0,45632	1,44520	0,39760	1,05568
Eiereiweiss. Verdautes gesammt Eiweiss	0,44800	0,66120	0,74872	0,65296
Albumose und Pepton	0,33708	0,67416	0,65968	0,55824
Faserstoff. Verdautes gesammt Eiweiss	1,27818	2,65376	3,17584	2,86088
Albumose und Pepton	1,26608	2,50704	3,00050	2,59552

Allen bisherigen Versuchen zufolge ersieht man auch, dass die Dialyse der Flüssigkeit nicht von jenem günstigen Einfluss auf die Verdauung ist, wie bei der Magenverdauung. Aehnlich, ja noch auffallender ist der Unterschied, betreffs des Einflusses der Salze auf die Verdauungsfähigkeit der beiden künstlichen Verdauungssäfte. Während nämlich das Vorhandensein von 0,5% Kochsalz die Magenverdauung bedeutend schwächt, ist dasselbe auf die Pankreasverdauung nicht nur von keinem Nachtheil, sondern direct von Vortheil; selbst 1 proc. Salzgehalt wirkt fördernd auf dieselbe. Alles dies beweist die (IV.) Tabelle auf S. 173.

Ein Vergleich der Ergebnisse dieser Versuche beweist zur Genüge, dass das Vorhandensein der Salze die Verdauung direct fördert, wie dies PODOLINSKI[7] nachgewiesen hat; die Resultate sind nicht nur nicht schlechter als die entsprechenden Daten der I. Tabelle, sondern entschieden besser. Wir finden die Verdauung hier besser mit der nicht dialysierten Verdauungsflüssigkeit als mit der dialysierten, zwischen welchen der wesentliche Unterschied eben darin besteht, dass die dialysierte Verdauungsflüssigkeit an

Salzen ärmer als die nicht dialysierte ist; in Fällen, wo man bei der Darstellung der Verdauungsflüssigkeit kein Salz hinzugiebt (siehe Tabelle I.), verdaute im Gegentheil die dialysierte Verdauungsflüssigkeit besser als die nicht dialysierte. Es folgt aber aus diesen Versuchen eben nicht, dass die alkalische Pankreasflüssigkeit am besten verdaut; denn die sodaenthaltende Flüssigkeit verdaut nicht besser als jene, welche Kochsalz oder Fluornatrium enthält, ja von der letzteren kann entschieden behauptet werden, dass diese am besten verdaute.

IV. Tabelle.

Zubereitung der Verdauungsflüssigkeiten.	10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 0,3% Soda, 1 gr Thymol.	30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 0,3% Soda, 1 gr Thymol.	10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Fluornatrium, 1 gr Thymol.	30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Fluornatrium, 1 gr Thymol.	10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Chlornatrium, 1 gr Thymol.	30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Chlornatrium, 1 gr Thymol.	10 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Jodkalium, 1 gr Thymol.	30 gr Pankreas, 300 ccm Wasser, 1% Jodkalium, 1 gr Thymol.
Extinctionscoefficient der undialysierten Flüssigkeit	0,67532	1,63160	0,87412	3,00544	1,03788	2,48280	0,92316	2,00160
Eiweiss. Verdautes gesammt Eiweiss . .	0,33444	0,45160	0,34828	1,78952	0,46180	0,74792	0,85732	0,39616
Albumose und Pepton .	0,32900	0,39712	0,48548	0,80656	0,42660	0,68768	0,80918	0,39616
Faserstoff. Verdautes gesammt Eiweiss . .	1,38956	3,47384	2,34828	4,45880	2,29940	3,39960	2,20796	3,02776
Albumose und Pepton .	1,24430	3,44824	2,27876	3,94320	2,27103	3,43216	2,16180	2,88072
Extinctionscoefficient der dialysierten Flüssigkeit	0,48828	0,89832	0,53228	0,50216	0,36380	1,03244	0,48356	0,66184
Eiweiss. Verdautes gesammt Eiweiss . .	0,33024	0,65168	0,13180	1,43776	0,95300	0,74804	0,96700	0,98516
Albumose und Pepton .	0,30616	0,60840	0,26276	1,43776	0,93472	0,69196	0,87900	0,72064
Faserstoff. Verdautes gesammt Eiweiss . .	1,11552	1,69480	1,57884	3,01616	2,32100	2,16196	2,62844	2,87042
Albumose und Pepton .	0,82792	1,42720	1,37260	3,01616	1,99244	1,90844	2,23636	2,51864

Nach PODOLINSKI sollen hier eben die Natronsalze von besonderem Vortheil sein; nach meiner Erfahrung fördert aber Jodkalium eben so gut die Verdauung wie Chlornatrium, ein Unterschied ist hier nicht zu bemerken. Soda scheint nur dann von Vortheil für die Trypsinverdauung zu sein, wenn wir dieselbe nicht bei der Erzeugung der Verdauungsflüssigkeit selbst benützen, sondern mit dem zu verdauenden Eiweiss zugleich dem Pankreasinfusum beigeben. Dies deutet die folgende (V.) Tabelle an.

V. Tabelle.

Darstellungsweise der Verdauungsflüssigkeiten.	3 gr Pankreas, 100 ccm Wasser, 1‰ Salicylsäure, 0,5 gr Thymol.		3 gr Pankreas, 100 ccm Wasser, 0,5 gr Thymol.	
	gelöstes Eiweiss.	Pepton.	gelöstes Eiweiss.	Pepton.
Exstinctionscoefficient der Verdauungsflüssigkeit	0,58404		0,98749	
Verdauungsflüssigkeit + 0,4 Proc. Soda + Faserstoff	4,2534	1,98382	5,83374	2,27518
Verdauungsflüssigkeit, kein Soda, Faserstoff	1,65018	1,41618	2,08403	1,85164

Bei diesen Versuchen förderten 0,4 proc. Soda bedeutend die Verdauung und zwar in erhöhterem Maasse in der ohne Salicylsäure bereiteten Verdauungsflüssigkeit. Wenn, wie zu geschehen pflegt, aus dem Fortschritt der Verdauung auf den Trypsingehalt der Flüssigkeit geschlossen werden kann, dann folgt, dass dieselbe mehr Trypsin enthielt, wenn sie mit Wasser, ohne Zugabe von Salicylsäure, dargestellt wurde.

Ausser Rinderpankreas benutzte ich zur Erzeugung künstlichen Pankreassaftes das Pankreas vom Hunde, Schweine und Menschen, und untersuchte deren Fähigkeit Eiweiss zu verdauen, fand aber keinen wesentlichen Unterschied, also auch nicht, dass Hundepankreas besser verdaut als Rinderpankreas, wie dies meinen, die Magenverdauung betreffenden Beobachtungen entsprechen würde, und wie auch von FLORESCO angegeben worden war. Dabei fiel mir aber auf, dass aus dem Pankreas an mit hohem Fieber verlaufenden Krankheiten Verstorbener, wie Pneumonikern, kein Infusum gewonnen werden konnte welches Eiweiss verdaut. Da ich auch kein Pepsin aus dem Magen solcher Leichen gewinnen konnte, so folgt, dass mit dem Fieber eine Stagnation in der Erzeugung von Pepsin und Trypsin einhergeht.

2. Gewinnung des Trypsins.

Um das Trypsin aus der Pankreasdrüse zu gewinnen, gab DANILEWSKY[13] das dem 6—7 Stunden nach der Fütterung getödteten Thiere entnommene Pankreas auf eine halbe Stunde in

Wasser, um dasselbe vom Blute zu reinigen, während dessen wurde das Wasser oft erneuert und die Drüse ausgewaschen. Dann kam die zerkleinerte Drüse mit reinem Sand in einen Mörser und wurde fein zerrieben. Nun kam die ganze Masse in einen Kochbecher mit etwas Wasser, woselbst dieselbe 1—2 Stunden lang, bei einer Temperatur von 20—30° C., der Digestion ausgesetzt und schliesslich abfiltriert wurde. Das milchweisse oder gelb gefärbte Filtrat, reagierte neutral, sauer, oft auch schwach alkalisch. Die entstandenen freien Fettsäuren wurden durch gebrannte Magnesia entfernt, nach welchem das stark alkalische, gelbgefärbte Filtrat sich als eine starke und Blutfaserstoff gut verdauende Flüssigkeit erwies. DANILEWSKY gab zu dieser Flüssigkeit $^1/_4$ Theil Collodiumlösung, schüttelte das Gemisch gut durch, und mischte dasselbe in weit offenem Glase mit einem Glasstab so lange durch, bis der grösste Theil des Aethers flüchtig geworden war. Der Niederschlag wurde mit Alkohol von 60—70 proc. wiederholt gewaschen und zwischen Fliesspapier getrocknet. In einer Mischung von Alkoholäther gelöst, blieb ein gelber Rückstand zurück, welcher mit Aether gewaschen schliesslich das Enzym und Eiweiss enthält. Von diesen ist das Enzym in Wasser löslich, während das Eiweiss zufolge des Alkohols und Aethers vollkommen coagulierte. Dies Enzym soll die Xanthoproteinreaction nicht geben und wird durch Essigsäure gefällt. Mangel von Alkali verzögert, Ueberfluss an Alkali vernichtet die Faserstoff lösende Wirkung des Enzyms; diese Lösung erfolgt nach DANILEWSKY bloss in alkalischer oder neutraler Lösung. Nach MEISSNER löst Pankreasinfusum Eiweiss nur bei saurer Reaction, während nach DANILEWSKY in saurer Reaction keine Verdauung erfolgt. Den Einfluss der Temperatur betreffend fand DANILEWSKY, dass die Verdauung bei 37—40° C. am besten vor sich geht; 50, 25° verzögern dieselbe, und bei 60° und darüber hört die Verdauung auf.

WITTICH[14] bereitete aus getrocknetem und pulverisiertem Pankreas ein Glycerinextract und fällte aus demselben das Enzym durch Alkohol. Auf diese Weise konnte sowohl Trypsin wie auch das diastatische Enzym gewonnen werden. Doch löste Glycerin viele andere Stoffe, darunter auch Eiweiss reichlich. HÜFNER[15] stellte daher aus dem Glycerinextract einen Alkoholniederschlag

dar, trocknete denselben, löste ihn in Glycerin und fällte wieder mit Alkohol, um den Glycerinextract vom Eiweiss zu befreien. Das ursprüngliche Extract war stark gelb, ja braun gefärbt, während das letztere kaum Farbe hatte. HÜFNER fand, dass die Reactionen des von ihm erhaltenen Extractes den Reactionen des Eiweisses gleichen, dasselbe verliert bei 70° C. seine Verdauungsfähigkeit. Sowohl nach dem Verfahren von WITTICH, wie noch mehr nach jenem von DANILEWSKY, geht viel Enzym verloren.

HEIDENHAIN[6] übergoss die mit feinem Glasstaub zerriebene Drüse mit 1 proc. Essigsäure enthaltendem Wasser, indem er 1 ccm Wasser auf 1 gr Drüse gab und zu dem auf 1 Theil Drüse 10 Gewichtstheile Glycerin goss. Das ganze blieb 3 Tage stehen, wurde dann abfiltriert und mit Alkohol behandelt, wodurch ein in Wasser löslicher Niederschlag gewonnenen werden konnte, der eine stark verdauende Lösung gab.

KÜHNE erhielt aus dem Pancreas siccum das Trypsin, indem er zu 1 Theil Pankreas 5 Theile 0,1% Salicyllösung gab, dies wenigstens 4 Stunden lang bei 40° C. digerierte und durch Gaze durchpresste. Der Rest wurde 12 Stunden hindurch, in 5 Theilen einer 0,25 proc. kohlensaures Natron enthaltenden Lösung weiter digeriert, abgepresst, die saure und alkalische Flüssigkeit zusammengegossen und das Ganze mit 0,5 proc. Thymol und 0,25—0,5 proc. Soda versehen. Dies Gemisch wurde noch weitere 6 Tage digeriert, um die Albumosen zu Peptonen und weiter zu zersetzen.

Aus frischer Pankreas isolierte KÜHNE das Trypsin auf folgende Weise: In ein Gemisch von 600 ccm Wasser, 6 gr Thymol, 2—3 gr Salicylsäure, 20 ccm Alkohohl und 5 ccm Aether kamen 600 gr fein zermahlene Drüse. Dies blieb 3—4 Tage, bei 40° C. der Digestion ausgesetzt, dann wurde die Flüssigkeit abgepresst, zu derselben 0,5 proc. Soda gegeben und noch weitere 6 Tage lang der Selbstverdauung überlassen. Abgekühlt wurde die Flüssigkeit filtriert, derselben bis zur eben merklichen sauren Reaction Essigsäure beigegeben und mit Ammonsulfat gesättigt. Die hierauf erfolgte Trübung verursachte das in concentrierter Ammonsulfatlösung unlösliche Trypsin. Dies wurde im Filter gesammelt, mittelst gesättigter Ammonsulfat-

lösung solange gewaschen, bis das Filtrat die Biuretreaction nicht mehr gab. Die so gesammelte Substanz — KÜHNE's Trypsin — gab in einer 0,25 proc. Sodalösung eine vorzüglich verdauende Flüssigkeit. Um dies, insbesondere mit Ammonsulfat verunreinigte Trypsin zu reinigen, empfiehlt KÜHNE dassselbe in Wasser zu lösen und mit Alkohol auszufällen; der Niederschlag wird dann noch mit einer Mischung von Alkohol und Aether gewaschen, wodurch das Trypsin von in Alkoholäther löslichen Stoffen gereinigt wird. Zur Befreiung des Trypsins vom Ammonsulfat empfiehlt KÜHNE das kohlensaure Barium und die Dialyse zu benutzen, wobei jedoch das Bariumsulfat viel Trypsin mit sich reisst. Nach der Behandlung mit Alkohol, kann das Trypsin schliesslich als ein amorpher Körper gewonnen werden. Während dieser Reinigung wird ein Theil des Trypsins unlösslich, der dann nur in verdünnter Sodalösung gelöst werden kann. 1 proc. Essigsäure fällt das Trypsin; dieses, durch Säuren gefällte Trypsin, verliert nur bald seine verdauende Wirkung, coaguliert beim Kochen theilweise, theilweise aber bleibt dasselbe als Albumose in der Lösung. Dieser Umstand und die Erfahrung, dass das nach KÜHNE dargestellte Trypsin alle Farbenreactionen des Eiweisses giebt, erwecken den Verdacht, dass dasselbe entweder selbst ein eiweissartiger Körper oder eine Mischung von Trypsin und Eiweiss ist.

Bezüglich dieses Verfahrens wollte ich vor Allem erfahren, ob zur Gewinnung des Trypsins die Digestion der Drüse mit Salicylsäure nothwendig sei. Demzufolge gab ich zu 10, bezüglich 30 gr Trockenpankreas 150 ccm 0,1 proc. Salicylsäure enthaltendes Wasser und digerierte dasselbe 12 Stunden lang, abfiltriert wurde der Rest abermals in 150 ccm 0,25 proc. Soda enthaltendem Wasser weitere 12 Stunden der Verdauung ausgesetzt — natürlich mit entsprechender Beigabe von Thymol —, und dann filtriert. Beide Filtrate zusammengegossen gaben die gewünschte Verdauungsflüssigkeit. Die Ergebnisse der Verdauungsversuche enthält folgende (VI.) Tabelle.

VI. Tabelle.

Zubereitung der Verdauungsflüssigkeiten	10 gr Pankreas siccum nach Kühne	30 gr Pankreas siccum nach Kühne
Exstinctionscoefficient der undialysierten Flüssigkeit	2,52640	7,25840
Eiereiweiss. Verdaute gesammt Eiweiss	0,12560	0,09760
Albumose + Pepton	0,04432	0,09760
Faserstoff. Verdaute gesammt Eiweiss	1,78720	4,17152
Albumose + Pepton	1,55376	4,09768
Exstinctionscoefficient der dialysierten Flüssigkeit	1,20612	3,70912
Eiereiweiss. Verdaute gesammt Eiweiss	0,72516	0,45744
Albumose + Pepton	0,72516	0,41680
Faserstoff. Verdaute gesammt Eiweiss	2,98804	3,20432
Albumose + Pepton	2,85540	3,06392

Aus dem Vergleich der Daten dieser Tabelle mit jenen der IV. ersieht man, dass die aus 30 gr Pankreas gewonnene Verdauungsflüssigkeit, ähnlich der mit Fluornatrium erzeugten Flüssigkeit, den Faserstoff verdaut, während das Ovalbumin, durch die nach KÜHNE bereitete Flüssigkeit, schlechter verdaut wird als durch jene Flüssigkeiten, denen Salze beigegeben worden waren.

Allen diesen Erfahrungen zufolge versuchte ich das Trypsin ohne Zugabe von Säure oder Salze zu gewinnen, indem ich zugleich die Verdauung auf längere Zeit ausdehnte. Die soeben von der Schlachtbank erhaltenen Pankrease wurden von Fett, Bindegewebe und Blutgefässen möglichst gereinigt, vom Blute durch reichliches Waschen befreit, fein zermahlen und mit der gleichen Menge Wasser der Verdauung ausgesetzt. Wenn ich Pancreas siccum benutzte, so gab ich diesem 10 mal so viel Wasser zu. Zum Hintanhalten der Fäulniss schloss ich der Masse auf je 1 Liter Wasser 5 gr Thymol und 10 ccm Chloroform bei. Das Ganze digerierte ich 7 Tage lang unter häufigem Umrühren.* Dann wurde das Ganze durch Leinwand gepresst und mit Chloro-

* Das Pankreas 7 Tage lang der Verdauung auszusetzen, ist eben nicht nöthig, denn nach 2 tägiger Verdauung kann aus dem Rest der Drüse kein Trypsin mehr gewonnen werden.

form genügend versehen weitere 3 Wochen lang im Thermostat gehalten. Ich dehnte die Verdauung 4 ja oft 5 Wochen lang aus, weil Versuche bewiesen, dass aus Trypsin, welches nach 2—3 Wochen anhaltender Verdauung dargestellt worden war, bei weiterer Selbstverdauung desselben, Pepton gewonnen werden konnte, während nach 4—5 wöchentlicher Verdauung dies nicht mehr der Fall war.

Nach Verlauf der 4—5 Wochen, liess ich die Flüssigkeit 2 Tage lang an kühlem Orte stehen und filtrierte ab. Das Filtrat sättigte ich — wie KÜHNE — mit Ammonsulfat bei 40° C. Stellte dann die Flüssigkeit, bis sie ausgekühlt war, an einen kühlen Ort und filtrierte sie durch gehärteten Filter, auf welchem das gefällte Trypsin zurückblieb. Hier wurde das Trypsin zuerst mit gesättigter Ammonsulfatlösung, dann mit mittels ammoniakalkalisiertem 96 proc. Alkohol zu wiederholtem male gewaschen. Das so gereinigte Trypsin konnte getrocknet als ein fein weissgraues Pulver aufbewahrt werden, das seine Verdauungsfähigkeit lange Zeit beibehält; binnen 3 Jahren wenigstens büsste dasselbe von seiner Verdauungsfähigkeit nichts ein.

Durch Dialyse kann das Trypsin von Ammonsulfat nicht ganz gereinigt werden, doch beeinträchtigt das letztere seine Verdauungsfähigkeit nicht. Aus der dialysierten Trypsinlösung fällt das Trypsin beim Kochen, bei der Zugabe von Salpetersäure, Salzsäure, Schwefelsäure oder Pikrinsäure aus; die durch Säuren erzeugte Trübung verschwindet beim Kochen und zwar nach der Behandlung von Salpetersäure mit gelber (Xomthoprotein-Reaction), nach der Behandlung mit Salzsäure mit violetter Farbe (Liebermann'sche Reaction). Trübung erzeugen in der Trypsinlösung Bleiessig, Essigsäure und Ferrocyankalium, Trichloressigsäure, Salicylsulfosäure; diese Trübung verschwindet beim Kochen. Auch Alkohol fällt das Trypsin. Das Trypsin giebt alle Farbenreactionen des Eiweisses mit Ausnahme der Biuretreaction. Dasselbe weicht auch in anderer Beziehung sowohl vom Eiweiss wie von Albumose ab, kann also nicht als Eiweiss bezeichnet werden.

3. Die Trypsinverdauung unter verschiedenen Einflüssen.

1. Inwieweit die Menge des Trypsins die Eiweissverdauung beeinflusst wurde, meines Wissens, noch nicht untersucht. Ich machte daher mit gekochtem Ovalbumin und Blutfaserstoff auch diesbezüglich Versuche. Die Verdauung dauerte 4 und 20 Stunden und zwar sowohl mit dialysierter wie auch mit undialysierter Trypsinlösung. Die Fäulniss hemmte ich mittels Thymol. Die Versuche wurden insoweit noch ausgedehnt, als ich aus den Verdauungsproducten des Blutfibrins das gelöste Globulin durch Kochen entfernte und dessen Menge feststellte, wie ich auch die Menge der durch Ammonsulfat fällbaren Albumose und der von KÜHNE als Hemi- und Antipeptone bezeichneten Verdauungsproducte bestimmte.

Die Resultate dieser Versuche zeigt die folgende (VII.) Tabelle.

VII. Tabelle.

Nicht dialysiertes Trypsin in Proc.	4 Stunden anhaltende Verdauung					20 Stunden anhaltende Verdauung				
	Faserstoff			Eiereiweiss		Faserstoff			Eiereiweiss	
	Globulin	Albumose	Pepton	Albumose	Pepton	Globulin	Albumose	Pepton	Albumose	Pepton
0,0	—	0,20495	0	0,19416	0	0,06655	0,35552	0,03015	0,24708	0
0,005	0,01924	0,25109	in Spuren	0,26059	0	0,08897	0,37283	0,79554	0,26352	0
0,01	—	—	—	—	—	0,06182	0,41234	0,87114	0,31333	0
0,05	0,22334	0,26785	0,26934	0,29500	in Spuren	0,12949	0,52532	1,82270	1,17751	0,43718
0,1	0,36326	0,27728	0,37950	0,43014	„	0,20827	0,58091	1,81301	0,29183	0,41625
0,5	0,26153	—	—	0,43507	„	0,74885	0,58278	1,90602	0,26634	0,48282
Dialysiertes Trypsin										
0,005	0,01214	0,24708	in Spuren	0,19530	0	0,04102	0,23020	0,75338	0,25243	0
0,01	0,00354	0,20458	„	0,18964	0	0,12584	0,25572	0,23249	0,32598	in Spuren
0,05	0,01824	0,07925	0,24986	0,28907	in Spuren	0,53174	0,42862	1,35406	0,11102	0,46520
0,1	0,14117	0,13332	0,60510	0,04716	0,23310	0,66013	0,38405	1,75602	0,22042	0,50486
0,5	0,19071	0,10728	0,84563	0,13871	0,26730	0,88379	0,49883	1,78268	0,15224	0,77498
1,0	0,26074	0,25962	0,75464	0,08225	0,37314	0,95220	0,45043	1,94543	0,10404	0,61760

Aus den Daten dieser Tabelle ist zu ersehen, dass sehr wenig Trypsin (0,005 proc.) in Wasser gelöst, sowohl den Blutfarbstoff wie auch das hartgekochte Eiweiss bereits verdaut. Bis zu 0,1 proc. Gehalt an Trypsin steigt mit der Zunahme der Menge des Trypsins die Verdauungsfähigkeit der Lösung desselben; bei grösserem Trypsingehalt jedoch steht die verdaute Eiweissmenge

in keinem Verhältnis zur Menge des Trypsins, insofern als bei relativ grosser Zunahme des Trypsingehaltes, von 0,1 bis 0,5 ja bis 1,0 proc., die Verdauung kaum etwas zunimmt. Man kann daher über einen relativ geringen Trypsingehalt hinaus, aus dem Fortschritt der Verdauung, nicht auf den Trypsingehalt selbst schliessen.

2. Nachdem es schien, dass die Trypsinverdauung bei *alkalischer Reaction* besser vor sich geht als bei neutraler oder gar saurer Reaction, wurde empfohlen (KÜHNE, HEIDENHAIN) 0,25 bis 0,5 proc. Soda dem künstlichen Pankreassaft beizufügen. Um diesbezüglich ein Urtheil zu gewinnen, gab ich zu einer Lösung von 0,1 proc. Trypsin verschiedene Mengen Soda, Natronlauge, Kochsalz, Salzsäure bezüglich Milchsäure, setzte in dieser Eiweiss einer 24 stündigen Verdauung aus und bestimmte die Menge der entsprechenden Verdauungsproducte.

VIII. Tabelle.

Na_2CO_3 Gehalt	Gekochtes Ovalbumin		Blutfibrin		
	Albumose	Pepton	Globulin	Albumose	Pepton
$^1/_2$ normal	0,59423	0	0,27401	1,28313	1,17430
$^1/_5$ normal	0,73203	0	0,14613	1,43888	2,02152
$^1/_{10}$ normal	0,52704	0,50762	0,14951	1,19083	2,04513
$^1/_{20}$ normal	0,66858	0,57632	0,22828	1,06927	2,32260
$^1/_{40}$ normal	0,32433	0,94844	0,48261	0,98445	3,84648
$^1/_{60}$ normal	0,15532	1,04164	0,55538	1,04514	3,74425
$^1/_{100}$ normal	0,13962	1,02702	0,15680	0,64661	2,28151
0	0,46457	0,51851	0,49974	0,96474	2,10678

IX. Tabelle.

NaCl Gehalt	Gekochtes Ovalbumin		Blutfibrin		
	Albumose	Pepton	Globulin	Albumose	Pepton
$^1/_2$ normal	0,16062	0,77863	0,11785	0,92290	2,0307
$^1/_5$ normal	0,12528	0,84263	0,16308	0,76612	2,81509
$^1/_{10}$ normal	0,22845	0,98308	0,19705	0,56335	2,92405
$^1/_{20}$ normal	0,15136	1,01175	0,14876	0,70517	2,92405
$^1/_{40}$ normal	0,17007	1,01175	0,27976	1,32124	2,22811
$^1/_{100}$ normal	0,26220	0,85042	0,43185	1,85540	1,88889

X. Tabelle.

Zur Trypsinlösung wurden gegeben	gekochtes Ovalbumin			Blutfibrin		
	Alkali-albuminat	Albumose	Pepton	Alkali-albuminat	Albumose	Pepton
NaHO $^1/_2$ - normal	1,94214	0,90075	—	7,05645	0,41665	0,91896
„ $^1/_{50}$ - normal	0,42381	—	0,91896	1,00359	1,22736	2,25994
„ $^1/_{100}$ - normal	0,74168	—	1,08869	1,21851	1,57817	2,16292
	Acidal-buminat			**Acidal-buminat**		
HCl $^1/_{20}$ - normal	0,13940	—	—	0,00617	0,16285	—
„ $^1/_{50}$ - normal	0,13654	—	—	0,06264	0,29655	Spuren
„ $^1/_{100}$ - normal	0,26157	—	—	0,11142	0,36925	0,92731
Milchsäure						
$^1/_{20}$ - normal	0,24719	—	—	0,08343	0,24576	—
„ $^1/_{50}$ - normal	0,24975	—	—	0,06181	0,18981	0,46809
„ $^1/_{100}$ - normal	0,32278	—	—	0,05096	0,15895	2,46424

Ein Vergleich dieser Tabellen zeigt deutlich, in wie grossem Maasse Säuren, Salzsäure und Milchsäure, hemmend auf die Trypsinverdauung wirken. Bei Vorhandensein von Säuren wurden aus Ovalbumin Albumosen und Peptone nicht gebildet, und aus Fibrin auch nur bei sehr stark verdünnten Säuren. So tritt Peptonbildung erst bei $^1/_{100}$ - normal Salzsäure-, $^1/_{50}$ — $^1/_{100}$ - normal Milchsäuregehalt auf.

Betreffs des Einflusses des Kochsalzes auf die Verdauung ersieht man aus den Daten der IX. Tabelle, dass der Gehalt von $^1/_5$ oder weniger normal Kochsalz die Peptonbildung fördert. Bei einem derartigen Kochsalzgehalt war die Peptonbildung besser als bei vollständigem Mangel an Kochsalz, wie dies die Angaben der letzten Reihe der VIII. Tabelle beweisen; wobei die Verdauung auch besser verlief, als bei einem grösseren, zum Beispiel $^1/_2$ normalen, Kochsalzgehalt.

Etwas besser als Kochsalz befördert die Verdauung das Vorhandensein von $^1/_{40}$—$^1/_{60}$ normal Soda (VIII. Tabelle); doch scheint dieser Einfluss sich bloss auf die Lösung von Fibrin zu erstrecken, während Ovalbumin dabei nicht besser verdaut wird. Auch $^1/_{50}$ bis $^1/_{100}$ Natronlauge (siehe die X. Tabelle) bessert die Verdauung,

doch bei weitem nicht so wie Soda; ich kann demnach den fördernden Einfluss der Soda bei der Verdauung nicht allein deren alkalischer Reaktion beimessen, sondern dieselbe wirkt vielmehr wie andere Salze (siehe auch die IV. Tabelle).

Wenn wir nun mit 0,1 proc. Trypsin und $^1/_{50}$ normal Soda eine gut verdauende Trypsinlösung darstellen und die Verdauungsfähigkeit mit der eines künstlichen Magensaftes vergleichen, welcher 0,1 Proc. Pepsin und 0,5 Proc. Salzsäure enthält, so erhalten wir folgende Resultate:

XI. Tabelle.

	Pepsinverdauung		Trypsinverdauung	
	Ovalbumin	Faserstoff	Ovalbumin	Faserstoff
Albumose . .	2,893	2,993	0,155	1,046
Peptone . .	0,178	0,305	1,042	3,744
Zusammen	2,071	3,293	1,197	4,790

Ein guter Magensaft verdaut sonach bei weitem nicht um so viel schlechter Eiweiss als Pankreassaft, wie CORVISART und andere behaupten. Während der Magensaft bei der Eiweissverdauung mehr Albumose liefert, finden wir in der Verdauungsflüssigkeit des Pankreas bei weitem mehr Pepton; dabei verdaut Magensaft das Ovalbumin besser als die Trypsinlösung und umgekehrt letztere besser den Faserstoff als das Ovalbumin.

3. Den Einfluss der *Temperatur* auf die Trypsinverdauung zeigt die folgende (XII.) Tabelle:

XII. Tabelle.

Temperatur in C°	Faserstoff		
	Globulin	Albumose	Pepton
0	0,63467	0,69840	0,94844
20	2,64204	1,14973	1,13759
40	0,06326	0,10581	1,28151
50	0,01565	0,20233	2,03077
60	—	1,60890	1,72838
80	—	—	—

Bei einer Temperatur von 0° C. trifft man bereits Verdauung an, auf 40° erwärmt ist dieselbe am grössten und hält, wohl an Intensität abnehmend, bis 60° C. an; bei 80° hört jede Verdauung auf. Diesbezüglich unterscheidet sich also die Trypsinverdauung von der Verdauung mit Pepsin, da das Optimum der letzteren zwischen 50—60° C. ist.

4. Der *zeitliche Verlauf der Trypsinverdauung* erhellt aus den Daten der folgenden (XIII.) Tabelle:

XIII. Tabelle.

Zeit	Globulin	Albumose	Pepton	Zeit	Globulin	Albumose	Pepton
30′	0,37831	0,51388	0,46045	1 Tag	0,09472	0,09588	2,27069
1°	0,64643	0,11310	0,95701	2 Tage	0,06326	0,10581	2,28151
2°	0,66160	1,74995	0,96998	3 „	0,07204	0,08264	1,82270
3°	0,77201	1,62919	1,05557	4 „	0,05558	0,07407	1,54246
4°	0,89938	1,61883	1,20938	6 „	0,05163	—	1,48834
6°	1,26255	1,16857	1,24686	10 „	0,05542	—	1,42086
10°	0,61625	1,17802	1,41411	15 „	0,05718	—	1,26870
15°	0,31238	0,86433	1,75142	22 „	0,04995	—	1,04626
20°	0,16347	1,05081	1,99410	30 „	0,04953	—	1,01275

Nach den Daten dieser Versuche, bei welchen Faserstoff zur Verdauung diente, enthielt die Verdauungsflüssigkeit am Schluss des zweiten Tages das meiste Pepton, während am meisten Albumose in der 2. bis 4. Stunde in der Flüssigkeit nachgewiesen werden konnte; von da an nahmen sowohl das Pepton wie die Albumose ab, so sehr, dass vom 6. Tage an Albumose nicht mehr nachzuweisen war. Das durch Kochen aus der Verdauungsflüssigkeit fällbare Eiweiss — das Globulin — blieb vom 4., genau genommen vom 22. Tage an constant und bestand aus dem durch Kochen fällbaren Trypsin. Dass das Pepton vom 3. Tag angefangen immer mehr abnahm, während dasselbe bei der Pepsinverdauung selbst am 30. Tage noch langsam zugenommen hatte[16], beruht auf der bekannten Eigenschaft der Pankreasverdauung, nach welcher die Peptone durch Trypsin weiter gespalten werden.

4. Das Proteinochrom.

Während dieser Verdauungsversuche fiel mir die gelbe Farbe der Verdauungsflüssigkeit auf. Wenn man nämlich frisches Pankreas, das besonders vom Blut gut gereinigt worden war, oder Pankreas siccum, bei Vorhandensein von Chloroform oder Thymol in Wasser der Selbstverdauung aussetzt, so färbt sich die Verdauungsflüssigkeit bald gelb, bei einer 3—7 Tage anhaltenden Verdauung selbst rothgelb. Abfiltriert erscheint das Filtrat bei durchfallendem Lichte orangeroth und fluoresciert in grüner Farbe. Diese Färbung nimmt bei längerem Anhalten der Verdauung zu.

TIEDEMANN und GMELIN, KÜHNE und andere erwähnen auch die gelbe Farbe der durch Selbstverdauung des Pankreas erhaltenen Verdauungsflüssigkeit, ohne jedoch dieselbe weiterer Beachtung zu würdigen. Nach meiner Erfahrung entsteht die Färbung bei der Selbstverdauung des von jedem möglichen Farbstoff auf das vollkommenste gereinigten Pankreas und wird mit dem Fortschreiten der Verdauung dunkler, selbst wenn die Farbe in den ersten Tagen kaum blassgelb war. Wird das Pankreas gekocht und dann in reinem Magensaft verdaut, so erscheint das Filtrat kaum schwach blassgelb, während Theile desselben Pankreas bei der Selbstverdauung eine dunkelgelbe bis rothgelbe Farbe annehmen. Aus alledem folgt, dass der Farbstoff während der Pankreasverdauung gebildet wird und zwar, wie die Erfahrung zeigt, in bei weitem grösserem Maasse bei der Verdauung von frischem Pankreas, als von Pankreas siccum. Bei der Darstellung des Trypsins (2) konnte dasselbe auf dem gehärteten Filter von dem anhaftenden Farbstoff durch 96grädigen Alkohol und noch besser durch Alkohol und Ammoniak gereinigt werden. Der durch ammoniakalischen Alkohol gewonnene Farbstoff blieb nach Abdampfen des Lösungsmittels als eine vorzüglich mit Ammonsulfat verunreinigte dickflüssige Masse zurück. Diese ist in Chloroform, Petroleumäther, Benzol, Aethyläther unlöslich. Kann nicht abdestilliert werden. Ist dialysierbar. Wird gefällt durch die schweren Metallsalze wie durch Quecksilberchlorid, Silbernitrat, MILLON'sches Reagens, Bleiessig, Bleiessigammoniak, so wie denselben Tannin, Salzsäure, Schwefelsäure, Salpetersäure

und Phosphorwolframsäure auch fällen. In Alkalien ist der Farbstoff löslich. Derselbe giebt von den Eiweissreactionen die Biuretreaction nicht, nur mit Pepton verunreinigt. Das MILLON'sche Reagens fällt den Farbstoff mit gelber Farbe, derselbe löst sich aber im Ueberfluss des Reagens wieder auf, erhitzt wird die Flüssigkeit rothgefärbt. Schwefelsäure trübt die Lösung an der Berührungsfläche mit rother Farbe. Wenn wir den Farbstoff mit Chromsäure, Phosphorwolframsäure oder Salpetersäure kochen, so wird die Farbe langsam grün; wird die Flüssigkeit mit Salpetersäure dann noch weiter erwärmt, so entsteht unter Aufbrausen eine rothgelbe Färbung. Diese Farbenänderung erinnert sehr an die GMELIN'sche Gallenfarbenreaction. Schliesslich, und dies ist charakteristisch, erhält die Flüssigkeit beim Behandeln mit Chlor- oder Bromwasser eine violette bezw. braune Färbung; nach längerem Stehen scheidet sich ein dunkel gefärbter Niederschlag ab. — Diese Chlorwasserreaction ist als die Reaction eines Pankreasproductes schon lange bekannt; ehe wir daher unsern neuen Farbstoff näher untersuchen, wollen wir uns mit dem Brom- oder Chlorkörper näher beschäftigen.

Bereits TIEDEMANN und GMELIN[4] fanden, dass die gelbe Färbung der Pankreasflüssigkeit durch Chlorwasser lebhaft rosenroth wird, nach 12 Stunden scheiden sich violette Flocken ab, wobei, nach Angabe der Forscher, die Flüssigkeit sich beinahe ganz entfärbt. Viel Chlorwasser vernichtet die rothe Farbe sogleich. Nach KÜHNE erhält die Flüssigkeit mit gesättigtem Chlorwasser eine dunkelviolette Färbung, worauf amorphe, beinahe schwarze Flocken sich ausscheiden, die in Wasser nur wenig gelöst werden, während das Filtrat schön rosenroth bleibt. STADELMANN nennt den durch Chlorwasser färbbaren unbekannten Körper Proteinochromogen, NEUMEISTER Tryptophan. Den durch Chlorwasser in lebhaft rosenrother Farbe darstellbaren Stoff fällt nach CL. BERNARD Bleiessig nicht, er hielt diese Färbung für identisch mit jener, welche salpetrige Säure enthaltende Salpetersäure giebt. KÜHNE[16] zeigte jedoch, dass der durch Chlor- und Bromwasser darstellbare Farbstoff nicht identisch ist mit jenem flüchtigen Körper, welcher mit Salpetersäure und Nitriten in der Wärme roth gefärbt wird (Indol) und welcher sich nur während

der Fäulniss bildet. Später wiesen KÜHNE und CHITTENDEN direct nach, dass das farblose Proteinochromogen, bei vollkommenem Ausschluss der Fäulniss während der Trypsinverdauung, aus Albumose gebildet wird. Künstlich stellten die genannten Forscher diesen Körper dar, indem sie Eiweiss mit Barytwasser oder mit 5proc. Schwefelsäure kochten; bei der Pepsinverdauung jedoch bildet sich dieser Körper nicht. KRUKENBERG[17] säuerte die Verdauungsflüssigkeit nach der Fibrinverdauung mit Essigsäure an und gab Bromwasser solange dazu, als die violette Färbung zunahm. Der auf diese Weise erhaltene Farbstoff, mit Aether und Chloroform durchgeschüttelt, gab eine charakteristische Absorptionslinie bei *D*; welchen Befund jedoch andere Forscher nicht bestätigen konnten. Das Chromogen, aus welchem der violette Farbstoff mittels Brom dargestellt werden kann, dialysiert durch pflanzliche Membranen und geht nicht in Chloroform und Aether über. An der Luft zersetzt sich dasselbe bei 100° C., doch auch in gewöhnlicher Temperatur. Ausserdem beschreibt KRUKENBERG noch ein zweites während der Trypsinverdauung gefundenes Chromogen, welches von der Verdauungsflüssigkeit abdestilliert und aus derselben mit Chloroform oder Aether extrahiert werden kann. Wenn man dies Extract abdampft, so bleibt eine braune, harzige, in destilliertem Wasser unlösliche, in Alkalien leicht lösliche Masse zurück. Dies Chromogen wird durch Salpetersäure purpurroth, durch Salzsäure blutroth gefärbt. Nach KRUKENBERG gehören beide Körper zur Indigogruppe und entsprechen in jeder Beziehung den Farbstoffen, die man auch von faulendem Fibrin gewinnen kann; allein der aus Indollösungen auf gleiche Weise darstellbare Farbstoff erwies sich so auffallend verschieden, dass an eine Identität der beiden Körper nicht gedacht werden kann. KÜHNE[18] bezeichnet den mit Chlor oder Brom darstellbaren Farbstoff mit Recht als verschieden von dem flüchtigen, destillierbaren, mit Salpetersäure und Nitriten sich roth färbendem Indol. Auch nach STADELMANN[19] ist der zweite Farbstoff KRUKENBERG's ein Fäulnissproduct. NEUMEISTER[20] fand, dass eine lang ausgedehnte Verdauung das Tryptophan vernichtete. Doch dies dürfte höchstens nach sehr lange anhaltender Verdauung erfolgen; denn man kann diesen Körper in dem Verdauungsproducte vom Rinder-

pankreas nach einer zwei Monate anhaltenden Verdauung noch reichlich nachweisen. Nach STADELMANN wird das Proteinochromogen vernichtet, wenn wir zu demselben Schwefelsäure, Salpetersäure, Salzsäure, Natronlauge, kohlensaures Natrium oder 5proc. Ammoniak geben und kochen. Das Proteinochromogen ist unlöslich in Aether und Chloroform, auch Essigäther und Amylalkohol lösen nur sehr wenig von denselben; in Amylalkohol wird das Proteinochromogen sehr bald zersetzt. Das Proteinochromogen verhält sich in seinen meisten Eigenschaften wie Pepton (STADELMANN): ist diffusionsfähig, wird gefällt durch Phosphorwolframsäure, aber nicht durch Ammonsulfat; kann nicht destilliert werden. Löst sich in Alkohol etwas leichter als Pepton. Da Proteinochromogen von Peptonen und Amidosäuren nur sehr schwer und in geringer Menge geschieden werden kann, so unterzog sowohl STADELMANN wie auch alle anderen Forscher dessen Brom- bezw. Chlorverbindung einer eingehenderen Untersuchung. STADELMANN unterschied, je nach seiner Löslichkeit oder Unlöslichkeit in Alkohol und Aether, mehrere Arten von Proteinochrom, d. h. Brom-, bezw. Chlorverbindungen des Proteinochromogen, und berechnete aus der Analyse der verschiedenen Proteinochrome die Zusammensetzung des Proteinochromogens wie folgt:

$$C_{56,57-59,79}\ H_{6,89-6,15}\ N_{14,81-13,04}\ S_{4,69-3,82}\ O_{14,90-13,04}.$$

Verglichen mit Eiweiss enthält dieser Körper viel C und S und wenig N und O. WINTERNITZ[21] wies den Bromkörper vom Beginn des Ductus pankreaticus angefangen nach, fand ihn aber weder in den unteren Partien des Dickdarms noch im Kothe vor. WINTERNITZ schliesst daraus auf eine vollkommene Resorption des Proteinochromogens, doch ist natürlicher Weise eine Zersetzung desselben auch nicht ausgeschlossen.

NENCKI[22] überzeugte sich davon, dass Sublimat die Xanthinkörper, aber nicht das Proteinochromogen fällt, er schied daher aus den Pankreasverdauungsproducten die durch Sublimat fällbaren Körper aus, entfernte das Tyrosin, und erzeugte in dem Filtrat mittelst Brom das Proteinochrom. Nach NENCKI können wenigstens zwei Arten Brom enthaltender Körper dargestellt werden, von welchen der eine mehr roth, der andere mehr braun gefärbt

ist. Diese Proteinochrome lösen sich sehr wenig in Aether oder absolutem Alkohol, während sie sich in Alkalien leicht lösen. Die Ergebnisse der chemischen Analyse fand NENCKI nicht befriedigend. Die procentische Zusammensetzung des rothen Körpers, bromfrei berechnet, ergab folgende Werthe: $C_{64,2}H_{5,09}N_{11,7}S_{0,7}$, während die des braunen: $C_{59,8}H_{4,5}N_{10,0}S_{2,8}$ entspricht. NENCKI findet die Zusammensetzung des ersten Körpers dem des Haematoporphyrin und Bilirubin, die des zweiten dem des Melanin ähnlich. Allein, nicht bloss aus der Aehnlichkeit der procentischen Zusammensetzung schliesst der Autor darauf, dass das Proteinochromogen die Muttersubstanz der thierischen Farbstoffe sei, sondern auch daraus, dass ebenso wie durch Zusammenschmelzen von Haematin oder Haematoporphyrin mit Kalilauge viel Pyrrol gebildet wird, Pynol auch aus den Bromkörpern gewonnen werden kann. NENCKI hält es daher für möglich, dass bei der Verdauung des Eiweiss durch Pankreas auch solche Verdauungsproducte entstehen, welche zum Aufbau von Geweben, zur Bildung von Blutfarbstoff und anderer thierischer Farbstoffe dienen, wie eben das Proteinochromogen.

BEITLER[23] untersuchte den durch Chlor darstellbaren Körper. Nach ihm enthält das Eiweissmolekül eine Chromogengruppe, welche sich bei der Pankreasverdauung abspaltet und mit Chlorwasser eine Verbindung bildet, die sich als rother Farbstoff abscheidet. Aus der Analyse dieses Körpers lässt sich schliessen, dass dem Proteinochromogen annähernd folgende Formel entspricht: $C_{96}H_{119}O_{31}N_{21}S$, welche sich von der des Albumin durch grösseren Kohlen- und geringeren Nitrogen- insbesondere aber Hydrogengehalt unterscheidet. Schliesslich sei noch erwähnt, dass KUNAJEFF[24] ein blauviolettes, durch starken Bromgehalt auffallendes, ferner ein in Alkohol mit rother Farbe und schliesslich ein in Alkohol mit brauner Farbe lösliches Proteinochrom unterscheidet. Die Daten seiner Analysen sind nicht wesentlich verschieden von denen, die man bei STADELMANN und NENCKI vorfindet; den von anderen gefundenen Schwefel leitet er von einem dem Proteinochrom beigemischten Körper ab. KUNAJEFF stellt in der folgenden Tabelle die Ergebnisse seiner Analysen sowie der von STADELMANN und NENCKI zusammen:

	Stadelmann				Nencki		Kunajeff				
Präparat	C	D	B_1	B_2	rother Körper	braun. Körper	rother Körper 1	rother Körper 2	schwarzer Körper	violettblauer Körper	
Farbe der Lösung	dunkelviolett	brauner als C	sehr violett	dunkelviolett	schön roth	braun	mit rother Schattierung	mit violetter Schattierung	schwarzbraun	violettblau	violettblau zu röthlich Farbe
C	51,34	40,12	—	—	46,74	47,56	49,71	50,07	45,15	—	—
H	4,45.	5,09	—	—	3,70	3,63	3,25	3,74	2,91	—	—
Br	23,16	19,77	35,17	31,84	27,25	20,56	24,89	27,46	27,23	34,54	32,12
N	10,06	11,92	—	—	8,51	7,94	10,67	—	10,32	—	—
S	2,95	3,10	2,62	2,85	1,51	2,23	—	1,27	0,90	—	—
O	8,03	12,00	—	—	14,89	18,08	—	—	13,49	—	—

Auffallend ist unter diesen Angaben der Autoren sowohl der grosse Unterschied im Bromgehalt (19,77—35,17 Proc.) wie noch mehr derjenige im Gehalt an Oxygen (8,03—18,08 Proc.). Alle Autoren fanden den rothen Körper oxygenärmer als den braunen, während andererseits der braune Körper sich bromärmer erwies als der rothe. Wenn man den stark oxydierenden Einfluss des Chlors und Broms wie auch die Angabe der Autoren berücksichtigt, nach welcher sich der Körper, je nach der Menge des beigegebenen Chlors oder Broms, verschieden dunkel färbt, und dass er wenn viel Chlor gegeben wurde, ganz entfärbt wird, so ist ersichtlich, dass nicht alle Autoren den Körper auf derselben Oxydationsstufe untersuchten. Schwefel fanden die Autoren vor, doch nicht immer. Aus alledem folgt, dass man aus der Zusammensetzung des erhaltenen Brom- oder Chlorkörpers nicht mit Sicherheit auf die Zusammensetzung des ursprünglichen Chromogens schliessen darf. Das Proteinochromogen erhielten alle Forscher entweder bei der Verdauung von Fibrin in Pankreassaft, oder bei der Selbstverdauung der Drüse. Da demnach alles dafür spricht, dass dieser Körper bei der Eiweissverdauung abgespalten wird, dürfte es nicht uninteressant sein, denselben in den Verdauungsproducten der verschiedenen Eiweisse zu suchen. Ich bereitete daher Verdauungsflüssigkeit, die auf je 0,1 gr Trypsin 98 ccm Wasser, 2 ccm Normalsodalösung und 0,5 gr Thymol enthielt und setzte in derselben je 2 gr getrocknetes Fibrin, Serumalbumin, Globulin, Alkalialbuminat, Ovalbumin und Gelatin, in besonderen Gefässen

einer 24stündigen Verdauung aus; ebenso wurde auch Pancreas siccum, natürlich ohne Zugabe von Trypsin, der Verdauung unterzogen. Nach der Verdauung gab ich zu gleichen Mengen des Filtrates gleiche Mengen von demselben Chlorwasser. Es zeigte sich, dass die Flüssigkeiten durch Chlorwasser sehr verschieden gefärbt wurden. So wurde die Verdauungsflüssigkeit des Gelatins und des gekochten Ovalbumins durch Chlorwasser gar nicht gefärbt. Ich liess gekochtes Eiereiweiss selbst zwei Tage lang der Trypsinwirkung ausgesetzt, die filtrierte Flüssigkeit gab reichlich die Peptonreaction, reagierte aber auf Chlorwasser nicht. Die Verdauungsflüssigkeit rohen Ovalbumins zeigte Spuren einer Färbung mit Chlorwasser. Hierauf folgten in zunehmender Reihenfolge — sie wurden mit Chlorwasser immer intensiver gefärbt — das Alkalialbuminat, Serumalbumin, Globulin, das Pancreas siccum, und schliesslich der das meiste Proteinochrom gebende Blutfaserstoff. Da die Verdauung mit allen Albuminen sehr gut ging, so folgt, dass in den Molekülen der verschiedenen Eiweisskörper die Chromogengruppe in sehr wechselnden Mengen enthalten ist, im Gelatin ganz fehlt, im Ovalbumin nur in Spuren vorhanden ist. Das von den Autoren in reiner Chlor- und Bromverbindung dargestellte und beschriebene Proteinochromogen, wird nur durch jene Körper gefärbt und als Chlor- oder Bromverbindung Proteinochrom genannt. Die von mir mit Alkohol extrahierte Substanz, welche ebenfalls auf Chlor- bezw. Bromwasser empfindlich reagiert, ist selbst gefärbt, daher dieselbe mit Recht Proteinochrom zu nennen ist. Dies Proteinochrom ist also ein Verdauungsproduct. Dasselbe möglichst rein darzustellen war die Aufgabe der folgenden Versuche. Mit Rücksicht auf das Verfahren, welches KUTSCHER[25] zur Reingewinnung der Endproducte der Trypsinverdauung befolgte, setzte ich Pancreas siccum fünf Wochen lang der Selbstverdauung aus und behandelte das Filtrat desselben in der Weise wie KUTSCHER das Antipepton von KÜHNE. So stellte ich den Silberniederschlag des Proteinochroms dar; dies konnte von Histidin, Arginin und Lysin getrennt werden, nachdem seine Silberverbindung in verdünnter Salpetersäure unlöslich ist, während die jener Körper in derselben leicht gelöst wird. KUTSCHER behandelte den in stark verdünnter Salpetersäure un-

löslichen Rest mit Salpetersäure von 1100 specifischem Gewicht, kalt, wobei ein Theil desselben sich löste, der übrige aber wurde in Salpetersäure gekocht und so aus demselben Guanin, Adanin und Hypoxanthin gewonnen. Daraus aber folgt, dass der Silberniederschlag entweder eine Mischung mehrerer chemischer Körper ist, oder aber, was wahrscheinlich, dass dieselben aus dem Silberniederschlag durch die tief einwirkende Behandlung künstlich erzeugt worden sind.

Ich verfolgte dies Verfahren nicht weiter, weil dasselbe mit sehr grossem Verlust verbunden ist und weil schwer vorausgesetzt werden kann, dass eine organische Verbindung, die man nach der Behandlung der Pankreasverdauungsflüssigkeit mit Phosphorwolframsäure, dann mit bei 50° C. gesättigter Barytlösung, in derselben Temperatur, hierauf mit 10proc. Argentumnitratlösung, nachher mit Salpetersäure, eventuell noch mit Salzsäure gewinnt, ursprünglich in der Verdauungsflüssigkeit auch vorhanden war. Da ich erfahren, dass das Proteinochrom in ammoniakalischem Alkohol leicht gelöst werden kann, dampfte ich das Filtrat des verdauten Pancreas siccum ein, goss darüber den Ammoniakalkohol und liess das Ganze 24 Stunden stehen. Der Alkoholextract war, filtriert, gelb gefärbt, im Wasserbad eingedickt von braunrother Farbe, und reagierte sehr empfindlich auf Chlorwasser. Während der Eindickung schieden sich farblose Körper aus, die ich durch wiederholtes Filtrieren entfernte, so dass schliesslich eine dunkelbraune, honigartig fliessende Masse zurückblieb. Diese aus den Verdauungsproducten des Pancreas siccum dargestellte Substanz gab die Biuret-, Millon- und Xanthoproteinreaction ebenso wie die Peptone. Wennschon das Ammoniak, als starke Base, nicht viel Vertrauen erweckend war zur Reindarstellung des Proteinochroms, so zeigen jene Reactionen direct eine Verunreinigung desselben an, welche dadurch bewiesen war, dass, wieder in Wasser gelöst, aus dieser Lösung sich ein farbloser Niederschlag ausschied. Die eingedickte Substanz ergab nach der Analyse des Herrn Dr. MATOLCSY MIKLÓS, Assistenten am I. chemischen Institut der hiesigen Universität, folgende Zusammensetzung:

$$C_{41,26}H_{7,51}N_{14,71}S_{0,96}O_{35,56}.$$

Auch diese Analyse spricht für eine Verunreinigung der Substanz. Dieselbe enthält, wie wir weiter sehen werden, keinen Schwefel.

Nach alledem stand ich von der Behandlung mit ammoniakalischem Alkohol ab und versuchte die Darstellung des Proteinochroms mit Alkohol und Aether allein. Doch aus dem eingedickten Verdauungsproduct des Pancreas siccum konnte ich mit 96,5proc. Alkohol, selbst nach tagelangem Behandeln im Thermostat, nur sehr wenig Farbstoff gewinnen: der Alkohol erhielt bloss eine blassgelbe Farbe und nach dem Abdampfen desselben blieb sehr wenig Substanz zurück. Anders gestaltete sich die Sache mit frischem Pankreas. Ich setzte daher gereinigtes, gut durchgewaschenes und fein gemahlenes Rinderpankreas, reichlich mit Chloroform versehen, der Verdauung aus und fand nach derselben, dass mittelst Alkohol aus dem eingedickten Filtrat reichlich Farbstoff extrahiert werden kann. Es deutet dies darauf hin, dass die Bildung des Proteinochrom aus den Verdauungsproducten des Trypsins ein besonderes Enzym vollführt, welches in dem frischen Pankreas reichlich, im Pancreas siccum aber nur spärlich vorhanden ist.

Näheren Einblick in die Bedingungen der Bildung des Farbstoffes gewinnt man auf folgende Weise: Setzt man in 100 ccm einer 0,1 Proc. Trypsin enthaltenden Flüssigkeit 20 gr rein gewaschenes Blutfibrin, bei Vorhandensein von 0,5 gr Thymol, der Verdauung aus, so ist dasselbe nach zwei Tagen vollkommen verdaut, das Filtrat ist *farblos*, nur in dicker Schichte verräth dasselbe eine sehr blasse gelbe Färbung, welche selbst nach wochenlang anhaltender Verdauung seine Farbe nicht ändert. Das Filtrat giebt dabei sehr gut die Chlorreaction (Proteinochromogen). Bei der Trypsinverdauung wird also aus Fibrin Proteinochromogen, nicht aber Proteinochrom gebildet. Dann setzte ich in 100 ccm Wasser, welchem ebenfalls 0,5 gr Thymol beigegeben war, 10 gr rohes Pancreas siccum der Verdauung aus. Nach zwei Tagen war das Filtrat orangeroth gefärbt und fluorescierte in grüner Farbe. Hier bildete sich also bereits Proteinochrom; dasselbe kann also nicht eine Folge der Eiweissverdauung durch Trypsin allein sein. Schliesslich wurde frisches Rinderpankreas, welches von Fett, Bindegeweben, Blutgefässen und Blut gut gereinigt worden

war, in Gegenwart von Thymol, zwei Tage lang der Verdauung ausgesetzt; das Filtrat war braunroth gefärbt. Eingedickt, stellte ich aus demselben einen Alkoholextract dar; der Alkohol wurde abgedampft und der Rückstand mit Chloroform und Aether solange gewaschen, als Luteïn, Fette und Fettsäuren extrahiert werden konnten; worauf eine dunkel-braungelb gefärbte Substanz zurückblieb.

Diese Erfahrungen weisen darauf hin, dass das frische Pankreas ausser dem Trypsin und den übrigen verdauenden Enzymen ein Enzym enthält, welches, soweit aus der Identität der Chlorwasserreaction geschlossen werden kann, das Proteinochromogen zu Proteinochrom oxidiert; das Proteinochrom ist nämlich, wie die weiter unten angegebene Analyse lehrt, ein oxygenreicher Körper. In den Zellen des Pankreas befindet sich also eine Oxydase, das Produkt der Wirkung derselben ist das Proteinochrom. Während LÉPINE daraus, dass Exstirpation des Pankreas zu hochgradigem Diabetes führt, auf die Bildung einer zuckerzersetzenden Oxydase im Pankreas schloss, beweisen meine angegebenen Versuche das Vorhandensein einer Oxydase im Pankreas direct.

Um das Proteinochrom aus frischer Pankreas womöglich rein zu gewinnen, wurden 30 Stück Rinderpankreas von Fett und Bindegewebe thunlichst gereinigt, im Wasser solange gewaschen, bis das Waschwasser das Oxyhaemoglobinspectrum nicht mehr zeigte und dann fein zermahlen in Chloroformwasser im Thermostat der Selbstverdauung ausgesetzt. Nach sieben Tagen durch Leinwand gepresst, liess ich die Flüssigkeit einen Tag stehen und filtrierte sie dann rein ab. Das Filtrat wurde im Wasserbad eingedickt, währenddem 1—2mal noch kalt filtriert, um von farblosen sich ausscheidenden Bestandtheilen befreit zu werden. Die endlich eingeengte Masse benutzte ich dann zur Darstellung des Proteinochroms, indem ich aus derselben zu wiederholten Malen Alkoholextracte bereitete. Der erste Alkoholextract, welcher noch relativ reichlich Wasser enthielt, wie auch mit gelösten Verdauungsproducten verunreinigt war, wurde abermals eingeengt und aus dem Reste zum zweiten Mal ein Alkoholextract gewonnen. Dieser und die späteren Alkoholextracte kamen in ein Wasserbad und der Alkohol wurde abgedampft, bis schliesslich eine theer-

artig fliessende, dicke Masse zurückblieb, welche in mit Abflusshahn versehenen Reagensgläsern mit Aether häufig durchgeschüttelt werden konnte. Den Aether erneuerte ich solange, bis derselbe farblos, rein blieb, bis also alles in Aether Lösliche entfernt worden war. Der Aether schied zugleich die braune Masse in eine schwach gelb gefärbte schlammige und in eine in dieser fein zertheilte schwarzbraune Substanz. Um diese differenzierten Bestandtheile von einander ganz zu trennen, setzte ich die Reagensgläser, Aether und Extract gut durcheinander gemischt, starkem Centrifugieren aus. Etwa nach einer Stunde, solange hielt das Centrifugieren an, war der Inhalt der Reagensgläser in vier Schichten getheilt. Den Boden bedeckte eine dickflüssige schwarzbraune Masse, über welcher eine blassgelbe dicke Schicht lagerte, auf diese folgte eine farblose, feinflockige Lage und über dieser der Aether. Die unter dem Aether befindliche, feinflockige Schicht gab die Chlorwasserreaction nicht, dafür gelangen aber mit derselben die Leucin- und Tyrosinproben vorzüglich, während die dicke blassgelbe, sowie insbesondere die unterste braunschwarze Schichte, in Wasser gelöst, mit Chlorwasser schön gefärbt wurden. Diese, das Proteinochrom am meisten enthaltende braunschwarze Schicht, liess ich nun durch Oeffnen der Hähne der Reagensgläser in ein ähnliches Reagensglas zusammenfliessen, schüttelte dieselbe hier abermals mit Aether gut durch und setzte sie von neuem dem Centrifugieren aus. Nach einer Stunde lagerte über der schwarzen, ganz gleichförmigen Masse eine dünne schwarzbraune Schicht, von welcher ich den darunter befindlichen reinen Farbstoff durch Ablassen trennte; die dünne schwarzbraune Schichte enthielt Spuren von Leucin, Tyrosin. Nun erschien der Farbstoff gleichförmig rein, zeigte unter dem Mikroskope keine Schollen oder Krystalle und konnte unter Aether unverändert aufbewahrt werden. Das totale Eintrocknen gelingt sehr schwer, da das Proteinochrom ungemein hygroskopisch ist; bis zur Härte eingedickt wird es an der Luft weich. Dasselbe hat einen ganz eigentümlichen, aromatischen Geruch, löst sich sehr leicht in Wasser mit rothgelber, stark verdünnt in lichtgelber Farbe, hinterlässt beim Verbrennen keine Asche und ist unlöslich in Aether, Chloroform, Petroläther und Benzol. Aus seinen Lösungen wird das Proteinochrom durch

Sublimat, Silbernitrat, Bleiessig, Tannin, Phosphorwolframsäure gefällt. Salzsäure, Salpetersäure, Schwefelsäure bilden keinen Niederschlag. Durch Salzsäure und Salpetersäure wird die Lösung des Proteinochroms ein wenig dunkler; Schwefelsäure bräunt dieselbe. Mit Eisessig und Zinkstaub erhitzt entfärbt sich dasselbe mehr oder weniger. Charakteristisch für diese Substanz bleibt die Chlorwasserreaction. Während die Lösung von Proteinochrom die Biuret- und Xanthoproteinreaction nicht giebt, trübt sie sich mit Millon'schem Reagens; diese Trübung verschwindet im Ueberfluss der Flüssigkeit, wobei sich dieselbe röthet. Die Lösung des Proteinochrom hat kein charakteristisches Spectrum und diffundiert leicht durch Membranen; seine Elementaranalyse ergab nach Dr. MATOLCSY folgende Zusammensetzung:

	I.	II.	Mittel
	Analyse		
C	44,27	44,80	44,53 %
H	7,40	7,70	7,55 %
N	13,20	13,12	13,16 %
O	—	—	37,76 %

Angenommen, dass das analysierte Proteinochrom ein wirklich einheitlicher Körper ist, so wäre aus obigen Zahlen berechnet dessen möglichst einfachste Formel $C_4H_8NO_2$. Dasselbe ist unbedingt ein schwefelfreier Körper, während die mit Hülfe von Chlor- oder Bromwasser aus den Producten der Pankreasverdauung erzeugte Substanz von allen Autoren als schwefelhaltig angegeben wurde. Was also durch Chlor oder Brom aus dem Verdauten des Pankreas gefällt und analysiert wurde, das Proteinochrom der Autoren, war ein zusammengesetzterer, zugleich bedeutend oxygenärmerer Körper. Das Chlorwasser kann verschiedene Körper oxidieren, dass diese Oxydation nicht gleich ist, beweist schon die Erfahrung, nach welcher die Farbenintensität wesentlich von der Menge des Chlorwassers abhängt: viel Chlorwasser entfärbt die Flüssigkeit ganz. In dem von mir isolierten Proteinochrom entspricht das Verhältnis des N und O dem bei Biliverdin ($C_{32}H_{36}N_4O_8$), Kohlenstoff enthält das Proteinochrom genau halb

soviel und Hydrogen etwas weniger ($4C_4H_8NO_2 = C_{16}H_{32}N_4O_8$) als Biliverdin. — Doch wäre es müssig, hieraus darüber Betrachtungen anzustellen, wie weit das Proteinochrom, wie NENCKI von seinem Proteinochrom sagt, zum Aufbau von Gewebebestandtheilen, wie des Blutfarbstoffes und anderer thierischer Pigmente dient. Zu entscheiden, ob dasselbe in der That die Muttersubstanz thierischer Farbstoffe ist, bleibt späteren Forschungen vorbehalten; die Zusammensetzung des Proteinochroms scheint dafür zu sprechen. So viel ist aus den mitgetheilten Beobachtungen als gewiss zu betrachten, dass es unter den Selbstverdauungsproducten des Pankreas einen schwefelfreien, nitrogenhaltigen Farbstoff giebt.

Die Resultate der in Obigem mitgetheilten Untersuchungen können kurz in Folgendem zusammengefasst werden:

1. Je mehr Pankreas man zur Bereitung künstlichen Pankreassaftes verwendet, um so mehr wird von derselben verdaut, wie sich auch dabei um so mehr dialysierbare Verdauungsproducte bilden.

2. Doch über eine gewisse Grenze hinaus nimmt die Verdauungsfähigkeit des künstlichen Pankreassaftes nicht mit der Menge des zu dessen Bereitung verwendeten Pankreas zu; ja ein mit 10 Proc. Pankreas gewonnener Saft verdaut schlechter als ein aus 5 Proc. Pankreas enthaltender Flüssigkeit dargestellter (I. Tabelle, 4. und 6. Reihe).

3. Der dialysierte künstliche Pankreassaft verdaut entschieden besser, löst mehr vom Eiweiss, als der nicht dialysierte.

4. Wenn man das Pankreas längere Zeit, 24 Stunden lang, der Verdauung aussetzt, so enthält sein Infusum immer genügend Trypsin; man trifft auf kein Pankreas, in dessen Extract Trypsin nicht enthalten wäre.

5. Salicylsäure schwächt bereits bei geringer Menge (1‰) die verdauende Wirkung des Pankreasinfusums, während Zugabe von 0,4 Proc. Soda dieselbe wesentlich fördert. Doch ist die Verdauung mit aus Trockenpankreas einfach dargestelltem Infusum nicht schlechter, als die mit 1‰ Salicylsäure dargestelltem und mittelst Soda alkalisiertem Infusum (II. Tabelle).

6. Die Zugabe von Thymol zur Hintanhaltung der Fäulniss giebt bessere Verdauungsflüssigkeit, als Chloroformwasser (III. Tab.)

7. Das Vorhandensein von Salzen, bis zu 1 Proc., im Pankreassaft, befördert die Eiweissverdauung. Pankreassaft von 1 Proc. Kochsalzgehalt verdaut besser als selbst dialysierter Pankreassaft. Von den Salzen, mit welchen ich Versuche machte, erwies sich das Fluornatrium als besonders der Verdauung förderlich (IV. Tabelle).

8. Es ist kein Unterschied in der Fähigkeit Eiweiss zu verdauen zwischen den Extracten, die aus dem Pankreas des Rindes, des Hundes oder des Menschen gewonnen wurden.

9. Aus den Pankreas an mit hohem Fieber einhergehenden Krankheiten Verstorbener ist kein eiweissverdauender Saft zu gewinnen; hier wird kein Enzym gebildet.

10. Um Trypsin darzustellen, digeriert man das Pankreas 7 Tage lang und setzt das Filtrat noch weitere 3 Wochen lang der Selbstverdauung aus. Dann lässt man die Flüssigkeit 2 Tage an kühlem Orte stehen, filtriert und sättigt das Filtrat mit Ammonsulfat. Das ausgeschiedene Trypsin wird im gehärteten Filter gesammelt, mit gesättigter Ammonsulfatlösung, dann mit Ammoniak alkalisiertem 96proc. Alkohol gewaschen. Das so gereinigte Trypsin verdaut vorzüglich und kann getrocknet aufbewahrt werden.

11. Dies Trypsin giebt die Biuretreaction des Eiweisses nicht. Ist aus seinen Lösungen fällbar oder die Lösung wird getrübt durch Kochen, verdünnte Essigsäure, Salpetersäure, Salzsäure, Schwefelsäure und Pikrinsäure, doch die durch die Säuren erzeugte Trübung hellt sich beim Kochen auf. Die Trübung mit Salpetersäure verschwindet, wenn man Salpetersäure im Ueberschuss hinzugiebt. Eine bleibende Trübung, die auch beim Kochen nicht verschwindet, verursachen in der Trypsinlösung Bleiessig, Essigsäure und Ferrocyankalium, Trichloressigsäure, Salicylsulfosäure, Alkohol. Die Reactionen des Trypsin stimmen in vieler Hinsicht mit denen der Eiweisse überein, weichen aber auch theilweise von denselben ab. Trypsin ist also kein Eiweiss.

12. Eine Lösung von 0,005 Proc. Trypsingehalt verdaut bereits. Von da an bis 0,1 Proc. Trypsingehalt nimmt die Ver-

dauungsfähigkeit mit dem Trypsingehalt zu. Doch bei grösserem Trypsingehalt steht die verdaute Eiweissmenge in keinem Verhältniss zur Menge des Trypsins. Man kann also nicht auf den Trypsingehalt einer Verdauungsflüssigkeit aus der Menge des verdauten Eiweiss schliessen (VII. Tabelle).

13. Säuren wirken bereits in sehr geringer Menge störend auf die Trypsinverdauung, während $^1/_{10}$—$^1/_{40}$. normal Kochsalzgehalt die Eiweissverdauung des Pankreas fördert. Am besten verdaut eine Trypsinlösung von 0,1—0,5 Proc. Trypsin- und $^1/_{40}$—$^1/_{60}$. normal Sodagehalt; doch ist dieser vortheilhafte Einfluss der Soda auf die Eiweissverdauung nicht die alleinige Folge seiner Alkalicität, dieselbe wirkt vielmehr wie die übrigen Salze.

14. Während bei der Pepsinverdauung mehr Albumose gebildet wird, giebt die Trypsinverdauung mehr Pepton. Pepsin verdaut besser das Ovalbumin, Trypsin den Blutfaserstoff. Pepsin verdaut bei weitem nicht um soviel schlechter als das Trypsin, wie CORVISART und andere meinten.

15. Die Trypsinverdauung geht am besten zwischen 40 und 50° C. vor sich. Auf 80° C. erwärmt hört jede Verdauung auf, bei 0 und 60° geht noch Verdauung vor sich (XI. Tabelle).

16. Bei Faserstoffverdauung enthielt die Verdauungsflüssigkeit das meiste Pepton am zweiten Tage, Albumose in der 2. bis 4. Stunde der Verdauung. Von da an nahm sowohl die Albumose als das Pepton ab; Albumose wird am 6. Tage der Verdauung nicht mehr nachweisbar (XII. Tabelle).

17. Während der Selbstverdauung des Pankreas bildet sich ein gelber, bezw. rothgelber Farbstoff — Proteinochrom —, welcher in grüner Farbe fluoresciert. Dieser Farbstoff kann dargestellt werden, indem man das Filtrat des verdauten Pankreas bis zur Syrupconsistenz eindickt und hieraus zu wiederholten Malen Alkoholextracte bereitet. Der eingedickte Alkoholextract wird mit Aether und Chloroform solange gewaschen, bis eine von Lutein, Fetten und Fettsäuren freie, dunkelbraun gefärbte, sehr dickflüssige Masse zurückbleibt. Diese Substanz wird mit Aether verdünnt und gut durchgeschüttelt centrifugiert, worauf am Boden der Eprouvette der dunkel-braunschwarze Farbstoff sich sammelt, der von den über demselben lagernden Schichten getrennt werden

kann. Diese Substanz ist in Wasser leicht löslich, lässt keine Asche zurück. Giebt die Biuret- und Xanthoproteinreaction nicht, dafür aber gelingt die Millon'sche Reaction gut. Am charakteristischsten für dieselbe ist die violette Färbung mit Chlorwasser. Die einfachste Formel des Proteinochrom ist folgende: $C_4H_8NO_2$. Mit Salpetersäure gekocht wird seine Lösung dunkler, nach einiger Zeit grün gefärbt. Mit Eisessig und Zinkchlorid erhitzt tritt langsame Reduction ein.

18. Das frische Pankreas enthält ausser den bekannten Enzymen ein oxydierendes Enzym, welches das eine Verdauungsproduct der Trypsinverdauung, vielleicht das durch Chlorwasser ebenfalls sich färbende Proteinochromogen, zu Proteinochrom oxidiert.

Literatur.

1. L. Corvisart. Sur une fonction peu connue du Pancreas, la digestion des aliments azotés. Paris 1857—1858.

2. Keferstein und Hallwachs. Nachrichten von der Universität zu Göttingen. 1858. No. 14.

3. W. Kühne. Virchow's Archiv 1867. Bd. 39. S. 130—174. Verhandlungen des Heidelberger Naturhistorischen Vereins. N. F. 1886. I. 3 und 4.

4. Tiedemann und Gmelin. Verdauung. 1831. Bd. I. S. 25.

5. W. Kühne. Verhandlungen der naturhist. med. Ges. zu Heidelberg. N. F. 1874. Bd. I. S. 195. — 1886. Bd. III. S. 463.

Untersuchungen aus d. physiol. Institut der Universität Heidelberg. 1878. Bd. I. S. 222. Zeitschrift für Biologie. 1886. Bd. 22. S. 435.

6. R. Heidenhain. Handbuch der Physiologie. 1883. Bd. V. Th. I. — Pflüger's Archiv. 1878. Bd. 10. S. 557—632.

7. A. Podolinsky. Beiträge zur Kenntniss des pankreatischen Eiweissfermentes. Breslau 1876.

8. Salkowski. Deutsche medic. Wochenschrift. 1888. No. 16.

9. O. Hammarsten. Lehrbuch der physiolog. Chemie. 1895. S. 265.

10. F. Klug. Ungarisches Archiv für Medicin. Bd. 3. 1895

11. W. Kühne. Zeitschrift für Biologie. 1886. Bd. 22. S. 452. — 1891. Bd. 28. S. 571.

12. R. Pfeifer. Pflüger's Archiv. Bd. 66. S. 610, 613.

13. A. Danilewsky. Virchow's Archiv. 1862. Bd. 25. S. 279—307.

14. Wittich. Pflüger's Archiv. 1869. Bd. 2. S. 193 und Bd. 3. S. 339.

15. G. Hufner. Journal f. prakt. Chemie. 1874. Bd. 10. S. 1—28.

16. W. Kühne. Berichte der deutsch. chemischen Gesellschaft. 1875. Jahrg. 8. S. 206.

17. C. Fr. W. Krukenberg. Verhandlungen d. physiol.-medic. Gesellschaft zu Würzburg. 1884. S. 187 ff.

18. W. Kühne. Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. 1874. Jahrg. 8. S. 1050.

19. E. Stadelmann. Zeitschrift f. Biologie. 1890. Bd. 26. S. 491.

20. R. Neumeister. Zeitschrift f. Biologie. 1890. Bd. 26. S. 329.

21. H. Winternitz. Zeitschrift f. physiologische Chemie. 1892. Bd. 26. S. 462.

22. M. Nencki. Berichte d. deutschen Chemischen Gesellschaft. 1895. Jahrg. 28. Bd. I. S. 560.

23. C. Beitler. Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. 1898. Jahrg. 31. Bd. II. S. 1604.

24. D. Kunajeff. Zeitschrift f. physiol. Chemie. 1899. Bd. 26. S. 501.

25. Friedrich Kutscher. Die Endproducte der Trypsinverdauung. Habilitationsschrift. Strassburg. 1899.

11.

EINE VERSCHOLLENE ABHANDLUNG OHM'S.

Im Jahre 1847 erschien in Pisa das grundlegende Werk OHM's: „Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet" in italienischer Uebertragung aus der Feder Doctor ACHILLE PERUGIA's, eines jungen Triestiner Gelehrten. Das Buch enthält ausser der Abhandlung und dem Anhange der Ausgabe vom Jahre 1830 einen ungedruckten, besonders paginierten Anhang, der ebenfalls von OHM herrührt, den Inhalt des ersten Anhanges weiter ausführt und neu hinzugekommene Erfahrungen in den Bereich der Betrachtung zieht.

Es erschien mir von hohem Interesse, das Original dieser Abhandlung aufzufinden. Die auf Anregung meines Freundes ANGELO EMO, Professor der Physik am königl. Lyceum in Treviso, dem ich mein Exemplar des äusserst seltenen Buches verdanke, in Triest eingezogenen Erkundigungen führten zu keinem Resultate.

PERUGIA war in Nürnberg, wo damals OHM an der technischen Anstalt wirkte, mit diesem in Verbindung getreten, verliess aber bald nach Veröffentlichung seiner Uebersetzung die gelehrte Laufbahn und starb vor etwa einem Jahrzehnt. Meine an die in Dresden weilende Wittwe gerichtete Anfrage blieb unbeantwortet, und so fürchte ich, dass man auf die Auffindung der Originalhandschrift wohl wird verzichten müssen.

Unter diesen Umständen glaube ich durch die Veröffentlichung einer Rückübersetzung jenes Anhanges allen Verehrern des grossen Physikers einen Dienst zu erweisen. Diese Rückübersetzung rührt von Ingenieur IGNAZ FLETZER, Inspector bei

den königl. ungar. Staatsbahnen, her. Ich selbst erfülle damit ein Versprechen, welches ich der geehrten Academie in der Sitzung vom 13. Februar 1893 gegeben habe.

Budapest, im März 1902.

Prof. **August Heller.**

ANHANG
ZUR THEORIE DER GALVANISCHEN KETTE.

Von Dr. OHM.

Vergleichung der theoretischen und experimentellen Ergebnisse.

Die Vergleichung der Aenderungen, die sich aus der blossen Theorie bei jenen Säulen, die geeignet sind, in sich selbst Veränderungen zu erleiden, notwendigerweise ergaben, mit jenen Eigenschaften, die bei denselben Säulen durch Experiment gefunden werden, muss alle Jene interessieren, die sich mit unserer Wissenschaft beschäftigen, weil ein solcher Vergleich bis zur Evidenz beweist, dass die einfache Contacttheorie in der klarsten und natürlichsten Weise alle Thatsachen eines Theiles der Physik erklärt, der eine Fülle von Wundern enthält.

Erst wenn uns klar bewiesen wird, dass es unmöglich ist, dieses reiche Feld mit Hülfe der einfachen Thatsache VOLTA's zu bebauen, erst dann werden wir uns verpflichtet fühlen, den Weg zu verlassen, den der Professor von Pavia geschritten, und zu jener Theorie Zuflucht zu nehmen, welche gleich — zur Zeit seiner Entdeckung — ihm entgegengestellt wurde, zu jener Theorie, die heute fast allgemein angenommen ist, dank den wichtigen Arbeiten und dem grossen Scharfsinne der berühmtesten Gelehrten unserer Zeit.

Wie mangelhaft unser Anhang auch sein mag, derselbe ist einzig und allein auf das klare Princip des berühmten Comasken aufgebaut und enthält Alles, was nöthig ist, um jene Thatsachen zu erklären, die Viele bewogen, dieses Princip zu verlassen. Wir müssen also behaupten, dass dies ohne Nothwendigkeit geschehen ist, und wenn die Anhänger VOLTA's seinen Gegnern den Mangel

an Einsicht und Klarheit vorwerfen, wenn sie sich weigern, eine Erklärung anzunehmen, die ihnen complicierter erscheint, als das, was man erklären will, wenn endlich die Thatsachen, von denen man behauptet, dafs sie in Widerspruch mit der VOLTA'schen Hypothese stehen, ihnen dunkler als je erscheinen, wer wird ihnen einen Vorwurf daraus machen, dass sie nicht fahnenflüchtig werden wollen.

Die Gleichung $S' = S - \frac{\Phi\lambda}{L}(S' + \psi\omega\alpha)$, die wir gefunden haben, drückt das Verhältnis aus, das unter den elektrischen Strömen S und S' besteht. S bezieht sich auf die galvanische Kette, die noch keine und S' auf jene Kette, die schon die grösste Veränderung erlitten hat; S stellt also die Energie des Stromes gleich nach Schluss der Kette dar, S' die Energie des Stromes, den die Kette später ergiebt, d. h. wenn schon der äusserlich unveränderliche Zustand eingetreten ist, den wir im Anhange den constanten Zustand genannt haben.

Wenn wir in der obigen Gleichung für λ seinen Werth $\frac{l}{a\omega}$ setzen, wo a die Leitungsfähigkeit, l die Länge und $a\omega$ den Querschnitt des chemisch veränderten flüssigen Theiles der Kette bedeutet, so wird die Gleichung folgende Gestalt annehmen:

$$S - S' = \frac{\Phi l}{aL}\left(\frac{S'}{\omega} + \psi\omega\alpha\right). \qquad (1)$$

Wenn man nun $\frac{\Phi l}{\alpha} = p$, und $\frac{\Phi l}{a} \cdot \psi\alpha = q$ macht, so verändert sich die Gleichung folgenderweise:

$$S - S' = \frac{1}{L}\left(p\,\frac{S'}{\omega} + q\right). \qquad (2)$$

Die Grössen α, l und ψ beziehen sich auf die Beschaffenheit der Flüssigkeit, in der die Zersetzung vor sich geht und drücken das Spannungsverhältnis zwischen den Bestandtheilen, in die die Flüssigkeit zerfällt, und den zwei Flächen, die dieselbe einschliessen, aus, welche Spannungen in der Reihe jener Betrachtungen, die uns zu dieser Gleichung geführt haben, als constant vorausgesetzt wurden. Die Buchstaben p und q stellen also constante Grössen dar, vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit immer

dieselbe ist (was bei uns stets der Fall sein wird) und dass sie immer durch Flächen derselben Beschaffenheit eingeschlossen bleibt.

Aus der Gestalt der Gleichungen (1) und (2) folgt unmittelbar, dass, die sonstigen Umstände gleich angenommen, die Veränderung $S - S'$ des Stromes von der Grösse $\frac{S'}{\omega'}$, d. h. von der Intensität jenes Stromes abhängt, der von den Begrenzungsflächen der chemisch veränderten Flüssigkeit übrig bleibt, sobald die Kette den constanten Zustand erreicht hat und ebenso ist es klar, dass jene Veränderung der Quantität des Stromes mit dieser Intensität wächst oder abnimmt.

Es folgt aus dieser Betrachtung und aus dem Umstande, laut welchem in der Gleichung (1) die Stromänderung $S - S'$ gleich Null wird, wenn man Φ gleich Null setzt, dass die beiden Begrenzungsflächen, die zur Verbindung zwischen dem chemisch veränderlichen flüssigen Theil und den andern Theilen der galvanischen Kette dienen, nur insofern einen Einfluss auf die Veränderung des Stromes haben, als sie eine Spannung erzeugen, die den Factor Φ bestimmt. Wir überzeugen uns also, dass die Stromintensität, insbesondere in der Flüssigkeit, eine allgemeine Aenderung des Stromes erzeugen kann, welche dieser Intensität entspricht, und ebenso werden wir wahrnehmen, dass im flüssigen Theile sich eine Spannung bildet, welche durch die Zersetzung selbst hervorgerufen wird.

In diesem Umstande ist die Ursache zu suchen, warum die Grösse des Stromes in verschiedenen Fällen und in so auffallender Weise von den Metallflächen abhängt, die die flüssige Schicht umschliessen. Denken wir uns, die zersetzbare Flüssigkeit habe die Form eines Stutzkegels und sei z. B. an einer Kette von Zink und Kupfer angeschlossen, so wird diese Kette nicht dieselbe Wirkung hervorbringen können, wenn die Kupferscheibe die grössere und die Zinkscheibe die kleinere Basis des Stutzkegels einnimmt, als wenn umgekehrt die Kupferscheibe auf der kleineren und die Zinkscheibe auf der grösseren Basis desselben angebracht ist; dies ist selbstverständlich, vorausgesetzt, dass eines der beiden Metalle mit jenem Bestandtheile der Flüssigkeit, welcher bei deren

Zersetzung sich an seiner Seite ablagert, eine bedeutend stärkere Spannung erzeugt, als das andere.

Da unter allen Umständen die Intensitäten des Stromes an den zwei Basen des Stutzkegels in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die erwähnten Basen selbst, so resultiert aus der Gleichung (2), dass die kleinste Intensität an der grösseren Basis nur eine geringe Aenderung der Stromstärke nach sich ziehen wird, wenn die kleinere Basis an sich nicht geeignet ist, eine Veränderung hervorzurufen, während andererseits die grössere Intensität an der kleineren Basis eine verhältnissmässig grössere Aenderung des Stromes bewirken wird, selbst wenn die grössere Basis des Stutzkegels in Folge der Natur des Bestandtheiles, der sich an ihr ablagert, unfähig ist, eine nennenswerthe Aenderung im Strome hervorzubringen.

Die hier beschriebenen und aus der Gleichung abgeleiteten Thatsachen werden immer an den Ketten beobachtet, die aus Zink, Kupfer und einer Salzlösung bestehen. Die Wirkung des Stromes zeigt sich energischer, wenn man z. B. in die Flüssigkeit eine Kupferscheibe von 6 und eine Zinkscheibe von 1 Quadratzoll eintaucht, als wenn man umgekehrt eine Kupferscheibe von 1 und eine Zinkscheibe von 6 Quadratzoll anwendet.

Dies geschieht ohne Zweifel darum, weil der alkalinische Bestandtheil, der sich aus der Salzlösung abscheidet, mit dem Kupfer eine Spannung erzeugt, die jenen Spannungen entgegengesetzt ist, die ursprünglich in der Kette bestanden hat, indessen die ausscheidende Säure mit dem Zink eine Verbindung eingeht, wodurch dieselbe die Eigenschaft verliert, eine namhafte Spannung zu erzeugen.

Das Phänomen hat einen anderen Verlauf, wenn man an der Stelle des alkalischen Salzes ein Metallsalz nimmt, dessen Radikal negativer als das Kupfer oder Kupfer selbst ist. Das Metall, das sich in diesem Falle aus der Salzlösung auf das Kupfer niederschlägt, ist entweder das negativste oder mindestens das am wenigsten positive, und bringt mit dem Kupfer keinerlei Spannung hervor, oder wenn doch eine Spannung entsteht, so ist sie derselben Art wie jene, die ursprünglich in der Kette bestanden hat und verstärkt demzufolge deren Wirkung. Diese Spannung

erzeugt also eine Veränderung, die der vorhergehenden entgegengesetzt ist, die also nicht mehr dem Gesetze folgt, das in der Gleichung (2) ausgedrückt wird; nachdem sich das aus der Flüssigkeit ausgeschiedene Metall auf die Kupferplatte niederschlägt, verliert dieser Bestandtheil die Reinheit, die wir im Anhange vorausgesetzt haben.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, kann man leicht solche Ketten auffinden, die im Gegensatze zu den bisher beschriebenen, die Eigenschaft besitzen, dann eine energischere Wirkung hervorzubringen, wenn die positiven Metallflächen vergrössert werden.

So wird die Wirkung einer Kette, die aus Manganhyperoxyd, Gold oder Platin und einer verdünnten Säure besteht, sehr verstärkt, wenn man die Gold- oder Platinfläche vergrössert, während die Vergrösserung der Manganhyperoxydfläche nur eine sehr geringe Verstärkung zur Folge hat.

Die Erfahrungen über den ungleichartigen Einfluss, den die Vergrösserung der zur Erzeugung der Electrizität dienenden positiven oder negativen Metallscheiben auf die Grösse des Stromes haben kann, setzen uns in den Stand, die Eigenschaft zu prüfen, von der wir in anderen Gleichungen handeln wollen, die einfacher sein werden, als die vorhergehenden.

Wenn in der Gleichung (2) q grösser als $p\frac{s'}{\omega}$, oder wenn es diesem Producte gleich wäre, so könnte bei den Versuchen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen, eine kleine Aenderung des Querschnittes ω kaum merkbare Aenderungen in der Stromstärke erzeugen. Nun ergeben die bis jetzt gemachten vielfachen Versuche über diesen Gegenstand, dass auch dann noch Unterschiede in der Wirkung der Kette eintreten, wenn der Grössenunterschied der die Flüssigkeit beiderseits abgrenzenden Flächen im Vergleiche zu ihrem mittleren Querschnitte minimal ist.

Daraus entnimmt man, dass mindestens bei den meisten derartigen galvanischen Ketten $p\frac{s'}{\omega}$ sehr viel grösser ist als q, weshalb wir hier, wo wir blos jene Eigenschaften untersuchen, die sich am häufigsten bei veränderlichen Ketten vorfinden, q im Ver-

gleich zu $p\frac{s'}{\omega}$ vernachlässigen können, wodurch die Gleichung (1) folgende Form annimmt

$$S - S' = \frac{p}{L} \cdot \frac{s'}{\omega}. \tag{3}$$

Diese Gleichung lässt, was die Einfachheit anbelangt, nichts zu wünschen übrig, weshalb wir uns ihrer immer in allen Fragen, die sich auf die veränderlichen Ketten beziehen, bedienen werden.

Wenn man in der Gleichung (3) an die Stelle der ursprünglichen Grösse S ihren Werth $\frac{A}{L}$ setzt, wo A die Summe aller Spannungen, die ursprünglich in der Kette bestanden, und L die Summe aller Widerstände oder reducierten Längen darstellt, so wird man haben

$$S' = \frac{A - p\frac{s'}{\omega}}{L}. \tag{4}$$

oder

$$S' = \frac{A}{L + \frac{p}{\omega}}. \tag{5}$$

Unter den verschiedenen hier gefundenen Gleichungen hat die Gleichung (4) die besondere Eigenschaft, dass der Ausdruck $p\frac{s'}{\omega}$, der im Zähler derselben vorkommt, die Spannungsänderung zu erkennen giebt, die in Folge der in ihr vorgegangenen chemischen Prozesse stattgefunden hat. Dies ergiebt sich unmittelbar aus der Methode, die im Anhange befolgt wurde, wo wir uns speciell mit dieser Spannungsveränderung beschäftigt haben, als der wichtigsten Veränderung, die bei den in Rede stehenden Ketten vorkommt. In der folgenden Untersuchung werden wir immer von der Gleichung (4) ausgehen, weil diese Gleichung am klarsten die Eigenschaften der veränderlichen Ketten zum Ausdruck bringt.

Bei allen veränderlichen Ketten, insbesondere bei denjenigen, zu welchen ein neutrales Salz verwendet wird, zeigt sich, und zwar mit grosser Intensität, die folgende Erscheinung: die Grösse des Stromes ist im ersten Momente nach Schluss der Kette am grössten, von da an nimmt sie rasch ab, jedoch wird diese Ab-

nahme fortwährend kleiner, bis endlich, nach einem längeren oder kürzeren Zeitraume, diese Wirkungsabnahme ausserordentlich gering und nahezu gleichförmig wird.

Die langsame und in gleichen Zeiträumen fast gleiche Veränderung, die von einer allmählichen Zersetzung der Flüssigkeit herzurühren scheint, darf man nicht mit derjenigen verwechseln, die ihr vorhergeht, unvergleichlich grösser ist, in geometrischer Proportion abnimmt, und der ich den Namen der Fluctuation der Säule gegeben habe.

Mit Bezug auf diese Fluctuation und abgesehen von der allmäligen Zersetzung der Flüssigkeit, deren Wirkungen im Vergleich mit der Fluctuation verschwindend sind, hat die Erfahrung folgende namhafte Eigenschaften ergeben:

1. Wenn die Stromstärke der Kette soweit abgenommen hat, dass sie nur mehr jene allmälige und gleichförmige Veränderung aufweist, die oben erwähnt wurde und man die Kette öffnet und einige Zeit offen hält, zeigt dieselbe, wenn sie wieder geschlossen wird, neuerdings und falls die Kette nicht allzulange offen geblieben war, die ursprüngliche Energie. Wahrscheinlich aber giebt es dennoch einen Unterschied, der sich hinter einer starken Fluctuation verbirgt, und der von der fortschreitenden Zersetzung der Flüssigkeit abhängt.

2. Die nach der raschen Abnahme der Wirkung noch übrig bleibende Grösse des Stromes nähert sich umso mehr der ursprünglichen, je grösser bei unveränderten Spannungen der Widerstand der Kette gemacht wird. Es wächst also die Kraft der Kette und erreicht ein relatives Maximum, wenn man den kurzen, constanten Schliessungsleiter, durch den die Kette ursprünglich geschlossen war, durch einen längeren ersetzt, ebenso findet umgekehrt eine energische Ahnahme der Wirkung dann statt, wenn neuerdings der lange Leiter durch den kurzen ersetzt wird und das auch dann, wenn der Austausch nach dem Aufhören jedes Anzeichens der Fluctuation bewerkstelligt wird.

Gehen wir nun zur Betrachtung über, in welcher Weise die Schlussfolgerungen des Anhanges die Natur dieser Fluctuation zum Ausdruck bringen.

Es sei A die Summe aller Spannungen, die ursprünglich in

der Kette bestanden, L die reducierte Länge der Kette, so lange dieselbe durch einen kurzen Leiter geschlossen ist, und $L+L'$ ihre reducierte Länge, sobald sie mittelst eines langen Leiters geschlossen wird, da in diesem Falle der Widerstand derselben mit der Grösse L' zunimmt. Die ursprüngliche Grösse des Stromes ein und derselben Kette wird in dem Falle, dass sie durch einen kurzen oder aber durch einen langen Leiter geschlossen ist, folgender Weise ausgedrückt $\frac{A}{L}$ und $\frac{A}{L+L'}$, und wenn die Kette in beiden Fällen schon den constanten Zustand erreicht hat, nimmt die Gleichung (4) andere Werthe an*, die wir durch S' und S'' bezeichnen wollen. Man hat also

$$S' = \frac{A - p\frac{s'}{\omega}}{L}. \quad (5) \quad \text{und} \quad S'' = \frac{A - p\frac{s''}{\omega}}{L+L'}. \quad (6)$$

wo $p\frac{s'}{\omega}$ und $p\frac{s''}{\omega}$ die Spannungsveränderungen bezeichnen, so dass $A - p\frac{s'}{\omega}$ und $A - p\frac{s''}{\omega}$ die Summe der wirksamen Spannungen in beiden Fällen ausdrücken, sobald die Kette den constanten Zustand erreicht hat. Ersetzt man nun in der durch den kurzen Leiter geschlossenen Kette diesen durch einen langen und umgekehrt in der durch einen langen Leiter geschlossenen Kette diesen durch einen kurzen, so wird in der Gleichung (5) der Nenner L zu $L+L'$ und in der Gleichung (6) der Nenner $L+L'$ zu L werden, während in beiden Ketten, sowohl in derjenigen, die durch einen langen, als in der, die durch einen kurzen Leiter geschlossen ist, die Summe der Spannungen, unmittelbar nach Auswechslung der Leiter, dieselbe bleibt, wie sie vor der Auswechslung war. Es sind nämlich $A - p\frac{s'}{\omega}$ und $A - p\frac{s''}{\omega}$; wenn also S_0'' und S_0' die Grösse des Stromes in der ersten und zweiten Kette unmittelbar nach Austausch der Leiter bezeichnet, so hat man

$$S_0'' = \frac{A - p\frac{s'}{\omega}}{L+L'}. \quad (7) \quad \text{und} \quad S_0' = \frac{A - p\frac{s''}{\omega}}{L}. \quad (8)$$

* Siehe den Anhang.

Die Grössen S_0' und S_0'' der Ströme gehören denselben Ketten an, die im constanten Zustande die Stromstärken S'' und S' haben, nur dass sie sich auf jenen Zustand der beiden Ketten beziehen, der ihr constanter Zustand vor Auswechslung der Leiter war. Vergleicht man also die Werthe von S'' und S_0'', sowie die Werthe S' und S_0', so erkennt man, ob die Kraft der Kette, unmittelbar nach Austausch der Leiter, an Energie zu- oder abnimmt.

Aus der Gleichung (5) und (6) erhält man

$$A = S'\left(L + \frac{p}{\omega}\right) \quad \text{und} \quad A = S''\left(L + L' + \frac{p}{\omega}\right)$$

oder

$$S' : S'' = L + L' + \frac{p}{\omega} : L + \frac{p}{\omega},$$

und vergleicht man die Gleichung (5) und (7), so hat man

$$S_0'' : S' = L : L + L'.$$

Aus den zwei letzten Proportionen und den zwei vorhergehenden entnimmt man

$$S_0'' = S'' = \left\{L(L + L') + L\frac{p}{\omega}\right\} : \left\{L(L + L') + (L + L')\frac{p}{\omega}\right\}$$

und

$$S_0' : S' = \left\{L(L + L') + (L + L')\frac{p}{\omega}\right\} : \left\{L(L + L') + L\frac{p}{\omega}\right\},$$

woraus $S_0'' : S'' = S' : S_0'$, es folgt also daraus, dass für einen positiven Werth von q (d. h. in jenen Ketten, in denen elektrische Spannungen durch chemische Vorgänge erzeugt werden, die eine Schwächung der Wirkung der Ketten nach sich ziehen) immer sein wird

$$S_0'' < S' \quad \text{und} \quad S_0' > S$$

oder mit Worten ausgedrückt: jene Kette, in der ein langer Leiter nach einem kurzen eingeschaltet wird, zeigt unmittelbar nach dem Austausch derselben einen energischeren Strom, als nach Eintritt des constanten Zustandes. Man ersieht daraus, wie die im Anhange dargelegte Theorie mit der Erfahrung übereinstimmt.

Aus den vorangehenden Ausdrücken kann man ohne grosse Schwierigkeit solche Formeln ableiten, die sich allen, wie immer gearteten Ketten anpassen.

Setzen wir eine Säule voraus, die aus n VOLTA'schen Elementen besteht, deren jedes einzelne die Spannung a und den Widerstand oder die reducierte Länge λ habe, ferner aus n'-Elementen von jenen, aus welchen die sogenannten Secundärsäulen bestehen, deren keine eine Spannung erzeugt, deren jede einzelne aber in die Kette einen Widerstand λ' einführt, so wird die Summe der sämmtlichen Spannungen dieser Kette na ein Werth, den wir bisher mit A ausgedrückt und die Summe der sämmtlichen Widerstände $n\lambda + n\lambda'$, ein Werth, den wir bisher durch L bezeichnet haben.

Ist nun die Flüssigkeit, die sich in jedem VOLTA'schen Element von der reducierten Länge λ befindet, zersetzbar und bezeichnet man mit S' die Grösse des Stromes, der aus den mit einander verbundenen Elementen $n + n'$ resultiert, so wird eine jede Zelle, genau so wie jene einzelne, die wir bisher betrachtet haben, in Folge der chemischen Zersetzung eine Spannung erzeugen, die der Wirkung der Säule im allgemeinen entgegengesetzt und deren Grösse $p\frac{s'}{\omega}$ ist, wo ω den Querschnitt eines VOLTA'schen Elementes und p einen Werth bedeutet, der von der Natur der Bestandtheile der Flüssigkeit, so wie auch von ihrem Verhalten gegenüber den einschliessenden Flächen abhängt, an denen sie sich ablagern. Ebenso wird auch jedes Element der Secundärsäule, falls die Flüssigkeit, die sich in derselben befindet, durch die Wirkung der Säule zersetzbar ist, eine Spannung erzeugen, die von jenem Zersetzungsprozesse herrührt und, mit einigen seltenen Ausnahmen, derjenigen der Säule entgegengesetzt ist. Die Grösse derselben ist $p'\frac{s'}{\omega'}$, wo ω' den Querschnitt der Flüssigkeit bezeichnet, die sich in einem Elemente der Secundärsäule befindet, p' eine Grösse, die von der Beschaffenheit der Bestandtheile abhängt, in welche die Flüssigkeit zerfällt, so wie vom Verhalten dieser Bestandtheile gegenüber den die Flüssigkeit einschliessenden Flächen.

Ist also der constante Zustand eingetreten, so wird die ursprüngliche Spannung na der Säule für die nElemente um folgende Grösse $np\frac{s'}{\omega'}$ und für die n'Secundärelemente um die

Grösse $n'p'\frac{s'}{\omega'}$ vermindert, so dass die Gleichung (4) für den constanten Zustand folgende Gestalt annimmt

$$S' = \frac{na - np\frac{S'}{\omega} - n'p'\frac{s'}{\omega'}}{n\lambda + n'\lambda'}, \tag{9}$$

woraus

$$S' = \frac{na}{n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right) + n'\left(\lambda' + \frac{p'}{\omega'}\right)}. \tag{10}$$

Der Ausdruck (10) der Grösse S' des Stromes, der bei den in Rede stehenden Säulen nach Eintritt des constanten Zustandes verbleibt, hat eine sichtbare Aehnlichkeit mit der anderen $\frac{nD}{n+n'}$, die MARIANINI aus seinen Versuchen mit diesen Säulen abgeleitet hat.

In dieser letzten Formel haben n und n' dieselbe Bedeutung wie in unserer Gleichung (10), D hingegen stellt nach MARIANINI einen mittleren Werth der Wirkung jedes einzelnen VOLTA'schen Elementes dar. Vorausgesetzt, dass bei den durch MARIANINI angestellten Experimenten, die Flüssigkeitsschichten in den VOLTA'schen und in den Secundärelementen gleich waren und dem zu Folge auch die Werthe $\lambda + \frac{p}{\omega}$ und $\lambda' + \frac{p'}{\omega'}$ gleich oder nahezu gleich sein mussten, so kann man die Gleichung (10) folgendermaassen schreiben

$$S' = \frac{n\frac{a}{\lambda + \frac{p}{\omega}}}{n + n'}$$

Dieser Ausdruck stimmt also vollständig mit demjenigen MARIANINI's überein, weil $\frac{a}{\lambda + \frac{p}{\omega}}$ die Wirkung eines einzigen VOLTA'schen Elementes enthält. Die Experimente MARIANINI's bestätigen das, was wir im Anhange gesagt haben und beweisen, dass, wenn es auch nicht genügend ausgearbeitet ist, es sich doch von der Natur nicht allzuweit entfernt. MARIANINI hat sich nicht viel mit dem Einflusse von ω und ω' auf den guten Erfolg der

Experimente beschäftigt. Man muss also darüber, sowie über die Factoren, die in den Grössen p und p' enthalten sind, neue Aufklärungen von der Erfahrung erwarten.

Wie man aus der Gleichung (9) ersieht, ist die Aenderung der ursprünglichen Summe der Spannungen der Säule, die die n VOLTA'schen Elemente dann verursachen, wenn die Säule sich im constanten Zustand befindet $e'np\frac{s'}{\omega}$ und ebenso die Veränderung, die die n'Secundärelemente hervorbringen $e'n'p'\frac{s'}{\omega'}$, so dass die Gesammtveränderung der Spannung $e'np\frac{s'}{\omega} + n'p'\frac{s'}{\omega'}$ ist. Dieselbe Gleichung (9) giebt auch zu erkennen, dass die Veränderung, welche die nVOLTA'schen Elemente in der ursprünglichen Stromgrösse $\frac{na}{n\lambda + n'\lambda'}$ hervorbringen, gleich ist $\frac{np\frac{s'}{\omega}}{n\lambda + n'\lambda'}$, sowie, dass ferner die Veränderung, welche die n'Secundärelemente erzeugen, gleich ist

$$e'\frac{n'p'\frac{S'}{\omega'}}{n\lambda + n'\lambda'},$$

und endlich, dass die Gesammtveränderung der Stromgrösse

$$e'\frac{np\frac{s'}{\omega} + n'p'\frac{s'}{\omega'}}{n\lambda + n'\lambda'}$$

ist.

Vergleichen wir einerseits die Veränderungen der Spannungen, sowie andererseits die Veränderungen der Stromgrössen unter sich, so werden wir finden, dass sie in demselben Verhältnisse stehen, wie

$$\frac{np}{\omega} : \frac{n'p'}{\omega'} : \left(\frac{np}{\omega} + \frac{n'p'}{\omega'}\right),$$

und dass eine jede einzelne Veränderung in beiden Fällen, d. h. sowohl mit der ursprünglichen Spannungssumme, als auch mit der ursprünglichen Stromgrösse dieselben Proportionalzahlen ergiebt, nämlich

$$\frac{np}{\omega}\frac{S'}{na}, \quad \frac{n'S'}{\omega'}\frac{p'}{na}, \quad \frac{np}{\omega} + \left(\frac{n'p'}{\omega'}\right)\frac{S'}{na},$$

welche folgende Gestalt annehmen, wenn man in denselben für $\frac{S'}{na}$ den Werth, der aus der Gleichung (10) folgt, substituiert.

$$\frac{\frac{np}{\omega}}{n\left(\lambda+\frac{p}{\omega}\right)+n'\left(\lambda'+\frac{p'}{\omega}\right)},$$

$$\frac{\frac{n'p'}{\omega'}}{n\left(\lambda+\frac{p}{\omega}\right)+n'\left(\lambda'+\frac{p'}{\omega'}\right)}$$

und

$$\frac{\frac{np}{\omega}+\frac{n'p'}{\omega'}}{n\left(\lambda+\frac{p}{\omega}\right)+n'\left(\lambda'+\frac{p'}{\omega'}\right)}.$$

Man ersieht daraus, dass die relativen Veränderungen der Summe der Spannungen und der Grösse des Stromes in einer veränderlichen Säule, die ihren constanten Zustand erreicht hat, denselben Gesetzen unterworfen sind.

Mit diesen Resultaten des Anhanges stimmen auch die Ergebnisse der sorgfältigen Experimente, die MARIANINI über die Veränderung der VOLTA'schen Säulen anstellte, überein. Die Versuche dieses ausgezeichneten Beobachters enthalten auch die electrometrischen Messungen der Wirkung des Stromes der Säule, die sich auf das Maximum der Abnahme beziehen, über welche Thatsachen wir im Anhange eingehend gesprochen haben; ja die Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung geht in diesem Punkte so weit, dass wir uns bei diesem Gegenstande nicht länger aufhalten werden.

Setzen wir in der Gleichung (10) $n' = 1$, so wird

$$S' = \frac{na}{n\left(\lambda+\frac{p}{\omega}\right)+\lambda'+\frac{p'}{\omega'}}.$$

S' bedeutet nun die Grösse des Stromes, die nach der Fluctuation der Säule in jenem besonderen Falle übrig bleibt, wenn man der VOLTA'schen Säule statt einer ganzen Secundärsäule eine einzige Schicht einer chemisch veränderlichen Flüssigkeit hinzufügt. Macht

man nun in derselben Gleichung $n = 1$ und setzt man für S' S, so wird man haben

$$S = \frac{na}{n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right)}.$$

S wird also die Fluctuation zu erkennen geben, wenn die Säule metallisch abgeschlossen ist. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\frac{S'}{S} = \frac{n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right)}{n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right) + \left(\lambda' + \frac{p'}{\omega'}\right)}$$

oder

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda' + \frac{p'}{\omega'}}{n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right)}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass die Grösse des Stromes, die nach Einfügung der flüssigen Schichte in die Säule entsteht, umsoweniger von jenem Strome abweicht, den die metallisch abgeschlossene Säule hervorbringt, je kleiner $e'\lambda' + \frac{p'}{\omega'}$ im Vergleich zu $n\left(\lambda + \frac{p}{\omega}\right)$ ist.

Der relative Unterschied der Grösse beider Ströme hängt vor allem von der Anzahl n der Elemente der Säule ab, mit deren Zunahme derselbe sehr rasch abnimmt; aus der obigen Gleichung ergiebt sich ferner, dass jener relative Unterschied in demselben Verhältnisse wächst, in dem man den Querschnitt der eingeführten Flüssigkeit verkleinert, und dass die Natur der Flüssigkeit, entsprechend der Spannungskraft ihrer beiden Bestandtheile, so wie andere Umstände denselben ebenfalls beeinflussen. Diese Eigenschaft der galvanischen Kette war der Ursprung dessen, was verschiedene Forscher mit dem Namen Widerstand des Ueberganges bezeichneten, demzufolge die Electricität bei ihrem Uebergange von einem Körper zum anderen in der einen Richtung einen grösseren Widerstand findet, als in der entgegengesetzten, und dass dieser Uebergang um so leichter stattfindet, je mehr Ueber-

gänge sie schon bewerkstelligt hat. Es scheint indessen, dass dieser Uebergangswiderstand in der Natur nicht allgemein besteht, und folgt man der Contacttheorie, so kann man denselben ganz gut bei Seite lassen.

Es ist also bewiesen, dass die Betrachtungen unseres Anhanges, die wir zu dem Zwecke anstellten, um mit den VOLTA-schen Ideen die Wirkungsweise in sich selbst veränderlicher Säulen zu erklären, zu Ergebnissen geführt haben, die vollständig mit den zahlreichen Experimenten der ausgezeichnetsten Physiker übereinstimmen. Daraus folgt die Möglichkeit, aus der blossen Kenntniss der Spannungen und der Leitungsfähigkeit alles das zu erkennen, was man bisher Unerwartetes und Neues in der galvanischen Kette gefunden hat, ohne dass es nöthig wäre, zu neuen Hypothesen Zuflucht zu nehmen und ohne den Körpern Eigenschaften zuzuschreiben, die, wir wagen es zu sagen, wenig natürlich sind. Es erübrigt nur noch darüber zu sprechen, was in dem Anhange in seiner gegenwärtigen Gestalt nicht enthalten ist.

Dieser Anhang, zu einer Zeit geschrieben, da noch fast alle Erfahrungsdaten, die nöthig gewesen wären, fehlten, ist weit entfernt alle Fälle des galvanischen Phänomens zu umfassen und handelt nur von jenen, die bei den Experimenten am häufigsten hervortreten und die das *Wesen* der galvanischen Wirkung am klarsten darthun. So wurden z. B. in demselben jene Fälle nicht berücksichtigt, in denen die aus der Flüssigkeit ausscheidenden Bestandtheile mit den anliegenden Theilen der Kette Verbindungen eingehen, sowie jene Fälle, in denen eine Aenderung der Leitungsfähigkeit der aus der Kette ausgeschiedenen Bestandtheile im Vergleiche zu jener, die sie in ihrer Zusammensetzung besassen, eintreten kann.

Es wurde auch eine neue Classe von galvanischen Phänomenen entdeckt, deren Ursache eine starke Aenderung des Widerstandes gegen die Leitungsfähigkeit gewisser Bestandttheile ist, welche Erscheinungen also aus den obigen Gleichungen nicht abgeleitet werden können; wir sprechen von den einpoligen Leitern.

Zu dem Zwecke, um zu zeigen, dass die im Anhange ent-

wickelten Principien auch dieses Phänomen erklären, habe ich auf experimentellem Wege nachzuweisen versucht, dass die eigenthümlichen Eigenschaften der einpoligen Leiter in Wirklichkeit von einer Umbildung der Kette herrühren, der zu Folge gewisse Zersetzungsproducte, die nur eine sehr geringe Leitungsfähigkeit besitzen, sich an bestimmten Stellen der Kette vereinigen. Die Experimente, die sich darauf beziehen, habe ich in SCHWEIGGER's Jahrbuch für Chemie und Physik, 1830, Band II*, Seite 385, beschrieben, sie erstrecken sich vor allem auf die unipolaren Eigenschaften der Seife und beweisen, dass die Ursache jener Erscheinungen nicht ihren Ursprung in der Seife selbst haben, sondern dass sie durch den Strom erzeugt werden, und dass dem zu Folge das ungleiche Leitungsvermögen nicht aus einer Fähigkeit der Seife für beide Electricitäten, noch von einem eigenthümlichen Widerstande beim Uebergange von der Seife zum Metalle herrührt.

PRECHTL's Experimente, aus denen hervorgeht, dass sich auf dem Ende des Seifenstückes Pottasche abscheidet, die sich gegen den negativen Pol der Säule wendet, lassen, mit meinen Erfahrungen zusammengehalten, keinen Zweifel darüber, dass der ungewöhnlich energische Widerstand gegen die Leitungsfähigkeit nicht von der fetten Säure, die sich am Ende des Seifenstückes absondert und gegen den positiven Pol zuwendet, herrührt. Die concentrierte Schwefelsäure bietet einen einpoligen Leiter dar, deren Eigenschaften noch mannigfaltiger sind, als die der Seife.

Kann man also die einpoligen Leiter der VOLTA'schen Theorie nicht entgegenstellen, so giebt es dennoch andere Versuche, auf welche dieselbe nicht anwendbar scheint.

Bevor wir darüber sprechen, wollen wir einige vorläufige Betrachtungen vorausschicken.

Vor allem müssen wir bemerken, dass VOLTA auch den nicht metallischen Körpern die Fähigkeit zuschrieb, mit andern Körpern Spannungen zu erzeugen, soweit sich dies experimentell nachweisen lässt; dies kann ihm um so weniger abgeleugnet werden, als er, allen Anderen voran, auf bloss experimentellem Wege

* In der fortlaufenden Nummerierung des Journals für Chemie und Physik trägt der Band die Zahl LIX.

diese Fähigkeit bei vielen nicht metallischen, festen und flüssigen Körpern nachgewiesen hat.

Nichtsdestoweniger behaupten viele Physiker, dass, wenn die Anhänger VOLTA's die Theorie, der sie folgen, intakt erhalten wollen, sie nur die Spannungen zwischen Metallen annehmen dürfen; mich dünkt, der Umstand, dass VOLTA in der Erklärung seiner Säule die Spannungen zwischen anderen Körpern nicht erwähnt, genüge nicht, diese ihre Behauptung zu erhärten, da in jener Säule, so wie man auch heute noch annimmt, die Spannung der Metalle diejenige der anderen Körper weit überschreitet, sodass sich VOLTA bewogen fühlen konnte, die letzteren zu vernachlässigen, da durch diese Annahme seine Erklärung sehr ververeinfacht wurde.

Es deckt sich also mit den Ideen VOLTA's, die alle mit der Natur übereinstimmen, dass nicht nur viele nicht metallische Körper eine electromotorische Kraft besitzen, sondern dass es auch solche giebt, deren electromotorische Kraft die der Metalle übersteigt.

Ich habe schon seit einigen Jahren versucht (SCHWEIGGER's Annalen, 1830, Bd. III, S. 32) die Existenz dieser ungewöhnlich energischen electromotorischen Kraft zwischen Metallen und Nichtmetallen nachzuweisen, doch warte ich mit der Bekanntmachung meiner Versuche, bis sie einen höheren Grad der Vollständigkeit erreicht haben werden.

Die Contacttheorie muss also das Princip, dass ausser den Metallen auch noch andere Körper geeignet sind, Spannungen minderer Grösse zu erzeugen, wie dies VOLTA selbst festgestellt hat, unberührt aufrecht erhalten. Dieses Princip ist unabhängig von der neuerdings aufgeworfenen Frage, ob die Ursache des galvanischen Phänomens in den Spannungen oder in der chemischen Wirkung zu suchen sei.

Es ist eine Beobachtung, die seit langer Zeit gemacht wurde, dass dort, wo die Metallscheiben durch die Flüssigkeit der Kette nicht angegriffen werden, sich entweder gar keine oder doch nur eine sehr schwache galvanische Wirkung zeigt. Diese Beobachtung, die für die chemische Theorie von ihren Anhängern als besonders günstig betrachtet wird, lässt sich auch mit der unsern

ganz gut vereinen; um sich davon zu überzeugen, hat man nur den allgemeinen Gang der Wirkungsweise der Säule zu betrachten.

Setzen wir voraus, dass sich eine Salzlösung zwischen zwei Metallplatten befindet, und zwar derart zusammengestellt, dass sie eine Kette bilden, so wird sich die Salzlösung zu zersetzen beginnen und die Basis des Salzes von der negativen Metallplatte, die Säure von der positiven angezogen werden; gehen diese Bestandtheile mit den Metallen keine Verbindung ein, so werden sie an denselben zurückgehalten. Gemäss den Erfahrungen der berühmtesten Physiker wird die Säure an dem Metalle, das sie nicht angreift, negativ und unter gleichen Umständen das Alkali positiv.

Durch diese polare Vertheilung entstehen neue Spannungen, die im entgegengesetzten Sinne der in der Kette ursprünglich vorhandenen wirken, also die Wirkung ihres Stromes abschwächen. Dies ist die Ursache der Fluctuation der Säule, und im Anhange haben wir uns eben die Aufgabe gestellt, die Gesetze dieser polaren Vertheilung zu finden.

Der Verlauf des Prozesses ist genau derselbe, wenn man an Stelle einer Salzlösung eine alkalische Flüssigkeit oder eine verdünnte Säure anwendet. Das Wasser lagert sich dann an der negativen Seite ab und erregt seiner Natur nach keine neue Spannung, ändert also in keiner Weise die Wirkungsart des Stromes der Kette; die Säure lagert sich am positiven Metalle ab und erzeugt mit diesem, falls es dasselbe nicht angreift, eine Spannung, durch die die Wirkung der Kette abgeschwächt wird. Umgekehrt lagert sich in der alkalischen Lösung das Wasser gegen das positive Metall ab und beeinflusst, als nicht electromotorischer Körper, die Wirkung der Kette in keiner Weise, während das Oxyd gegen das negative Metall hingeführt wird und, falls es mit diesem keine Verbindung eingeht, eine Spannung erzeugt, die derjenigen, die ursprünglich in der Kette bestand, entgegengesetzt ist, die Wirkung derselben also abschwächt. Der Grad dieser Abschwächung hängt von der Höhe ab, die ihrer Natur nach die Spannungen erreichen können, die den ursprünglichen in der Kette bestandenen entgegenwirken, so wie von dem Punkte, bis zu dem die Zersetzung fortschreiten kann, bevor die abschwächende Kraft diejenige, die zur weiteren Trennung der

Bestandtheile benöthigt wird, aufhebt, indem nach Eintritt dieses Gleichgewichtes die weiteren Veränderungen in der Kette nothwendigerweise aufhören müssen.

Es seien z. B. die durch die Zersetzung erzeugten Spannungen derart, dass ihr Gesammtwerth die Hälfte der ursprünglich in der Kette existierenden wirksamen Spannungen nicht überschreite, so wird die Kraft der Kette nie unter die Hälfte ihres ursprünglichen Werthes sinken können. Sind jedoch die von der chemischen Zersetzung herrührenden Spannungen ihrer Natur nach derart, dass ihr Gesammtwerth die Summe der ursprünglichen Spannungen weit überschreitet, so wird die fernere Entstehung jener Spannungen dann aufhören, wenn sie den Strom der Kette so weit abgeschwächt haben, dass er keine andere Wirkung mehr zu Wege bringt, als dass er die getrennten Bestandtheile daran verhindert, sich wieder zu verbinden.

Es folgt aus diesen Betrachtungen, dass die Schwächung der Kette geringer sein muss, wenn eines der Zersetzungsproducte mit dem Metalle, bei dem sich dasselbe befindet, eine Verbindung eingeht; seine electromotorische Kraft wird dann entweder ganz oder doch grossentheils vernichtet. Daraus erklärt sich die constante Wirkung der neuerdings durch DANIEL erfundenen und nach ihm benannten galvanischen Batterie, sowie die bedeutende Kraft derjenigen GROVE's; denn in jener kann das Kupfer mit dem Kupfer keinerlei Spannung erregen, während in der letztern zweifellos die salpetrige Säure, die an dem Platinpol aus der Salpetersäure in Folge ihrer leichten Zersetzbarkeit ausgeschieden wird, mit dem Platin eine Spannung erzeugt, welche die ursprüngliche Wirkung der Säule noch verstärkt und in beiden Säulen das in der Säure aufgelöste Zink durch die Thonzelle verhindert, sich am negativen Pol abzulagern, die Wirkung des Elementes nicht nennenswerth abzuschwächen vermag.

Obwohl die schwache Wirkung, die meistens dann eintritt, wenn keiner der zwei *Erreger* sich mit der Flüssigkeit chemisch verbindet, durch jede der beiden Hypothesen erklärt werden kann, so besteht doch ein grosser Unterschied darinnen, wie man sich den Gang der Sache vorstellt, wenn man von der Contact- oder wenn man von der chemischen Theorie ausgeht.

Im ersten Falle betrachtet man die schwache Wirkung als den Rest einer stärkeren mit Beendigung der Fluctuation der Säule schon abgeschlossenen, während man im zweiten Falle annimmt, dass die Wirkung aus Mangel an Ursache gar nicht eingetreten sei. Hier könnte man voraussetzen, es sei möglich den Beweis zu erbringen, dass die von den Anhängern VOLTA's angenommene Wirkung thatsächlich bestehe. Dem stellt sich jedoch in vielen Fällen die Nothwendigkeit entgegen, die zwei durch die gut leitende Flüssigkeit nicht angreifbaren Metalle so zu wählen, dass sie in der electrischen Spannungsreihe nicht weit von einander abstehen, in welchem Falle die ursprüngliche Wirkung nicht sehr kräftig ist, von den Chemikern also einer leichten Oxydation oder der unvermeidlichen Verunreinigung der Metallscheiben zugeschrieben wird. Man kann gleichwohl den Versuch machen, ohne die Metallscheiben aus der Flüssigkeit herauszunehmen oder sie darin zu bewegen, indem man nach Eintritt der schwachen Wirkung die Kette öffnet und nach wenigen Minuten wieder schliesst; in diesem Falle zeigt sich stets die ursprünglich kräftigere Wirkung. Wie auch immer die Sache vor sich gehen mag, so ist es gewiss, dass sie mittelst der Contacttheorie sehr gut erklärt werden kann.

Dieser Theorie sind ebenso jene Erscheinungen günstig, die sich bei den DANIEL'schen und GROVE'schen Elementen zeigen, die kaum etwas von ihrer Kraft einbüssen, wenn man in ihnen die Säure durch eine gesättigte Zinklösung ersetzt, während der chemische Prozess fast vollständig aufhört. Die Erklärung des grossen VOLTA trifft auch dann zu, wenn man im GROVE'schen Elemente auf der Seite des Zinkes eine Zinklösung giebt und das Platin durch Kupfer ersetzt; es findet dann auf dieser Seite ein energischer chemischer Prozess statt, nichtsdestoweniger bleibt die Wirkung der Säule dieselbe und, was ihre Energie anbelangt, so nimmt sie nicht plötzlich ab, sondern wird vielmehr mit der Zeit immer bedeutender. Die chemische Theorie hat wohl als Auskunftsmittel die Electricité perçue und die Electricité produite gefunden, wird sich aber derselben nicht lange bedienen können.

Die mit einem einzigen Metalle hergestellten Säulen bilden jedenfalls die schwächste Seite der VOLTA'schen Theorie und

zwar wegen der geringen sichern Kenntnisse, die man über die Spannungen hat, welche die Flüssigkeiten unter sich und mit den Metallen, die sie angreifen, erregen, sowie über die Aenderungen, welche die Spannungen erleiden, wenn die Flüssigkeiten unter sich und mit den Metallen Verbindungen eingehen. Wir brauchen uns jedoch darum noch nicht besiegt zu erklären, denn bietet unsere Theorie schon einige Schwierigkeiten, so bietet die chemische dafür deren viele. Ich habe schon früherhin einige Versuche angestellt und bekannt gegeben, die zu beweisen scheinen, dass VOLTA auch in dieser Hinsicht von sichern Principien ausgegangen sei, doch sind dieselben nicht zusammenhängend und vollständig genug, um das, was uns mangelt, zu ersetzen.

Es ist mir indessen gelungen, ein Instrument zu construieren, dem ich den Namen Spannungsmesser gegeben habe und mit dessen Hülfe man die Spannungen mit einer solchen Sicherheit und Genauigkeit wird finden können, dass dadurch dem gegenwärtigen Mangel abgeholfen wird; wichtigere Arbeiten und Mangel an Zeit verhinderten mich bisher, mich weiter damit zu beschäftigen.

Endlich bemerken wir, dass von Einigen der VOLTA'schen Theorie entgegengehalten wurde, es sei unwahrscheinlich, dass eine so schwache Ursache wie die Spannung, die kaum wahrnehmbar sei, die mächtige Erscheinung des electrischen Stromes hervorzubringen vermöge.

Diesem Einwurfe ist, falls derselbe ernstlich erhoben wurde, zu entgegnen, dass VOLTA selbst die Spannung nicht als die Grundursache des Phänomens ansah, sondern als eine der Aeusserungen jener Ursache, und dass er auch zugeben konnte, die Spannung sei nur ein Differentialelement der primitiven galvanischen Kraft, welche sie erzeugt, ja er konnte sogar noch weiter gehen und behaupten, dass er die Spannung als ein ferneres Product derselben Kraft betrachte, die den chemischen Prozess zu Stande bringt und zwar konnte er dies behaupten, ohne irgend etwas von seinem Terrain zu verlieren.

Wenn wir nun zu jenen besonderen Erscheinungen übergehen, die gewissermaassen Ausnahmen von der Regel bilden und die so zuversichtlich der Contacthypothese mit dem Glauben, dieselbe dadurch zu vernichten, entgegengehalten wurden, so be-

merke ich, dass ich in meinem Werke „Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet“ sie darum vernachlässigt habe, weil ich annahm und heute noch annehme, dass, wenn man diese speciellen Beobachtungen von Thatsachen, die von der Regel abweichen, einer genaueren Prüfung unterzöge, man, wenn auch nicht in allen, so doch in den meisten Fällen dazu gelangen würde, über das Verhalten der zu den Experimenten verwendeten Körper neue Entdeckungen zu machen, aber gewiss nicht dazu, die mit Genauigkeit und Vorsicht festgestellten Gesetze umzuändern oder gar umzustossen und weil ich überzeugt bin, dass die Theoretiker, die ihre hauptsächliche Aufmerksamkeit auf diese Sache richten, ihr Ziel verfehlen. Jene besonderen Phänomene haben dennoch von Zeit zu Zeit meine Aufmerksamkeit auf sich gelenkt und ich suchte mir zu erklären, warum Kupfer und Zink in der concentrierten Schwefelsäure, Platin und Eisen in einer Lösung von schwefelsaurem Natron oder auch in einer alkalischen Lösung und in concentrierter Salpetersäure keinen Strom erzeugen, während in allen diesen Fällen energische Spannungen auftreten und viele gute Leiter verwendet werden; insbesondere war ich überrascht, als ich die Ueberzeugung gewann, dass in vielen dieser Fälle die erste Wirkung nicht bedeutend sei, während sie immerhin fühlbar ist, wenn auch kein chemischer Prozess die Wirkung der Säule aufrecht erhält und sie gerade hier eine grössere Energie hätte aufweisen sollen. Die Thatsachen scheinen so sehr der Theorie VOLTA's zu widersprechen, dass diejenigen, die ihretwegen dieselbe verliessen, wahrlich zu entschuldigen sind.

Lange nachdem ich meine oben angedeutete Arbeit veröffentlicht hatte, kehrte ich jedoch zur Prüfung jener besonderen Erscheinungen zurück, mit der Absicht, sie einer kritischen Untersuchung zu unterziehen und zu versuchen, sie zu erklären (Poggendorf's Annalen 1844). Es gelang mir wirklich, die Ueberzeugung zu gewinnen, dass mich mein Gefühl nicht betrogen hatte, indem ich fand, dass jene Körper, die zum Versuche verwendet werden, sich in einer ganz eigenthümlichen, vorher unbekannten Weise verhielten und dass die bis zur Vernichtung gehende Schwächung des Stromes diesem Verhalten zuzuschreiben sei. Die folgenden Bemerkungen verdienen generalisiert zu werden.

1. Taucht man eine Zink- oder Kupferscheibe in concentrierte Schwefelsäure ein, so bedecken sich diese Metalle mit einer Schichte einer Substanz, die ihnen auch nach dem Trocknen das Aussehen verleiht, als wären sie, besonders das Kupfer, mit einem sehr schönen Firnis überzogen. Diese Schichte ist weder dem blossen noch dem bewaffneten Auge sichtbar, nichtsdestoweniger kann die sehr geringe Menge von dem Metalle entfernt und als ein Metalloxyd erkannt werden. Diese Metalloxydschichte ist ein so schlechter Leiter, dass, wenn man die beiden Enden einer offenen Säule mit Quecksilbernäpfchen versieht und dieselben durch einen Bogen z. B. eines Kupferdrahtes verbindet, dessen beide Enden in concentrierte Schwefelsäure getaucht und dann abgetrocknet wurden, keine Spur eines Stromes bemerkbar wird. Man muss jedoch darauf achten, dass die beiden Enden des Bogens nicht weiter in das Quecksilber der Näpfchen eingetaucht werden, als sie es in der concentrierten Schwefelsäure waren. Ritzt man mit dem Federmesser den im Quecksilber befindlichen Kupferdraht, so sieht man sogleich einen starken Strom erscheinen.

Diese Beobachtung erklärt von selbst, weshalb man in einer Kette von Zink, Kupfer und concentrierter Schwefelsäure keinen Strom erhält.

2. Taucht man eine Platte von blankem Eisen in eine Schwefelkaliumlösung, so überzieht sich dieselbe mit einer unendlich dünnen Schichte von Schwefeleisen, das dem Eisen weder den Glanz noch die Farbe nimmt, und von dem man nur eine äusserst geringe Menge mit Hilfe eines Messers abgesondert erhalten kann. Dieses Salz wird durch den Magnet angezogen und bringt man es unter dem Microscope mit einem Tropfen Vitriol in Berührung, so bleibt es regungslos und zeigt keinerlei Veränderung, während Eisenfeilspähne, die von derselben Platte herrühren, mit einem Tropfen desselben Vitriols in Berührung gebracht, sich mit einer Menge Luftblasen bedecken, unter denen sie verschwinden.

Diese Beobachtungen machen es wahrscheinlich, dass sich das Eisen in einer Schwefelkaliumlösung mit einer Schichte von Schwefeleisen überziehe und diese Wahrscheinlichkeit wird durch den Umstand zur Gewissheit erhoben, dass Schwefelkies, mit Platin und irgend einer Flüssigkeit zu einer galvanischen Kette

vereinigt, sich genau so verhält, wie das Eisen, das, nachdem es in concentrierte Schwefelsäure eingetaucht war, mit derselben Flüssigkeit und Platin zu einer Kette verbunden wird; diese Gleichartigkeit der Wirkung beobachtet man auch einige Zeit bei den Flüssigkeiten, die das Schwefeleisen zersetzen. Da jedoch die Schwefeleisenschichte sehr dünn ist, so wird es angezeigt sein, ihre Existenz noch überzeugender darzuthun. Man erkennt das Vorhandensein dieser Schichte folgenderweise. 1. Wenn man das eingetauchte, abgewaschene und abgetrocknete Ende des Eisens erhitzt, so entwickelt dasselbe einen Schwefelgeruch. 2. Oxydiert sich jenes Ende rascher an der Luft, als die andern nicht eingetauchten Theile und eine Silberscheibe, die in innigen Contact mit jenem Ende gebracht und mit ihm zugleich erwärmt wird, nimmt eine braune Färbung an. 3. Taucht man eine Fläche von 8—10 Quadratzoll ein, setzt sie 10 Stunden der feuchten Luft aus, übergiesst sie mit Salpetersäure und prüft sie mit essigsaurem oder salpetersaurem Baryt, so ergiebt sich ein Niederschlag von schwefelsaurem Baryt. 4. Reibt man mit grosser Kraft längere Zeit hindurch zwei Stücke blankes Eisen in einer Lösung von Schwefelkalium aneinander, so wird im unteren Theile der Flüssigkeit in einigen Tagen eine dunklere Färbung bemerkbar und nach 6—8 Wochen bildet sich am Grunde des Gefässes ein schön grün gefärbter Bodensatz von Schwefeleisen von der Höhe einer Linie.

Endlich beweist man einfach und überzeugend die Existenz jener Schichte von Schwefeleisen, wenn man das vorher sorgfältig gereinigte Eisenstück, nachdem man es eingetaucht, abgewaschen und abgetrocknet hat, in eine Mischung von 8 Tropfen einer concentrierten Lösung von sehr klarem salpetersaurem Quecksilberoxydul und einer Unze Wasser steckt, in welchem Falle nach einigen Secunden der in der Schwefelkaliumlösung eingetauchte Theil des Eisens erst eine gelbliche, dann eine bläuliche Färbung annimmt. Auch jener Theil des Eisens, der in die Schwefelkaliumlösung nicht eingetaucht war, zersetzt das salpetersaure Quecksilberoxydul, allein derselbe überzieht sich mit einer grauen Schichte, die als (metallisches) Quecksilber erkannt wird. Aus diesen Versuchen geht klar die Art hervor, wie sich das

Eisen, wenn es in Schwefelkaliumlösung gebracht wird, der Electricität gegenüber verhält.

3. Man tauche ein Eisenstück in eine concentrierte Salpetersäure oder in salpetrige Salpetersäure und trockne es, nachdem man es aus der Flüssigkeit herausgenommen hat, sofort mit Filtrierpapier ab, so wird man, und das viel leichter als im vorhergehenden Falle, wahrnehmen, dass das Eisen mit einer Schichte bedeckt ist, die ihm seinen Glanz lässt, dessen Farbe jedoch ein wenig mehr in das Weisse spielt. — Man kann ohne viel Schwierigkeit von der eingetaucht gewesenen Oberfläche des Eisens ein grünlichweisses sandiges Pulver ablösen, das nach wenigen Augenblicken eine bräunlich-gelbliche Färbung annimmt.

Giesst man einige Tropfen Wasser auf den in der salpetrigen Salpetersäure eingetauchten und dann abgetrockneten Theil der Eisenplatte, so entwickeln sich eine Menge von kleinen Luftbläschen.

Wenn man das eingetauchte Eisenstück schnell und ohne viel Bewegung in eine verdünnte Ammoniakflüssigkeit taucht, so überzieht sich der ganze Theil, der früher in die Säure eingetaucht war, mit einer grünen Schichte von Eisenoxydulhydrat, die sich von demselben langsam ablöst. Wäscht man das Eisenstück unmittelbar nach dem Eintauchen mit Wasser ab, so verhält es sich gegenüber den Reagenzien genau so, wie wenn es durch irgend eine andere Säure oxydiert worden wäre. Reibt man mehrere Eisenstücke, nachdem sie in salpetrige Salpetersäure eingetaucht und mit einem Leinenlappen abgetrocknet wurden, in gut rectificiertem Terpentinöl aneinander, so zeigt sich nach wenigen Tagen ein Bodensatz eines Eisenoxydsalzes. Wenn auch die soeben angeführten Versuche die Entstehung jener Schichte, die sich auf dem in salpetrige Salpetersäure eingetauchten Eisen bildet, nicht vollständig darthun, so mögen sie doch ebenso wie die vorhergehenden dazu dienen, zu zeigen, mit welchem Fleisse solche Beobachtungen anzustellen sind, bevor man sie gegen eine wohlbegründete und festgestellte Theorie in das Feld führen kann.

Ein Versuch meines Freundes LEYKAUF, der mir bei meinen Versuchen so sehr behülflich war, erregt in mir den Glauben, dass sich das auf dem Eisen eines Elementes bildende Oxyd in

ganz eigentümlicher Weise verhalte, und ich bin geneigt anzunehmen, das Eisen verhalte sich gleicherweise auch in der concentrierten Salpetersäure.

Zum Schlusse dieser Ergänzung unseres Anhanges bemerken wir, dass eine Veränderung der Spannung oder des Widerstandes irgend eines Theiles einer Säule Aenderungen in den Erscheinungen verursachen kann und dass diese Aenderungen auch durch die VOLTA'sche Theorie erklärt werden können. Selbst die Untersuchungen FECHNER's über die sogenannten galvanischen Transformationen sind der Theorie des berühmten Italieners günstig und dennoch wurden sie häufig derselben, als ihr widersprechend, entgegen gehalten.

Ich glaube indessen, dass eine experimentelle Untersuchung des galvanischen Prozesses der Chemie grössere Vortheile bringen dürfte, als der Physik und dass sie uns mehr als jede andere über die specifischen Eigenschaften der Körper aufklären werde.

12.

UEBER DEN RANG DER DETERMINANTE BEI INDUCIERTEN LINEAREN SUBSTITUTIONEN.

Von JOSEF KÜRSCHÁK, c. M.

Vorgelegt der III. Klasse der Akademie in der Sitzung vom 22. Januar 1900.

1. Eine Determinante ist vom *m-ten Range*, wenn sie wenigstens eine nicht verschwindende Subdeterminante m-ter Ordnung besitzt aber keine solche von $(m+1)$-ter Ordnung. Ist die Determinante selbst von Null verschieden, so ist ihr Rang gleich ihrer Ordnung.

Hier soll bewiesen werden, dass, *wenn die Determinante der linearen Transformation*

$$x_i = \alpha_{i_1} y_1 + \alpha_{i_2} y_2 + \cdots + \alpha_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (S)$$

vom m-ten Range ist, ihre inducierte Substitution n-ten Grades dann eine Determinante vom Range

$$\varrho = \binom{m+n-1}{n}$$

hat.

Bei dem Beweise benütze ich dieselben Bezeichnungen, wie Herr G. RADOS in seiner Abhandlung über „Inducierte lineare Substitutionen".*

2. Die Determinante $|J_n(S)|$ der inducierten Substitution $J_n(S)$ ist bekanntlich gleich einer Potenz der Determinante $|S|$ von S.**

---

* Diese Berichte, 16. Band.

** Diesen Satz hat für specielle Fälle zuerst Herr AUGUST SCHOLTZ bewiesen in den „Müegyetemi Lapok" (Polytechnische Blätter) 1877—78, und bemerkte auch, dass sein Beweis sich verallgemeinern lässt. Vgl. auch RADOS (a. a. O.) und HURWITZ, Zur Invariantentheorie (Math. Annalen Bd. 45.)

Also wenn $m = k$, d. h. wenn $|S|$ von Null verschieden ist, so hat auch $|J_n(S)|$ einen von Null verschiedenen Werth; mit anderen Worten: der Rang von $|J_n(S)|$ ist dann gleich der Ordnungszahl:

$$\nu = \binom{n+k-1}{n}.$$

3. Es sei nun $m < k$. Wir können und wollen voraussetzen, dass gerade

$$|\alpha_{ij}|_{(i,j=1,2,\ldots,m)}$$

von Null verschieden sei.

Es bedeute dann T folgende Substitution

$$y_j = A_{1j}z_1 + \cdots + A_{mj}z_m + B_{m+1\,j}z_{m+1} + \cdots + B_{kj}z_k \quad (j=1,2,\ldots,k)$$

wo

$$A_{1j}, \ldots, A_{mj}, B_{m+1\,j}, \ldots, B_{kj}$$

die zur j-ten Säule gehörigen Subdeterminanten von

$$\tau = |\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj}\ \beta_{m+1\,j}, \ldots, \beta_{kj}|_{(j=1,2,\ldots,k)}$$

sind. Hier können die β beliebig gewählt werden, mit der einzigen Bedingung, dass $\tau = 1$ sei.

Die Substitution ST ist dann

$$x_1 = z_1 \quad x_2 = z_2, \ldots, x_m = z_m \quad x_{m+1} = 0, \ldots, x_k = 0.$$

Nun lässt sich unmittelbar erkennen, dass die Determinante $|J_n(ST)|$ vom Range

$$\varrho = \binom{m+n-1}{n}$$

ist. Man hat aber stets

$$J_n(ST) = J_n(T)\,J_n(S),$$

d. h. die Determinante $|J_n(ST)|$ ist die componierte von $|J_n(S)|$ und von der Determinante $|J_n(T)|$, deren Werth gleich 1 ist. Folglich müssen $|J_n(S)|$ und $|J_n(ST)|$ denselben Rang haben.

13.

NOTES SUR LES SUBSTITUTIONS ORTHOGONALES.

Par GUSTAVE RADOS.

Dans mon travail „Sur la théorie des déterminants“ paru dans les Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 1886, j'ai posé et démontré (pour la première fois, à ma connaissance) un théorème de déterminants qui a été, depuis, l'object de diverses applications et de nouvelles démonstrations.*

Ce théorème, dans une conception un peu modifiée, est le suivant:

---

* Ainsi M. K. Hensel, l'éminent mathématicien berlinois, applique ce théorème dans son travail „Ueber Gattungen, welche durch Composition aus zwei anderen Gattungen entstehen“ publié en 1889 dans le Journal de Crelle. Ne connaissant pas mon travail, il s'exprime ainsi sur le théorème en question: »Nach einem Satze nämlich, den meines Wissens zuerst Herr Kronecker in seinen algebraischen Vorlesungen aufgestellt und bewiesen hat, und von dem ich einen anderen elementaren Beweis gegeben habe, besteht nämlich die folgende wichtige Determinantenrelation:

$$|\xi_{hi}\eta_{ik}| = |\xi_{hi}|^n |\eta_{ik}|^n«.$$

(Crelle-Journal, t. 105, p. 337.) Eh bien, cette relation est justement mon théorème. Et je n'en trouve aucune trace dans le cahier rédigé d'après les cours de Kronecker qu'il a revu lui-même et que je peux donc considérer comme authentique.

C'est encore M. Hensel qui a donné une nouvelle démonstration du même théorème dans son travail „Ueber die Darstellung der Determinante eines Systems, welches aus zwei anderen componiert ist“, où il mentionne déjà mon travail sur le théorème.

M. Hurwitz donne une nouvelle démonstration du théorème dans son étude „Zur Invariantentheorie“ (Math. Annalen t. 45, p. 389). A la fin M. Cyparissos-Stéphanos dans son beau travail „Sur un extension du calcul des subst. linéaires“. Journal de Math. F. 19.

En multipliant par ordre les équations des substitutions linéaires

$$x_i = a_{i1}\,x_1' + a_{i2}\,x_2' + \cdots + a_{im}\,x_m' \qquad (A)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$y_j = b_{j1}\,y_1' + b_{j2}\,y_2' + \cdots + b_{jn}\,y_n' \qquad (B)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations ainsi obtenues:

$$\begin{aligned} x_i y_j = {} & a_{i1}b_{j1}x_1'y_1' + a_{i2}b_{j1}x_2'y_1' + \cdots + a_{im}b_{j1}x_m y_1' + \\ & + a_{i1}b_{j2}x_1'y_2' + a_{i2}b_{j2}x_2'y_2' + \cdots + a_{im}b_{j2}x_m y_2' + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{i1}b_{jn}x_1'y_n' + a_{i2}b_{jn}x_2'y_n' + \cdots + a_{im}b_{jn}x_m y_n' \end{aligned}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

établissent une substitution linéaire entre les produits

$$x_i y_j$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$x_i' y_j'$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

J'appellerai cette substitution linéaire relative à des indéterminés du nombre mn produit-substitutions* et je la désignerai par $(A \times B)$.

Mon travail publié en 1886 a pour objet le déterminant de cette substitution et exprime le fait que le déterminant de la produit-substitution

$$P = A \times B$$

est

$$|P| = |A \times B| = |A|^n\,|B|^m$$

où $|A|$, $|B|$, $|P|$ signifient les déterminants des substitutions linéaires (A), (B) et (P).

Le présent travail a pour but de communiquer une remarque relative aux produit-substitutions orthogonales, qui s'exprime par ce théorème:

Les produit-substitutions orthogonales sont elles-mêmes aussi orthogonales.

---

* Conformément à la terminologie déjà appliquée par M. Hurwitz, Math. Ann. 45; voir en outre à ce sujet le Mémoire déjà cité de M. Stephanos.

La démonstration de ce théorème n'exige que très peu de mots. Soient les substitutions linéaires précédentes (A) et (B) orthogonales, alors les égalités

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i'^2 \tag{1}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j'^2 \tag{2}$$

sont identiquement satisfaites.

Pour démontrer que la substitution

$$P = A \times B$$

est aussi orthogonale, il suffit de prouver que l'égalité

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i' y_j')^2 \tag{3}$$

est juste. Mais cela est tout évident, car

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2 y_j^2) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)$$

et en considérant (1) et (2), on a:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i y_j)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i'^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_i'^2\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i'^2 y_j'^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i' y_j')^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

* * *

Ajoutons encore que du théorème de déterminants cité au début et de ce que nous venons de démontrer, il résulte:

1. Quand (A) et (B) sont des substitutions orthogonales droites (c'est-à-dire que leur déterminant est + 1), alors $P = A \times B$ est également une substitution orthogonale droite,

2. Quand (A) est droit et (B) gauche suivant que m est pair ou impair, $P = A \times B$ sera droit ou gauche.

3) Quand (A) et (B) sont tous deux des substitutions gauches, alors $P = A \times B$ est droite ou gauche suivant que $m + n$ est pair ou impair.

Un autre fait digne remarquable d'attention est ceci: en prenant au lieu de (A) toutes les substitutions du groupe orthogonal le plus général de la dimension m, et au lieu de (B) toutes les substitutions du groupe orthogonal le plus général de la dimension n, les substitutions orthogonales de la dimension mn résultant de $P = (A \times B)$ formeront aussi un groupe. Car il est facile de se convaincre, que les produit-substitutions de substitutions composées sont égales à la composition des produit-substitutions des composants, c'est-à-dire

$$(AA_1 \times BB_1) = (A \times B)(A_1 \times B_1)$$

ou AA_1 désignent la composition des substitutions de la dimension m A et A_1, BB_1 celle des substitutions de la dimension n B et B_1, et $(A \times B)(A_1 \times B_1)$ celle des substitutions de mn dimensions $(A \times B)$ et $(A_1 \times B_1)$. Comme en autre, de la nature orthogonale des substitutions A, A_1, B, B_1 il résulte la propriété d'orthogonalité des substitutions de la dimension mAA_1 et de celles de la dimension nBB_1; il est bien évident que la totalité des substitutions

$$P = A \times B$$

forme un groupe. Ce groupe est un sousgroupe de

$$\left[\frac{m(m-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right]$$

termes du groupe orthogonal le plus général de la dimension mn qui est de $\frac{mn(mn+1)}{2}$ termes (c'est l'expression de LIE pour indiquer que le groupe dépend de $\frac{mn(mn-1)}{2}$ paramètres).

Qu'il me soit permis d'élucider le théorème par un exemple.

Soient données les substitutions orthogonales de deux dimensions

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1' \cos\alpha - x_2' \sin\alpha \\ x_2' &= x_2' \sin\alpha + x_2' \cos\alpha \end{aligned} \qquad (A)$$

et

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1' \sin\beta + y_2' \cos\beta \\ y_2 &= y_1' \cos\beta - y_2' \sin\beta \end{aligned} \qquad \text{(B)}$$

dont (A) est droite et (B) gauche alors, en raison de notre théorème, les équations

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1' \cos\alpha \sin\beta - z_2' \sin\alpha \sin\beta + z_3' \cos\alpha \cos\beta - z_4' \sin\alpha \cos\beta \\ z_2 &= z_1' \sin\alpha \sin\beta + z_2' \cos\alpha \sin\beta + z_3' \sin\alpha \cos\beta - z_4' \sin\alpha \cos\beta \\ z_3 &= z_1' \cos\alpha \cos\beta - z_2' \sin\alpha \cos\beta - z_3' \cos\alpha \sin\beta + z_4' \sin\alpha \sin\beta \\ z_4 &= z_1' \sin\alpha \cos\beta + z_2' \cos\alpha \cos\beta - z_3' \sin\alpha \sin\beta - z_4' \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

déterminent de nouveau une substitution orthogonale, qui, suivant le théorème 3., est droite. En y admettant toutes les valeurs possibles des paramètres α et β, nous obtenons un sousgroupe de deux termes du groupe orthogonal de la dimension 4.

14.

BEITRAG ZUR THEORIE DER ALGEBRAISCHEN RESOLVENTEN.

Von GUSTAV RADOS.

Während meiner durch geraume Zeit fortgesetzten Beschäftigung mit algebraischen Fragen, drängte sich mir immer mehr und mehr die Thatsache auf, dass die Darstellung der formalen Theorie der algebraischen Gleichungen $m$ten Grades sich symmetrischer und übersichtlicher gestaltet, sobald man dieselbe nicht auf die Wurzeln der Gleichung, sondern auf gewisse mit ihnen in engem Zusammenhange stehende aus m Elementen erzeugte Werthesysteme bezieht. Der Grund der eigenthümlichen Erscheinung, dass unsere Betrachtungen sich durch das Ersetzen der einfachen Zahlenwerthe durch compliciertere Gebilde, nämlich der aus m Elementen bestehenden Werthesysteme, vereinfachen, wird sofort klar, wenn wir uns der geometrischen Veranschaulichung der bestehenden Verhältnisse bedienen. Da nämlich die Wurzeln geometrisch durch Punkte einer einzigen Geraden dargestellt werden, so bildet diese Gerade gewissermaassen den Schauplatz der diesbezüglichen Untersuchungen; ersetzen wir aber die Wurzeln durch $m$fache Werthesysteme, so steht uns zu deren geometrischer Interpretation nunmehr der $m$dimensionale Raum zur Verfügung, der eine erheblich grössere Freiheit der Bewegung gestattet. Diesem letzteren Umstande verdanken wir daher die bessere Uebersichtlichkeit und auch symmetrische Gestaltung der formalen algebraischen Untersuchungen.

Wir gehen von der algebraischen Gleichung $m$ten Grades

$$f(\lambda) \equiv A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m = 0$$

aus, deren Wurzeln wir durch

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

bezeichnen. Dann kann man stets eine lineare Substitution

$$x_\alpha' = a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \cdots + a_{\alpha m}x_m$$

angeben, deren charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2m} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

identisch ist mit der gegebenen Gleichung

$$f(\lambda) = 0.*$$

Zwischen den Doppelelementen

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots x_m^{(i)}),$$

dieser linearen Substitution und den Wurzeln der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

erzeugen die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \lambda_i x_1^{(i)} &= a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} + \cdots + a_{1m}x_m^{(i)} \\ \lambda_i x_2^{(i)} &= a_{21}x_1^{(i)} + a_{22}x_2^{(i)} + \cdots + a_{2m}x_m^{(i)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_i x_m^{(i)} &= a_{m1}x_1^{(i)} + a_{m2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(i)} \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

eine gegenseitig eindeutige Beziehung in der Weise, dass jeder Wurzel λ_i ein und nur ein Doppelelement entspricht und umgekehrt.** Diese Doppelelemente liefern uns nunmehr die Werthesysteme, durch die die Wurzeln der Gleichung zweckmässig ersetzt werden können.

Die Lösung des nachfolgenden Problems wird die Richtigkeit des soeben aufgestellten Prinzipes bestätigen.

---

* S. meine Abhandlung „Zur Theorie der adjungierten Substitutionen". Diese Zeitschrift, Bd. 10, pag. 105 u. 106.

** Wir schliessen im Verlaufe unserer Untersuchungen die Ausnahmsfälle, in denen unsere Gleichung $f(\lambda) = 0$ mehrfache Wurzeln besitzt, vorläufig aus. Es wird sich zeigen, dass diese Beschränkung als unwesentliche wieder fallen gelassen werden kann.

Gegeben sind die beiden algebraischen Gleichungen

$$f(\lambda) \equiv A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m = 0,$$
$$g(\mu) \equiv B_0\mu^n + B_1\mu^{n-1} + \cdots + B_{n-1}\mu + B_n = 0,$$

wie kann man die Gleichung

$$\Phi(z) = 0$$

in expliciter Form herstellen, deren Wurzeln aus dem Ausdrucke

$$z = \lambda + \mu$$

hervorgehen, indem man für λ die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung

$$f(\lambda) = 0,$$

für μ die der Gleichung

$$g(\mu) = 0$$

substituiert.

Auf den ersten Blick erscheint die Lösung dieses Problems sehr einfach, denn man hat weiter nichts zu thun, als aus den Gleichungen

$$f(\lambda) = 0,$$
$$g(\mu) = 0,$$
$$\lambda + \mu = z$$

λ und μ zu eliminieren. Theoretisch wäre damit die Sache erledigt, aber wirkliche Schwierigkeiten zeigen sich eben erst dann, wenn man diese Elimination praktisch durchzuführen hat. Es bleibt also die Frage zu beantworten: *Wie ist diese Elimination in Wirklichkeit durchzuführen?* Eben diese Frage wünsche ich in der gegenwärtigen Arbeit zu beantworten.

Sei wieder

$$(S) \qquad x_\alpha' = a_{\alpha 1}x_1 + a_{\alpha 2}x_2 + \cdots + a_{\alpha m}x_m \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

eine der der Gleichung $f(\lambda) = 0$ entsprechenden linearen Substitutionen, deren charakteristische Gleichung daher identisch ist mit der Gleichung

$$f(\lambda) = 0;$$

sei ferner

$$y_\beta' = b_{\beta 1}y_1 + b_{\beta 2}y_2 + \cdots + b_{\beta n}y_n \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n),$$

eine der linearen Substitutionen, die der Gleichung

$$g(\mu) = 0$$

entsprechen.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein: die aus n Reihen und n Spalten bestehende Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{ik} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{ik} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{ik} \end{pmatrix}$$

werde durch A_{ik} bezeichnet; die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

durch B; endlich die aus n Reihen und n Spalten enthaltende Matrix

$$\begin{pmatrix} -z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -z & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -z \end{pmatrix}$$

durch $-z$. Dann haben wir nach der bekannten Definition der Summe von Matrizen, die Matrix

$$\begin{pmatrix} b_{11} + a_{ii} - z & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} + a_{ii} - z & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} + a_{ii} - z \end{pmatrix}$$

durch $A_{ii} + B - z$ zu bezeichnen.

Von diesen Bezeichnungen Gebrauch machend, erhalten wir die gesuchte Gleichung

$$\Phi(z) = 0^*$$

* Den in dieser Gleichung enthaltenen Satz habe ich meinem hochverehrten Freunde Prof. Julius König bereits im September des Jahres 1898 mitgetheilt. Ich hebe dies darum hevor, weil in dem Hefte vom 6. März 1899 der Comptes Rendus Stephanos Cyparissos in einer vorläufigen An-

nunmehr explicit in der folgenden Gestalt

$$\Phi(z) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}+B-z & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B-z & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm}+B-z \end{vmatrix} = 0$$

Im zweiten Theile dieser Arbeit sollen durch Specialisierung der Gleichung $\Phi(z) = 0$ verschiedene Resolventen in expliciter Form hergeleitet werden, unter Anderen auch diejenige, die LAGRANGE in Bezug auf die Quadrate der Wurzeldifferenzen aufstellte.

Dass das in der Einleitung aufgestellte Princip sich nicht nur bei solchen Resolventen specieller Natur als zweckmässig, sondern sich auch bei Entwickelung der allgemeinen Theorie als fruchtbar erweist, wird noch besser aus einer Arbeit hervorgehen, die ich später zu veröffentlichen gedenke. In derselben werde ich mit Hülfe dieses Principes eine Methode zur expliciten Aufstellung irgendwelcher Resolventen entwickeln, bei welcher selbst die cursorische Benutzung der aus den Wurzeln der ursprünglichen Gleichung gebildeten symmetrischen Functionen vermieden werden kann und welche die Resolventengleichung, wie es die Natur der Sache mit sich bringt, in zwar complicierter aber doch vollständig expliciter Form liefert.

I. Die wirkliche Aufstellung der Gleichung $\Phi(z) = 0$.

Seien

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$$

die Wurzeln der Gleichung $f(\lambda) = 0$ und entspreche das Doppelelement

$$(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_m^{(i)})$$

der Substitution (S) der Wurzel λ_i, so dass

---

zeige die Mittheilung einer Abhandlung in Aussicht stellt, die einen ähnlichen Gegenstand behandelt und mit meinen eigenen Untersuchungen gerade in diesem Satze sich berührt.

$$\begin{aligned}
\lambda_i x_1^{(i)} &= a_{11}x_1^{(i)} + a_{12}x_2^{(i)} + \cdots + a_{1m}x_m^{(i)} \\
\lambda_i x_2^{(i)} &= a_{21}x_1^{(i)} + a_{22}x_2^{(i)} + \cdots + a_{2m}x_m^{(i)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda_i x_m^{(i)} &= a_{m1}x_1^{(i)} + a_{m2}x_2^{(i)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(i)}
\end{aligned} \qquad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

seien ferner

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n$$

die Wurzeln der Gleichung

$$g(\mu) = 0$$

und es entspreche das Doppelelement

$$(y_1^{(k)},\ y_2^{(k)} \cdots,\ y_n^{(k)})$$

der Substitution (T) der Wurzel μ_k, so dass

$$\begin{aligned}
\mu_k y_1^{(k)} &= b_{11}y_1^{(k)} + b_{12}y_2^{(k)} + \cdots + b_{1n}y_n^{(k)} \\
\mu_k y_2^{(k)} &= b_{21}y_1^{(k)} + b_{22}y_2^{(k)} + \cdots + b_{2n}y_n^{(k)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_k y_n^{(k)} &= b_{n1}y_1^{(k)} + b_{n2}y_2^{(k)} + \cdots + b_{nn}y_n^{(k)}
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Wenn wir nun die α-te der Gleichungen (1) mit $y_\beta^{(k)}$, die β-te der Gleichungen (2) mit $x_\alpha^{(i)}$ multiplicieren und die Gleichungen sodann addieren, wenn wir ferner α die Werthe

$$\alpha = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

β aber die Werthe

$$\beta = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

geben, so erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(\lambda_i + \mu_k)x_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)} = \\
&= 0\cdot x_1^{(i)}y_1^{(k)} + 0\cdot\lambda_1^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + a_{\alpha 1}x_1^{(i)}y_\beta^{(k)} + \cdots + 0\cdot x_1^{(i)}y_n^{(k)} + \\
&+ 0\cdot x_2^{(i)}y_1^{(k)} + 0\cdot x_2^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + a_{\alpha 2}x_2^{(i)}y_\beta^{(k)} + \cdots + 0\cdot x_2^{(i)}y_n^{(k)} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ 0\cdot x_{\alpha-1}^{(i)}y_1^{(k)} + 0\cdot x_{\alpha-1}^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + a_{\alpha\alpha-1}x_{\beta-1}^{(i)}y_n^{(k)} + \cdots + 0\cdot x_{\alpha-1}^{(i)}y_n^{(k)} + \\
&+ b_{\beta 1}x_\alpha^{(i)}y_1^{(k)} + b_{\beta 2}x_\alpha^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + (b_{\beta\beta} + a_{\alpha\alpha})x_\alpha^{(i)}y_\beta^{(k)} + \cdots + 0\cdot b_{\beta n}y_\alpha^{(i)}y_n^{(k)} + \\
&+ 0\cdot x_{\alpha+1}^{(i)}y_1^{(k)} + 0\cdot x_{\alpha+1}^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + a_{\alpha\alpha+1}x_{\alpha+1}^{(i)}y_\beta^{(k)} + \cdots + 0\cdot x_{\alpha+1}^{(i)}y_n^{(k)} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ 0\cdot x_m^{(i)}y_1^{(k)} + 0\cdot x_m^{(i)}y_2^{(k)} + \cdots + a_{\alpha m}x_m^{(i)}y_\beta^{(k)} + \cdots + 0\cdot x_m^{(i)}y_n^{(k)}
\end{aligned} \qquad (3)$$

$$(i, \alpha = 1, 2, \ldots, m;\quad k, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

Zu einem gegebenen Werthepaar (i, k) gehören $m \cdot n$ solcher Gleichungen, welche für die Producte

$$x_\alpha^{(i)} y_\beta^{(k)}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

deren Anzahl $m \cdot n$ ist, ein homogenes lineares Gleichungssystem ergeben. Diese Producte können nicht sämmtlich verschwinden

Wird nämlich angenommen, dass

$$x_\alpha^{(i)} y_\beta^{(k)} = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m; \quad \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

so würde, da wenigstens ein Werth, z. B. $x_g^{(i)}$ des das Doppelelement $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_m^{(i)})$ repräsentierenden Werthsystems von Null verschieden ist, aus den Relationen

$$x_g^{(i)} y_1^{(k)} = 0, \quad x_g^{(i)} y_2^{(k)} = 0, \quad x_g^{(i)} y_n^{(k)} = 0, \quad x_g^{(i)} \gtrless 0$$

folgen, dass

$$y_1^{(k)} = 0, \quad y_2^{(k)} = 0, \ldots, \quad y_n^{(k)} = 0,$$

was unmöglich ist, da

$$(y_1^{(k)}, \quad y_2^{(k)}, \ldots, \quad y_n^{(k)})$$

ein Doppelelement repräsentiert und daher wenigstens ein $y^{(k)}$ von Null verschieden sein muss.

Da es also für jedes Werthepaar (ik) eine solche Lösung des Systems der homogenen linearen Gleichungen (3) giebt, in welcher nicht die Werthe sämmtlicher Unbekannten verschwinden (die Existenz einer solchen Lösung haben wir ja soeben erwiesen), muss die Determinante des Systems der Gleichungen (3) verschwinden. Schreibt man diese Determinante mit Hülfe der in der Einleitung aufgezählten Abkürzungen hin, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} A_{11} + B - (\lambda_i + \mu_k) & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} + B - (\lambda_i + \mu_k) & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} + B - (\lambda_i + u_k) \end{vmatrix} = 0;$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n)$$

welche schon deutlich zeigen, dass die Summen

$$z = \lambda_i + \mu_k$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n)$$

sämmtlich die Gleichung

$$\Phi(z) \equiv \begin{vmatrix} A_{11}+B-z & A_{12} & \dots A_{1m} \\ A_{12} & A_{22}+B-z & \dots A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots A_{mm}+B-z \end{vmatrix} = 0$$

befriedigen. Da der Grad $m \cdot n$ dieser Gleichungen mit der Anzahl der als verschieden vorausgesetzten Summen $(\lambda_i + \mu_k)$ übereinstimmt, so erhalten wir damit die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung.

Unser Satz ist natürlich auch dann richtig, wenn wir die beschränkenden Bedingungen, welche wir im Verlaufe unserer Ableitung einführten, nun fallen lassen. Dieselben hatten darin bestanden, dass die Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln besitzen sollten, und dass ferner die Summen

$$\lambda_i + \mu_k \qquad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$$

alle voneinander verschieden seien. Wenn daher

$$\Delta_1 = \Delta_1(a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{nn})$$
$$\Delta_2 = \Delta_2(a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{nn})$$

die Discriminanten der Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

bedeuten und

$$\Delta_3 = \Delta_3(a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{nn})$$

das Product der aus den $(\lambda_i + \mu_k)$ zu bildenden Differenzen bezeichnet, wo die Functionalzeichen Δ rationale ganze Functionen bestimmen, so können wir die beschränkenden Annahmen in die eine Ungleichung

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 = \Delta(a_{11}, \dots, a_{mm}, b_{11}, \dots, b_{nn}) \gtrless 0$$

zusammenfassen. Sei nun

$$\Phi(z) \equiv z^{mn} - C_1 z^{mn-1} + \cdots + (-1)^{mn} C_{mn},$$

wo die Coëfficienten

$$C_k = C_k(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn})$$
$$(k = 1, 2, \ldots, mn)$$

gewisse rationale ganze Functionen der a_{ix} und b_{ix} sind, seien ferner die elementaren symmetrischen Functionen der Grössen

$$z = \lambda_i + \mu_k$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

rational ausgedrückt durch die a_{ik} und b_{ik}

$$C_k' = C_k'(a_{11}, \ldots, a_{mm}; b_{11}, \ldots, b_{nn}),$$
$$(k = 1, 1, \ldots, mn)$$

so wird der oben bewiesene Satz wie folgt ausgedrückt werden können:

So oft

$$\Delta(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) \gtrless 0,$$

bestehen die sämmtlichen Relationen

$$C_k(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) = C_k'(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn});$$
$$(k = 1, 2, \ldots, mn)$$

dann müssen sie aber im Sinne eines bekannten algebraischen Satzes identisch bestehen, also auch dann, wenn

$$\Delta(a_{11}, \ldots, a_{mm}, b_{11}, \ldots, b_{nn}) = 0,$$

d. h. auch dann, wenn wir unsere beschränkenden Voraussetzungen fallen lassen.

Damit ist unser Satz für alle Fälle erwiesen.

II. Die Resolventen, die aus der Gleichung $\Phi(z) = 0$ abgeleitet werden können.

1. Nimmt man an, die Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

seien identisch, dann können auch die Substitutionen (T) den Substitutionen (S) gleich gewählt werden, so dass

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

dann ist aber die ganze Function $m\,(m-1)$-ten Grades

$$\Psi(z) = \frac{\Phi(z)}{f(2z)} = \frac{\begin{vmatrix} A_{11}+A-z & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+A-z & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}+A-z \end{vmatrix}}{f(2z)} =$$

$$= \Pi\,\{z-(\lambda_i+\lambda_k)\}$$
$$(i \gtrless k;\ \ i,k=1,2,\dots,m)$$

ein vollständiges Quadrat und wenn

$$\Psi(z) = [\psi(z)]^2,$$

dann ist die Gleichung $\frac{m\,(m-1)}{2}$-ten Grades

$$\psi(z) = 0$$

jene Resolvente der Gleichung

$$f(\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln aus dem Ausdruck

$$t = \lambda_i + \mu_k$$

durch Anwendung der sämmtlichen $m!$ Permutationen entsteht.

2) Wenn wir die Gleichung

$$g(\mu) = 0$$

mit ihrer negativen Gleichung

$$g(-\mu) = 0$$

vertauschen wollen, so kann dies so geschehen, dass wir die Coëfficienten b_{ik} durch die Coëfficienten

$$b_{ik}' = -b_{ik}$$
$$(i,k=1,2,\dots,n)$$

ersetzen. Infolgedessen werden die Wurzeln der Gleichung

$$\Psi_1(z) = \begin{vmatrix} A_{11}+B'-z & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22}+B'-z & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm}+B'-z \end{vmatrix} = 0,$$

$$z = \lambda_i - \mu_k$$
$$(i=1,2,\dots,m;\ \ k=1,2,\dots,n)$$

also die sämmtlichen Differenzen, welche aus den Wurzeln der Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

gebildet werden können. Als interessantes Nebenresultat erwähnen wir, dass die Gleichung

$$\Psi_1(0) = \begin{vmatrix} A_{11} - B & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - B & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} - B \end{vmatrix} = 0$$

wo wir B' durch $-B$ ersetzten, sich nur durch das Vorzeichen von der Resultante der beiden Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

unterscheiden kann, wodurch wir auf eine bemerkenswerthe neue Form der Resultante gestossen sind, aus welcher man leicht das BÉZOUT'sche Theorem ableiten kann.

3. Wenn wir wieder voraussetzen, dass die Gleichungen

$$f(\lambda) = 0$$
$$g(\mu) = 0$$

identisch sind, so ist die ganze Function m^2-ten Grades

$$\Psi_2(z) \equiv \begin{vmatrix} A_{11} - A - z & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - A - z & \dots & A_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{vmatrix}$$

durch z^m theilbar. Die Gleichung $m(m-1)$-ten Grades

$$\frac{\Psi_2(z)}{z^m} - X(z) = 0$$

giebt uns nun jene Resolvente der Gleichung

$$f(\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln sämmtliche Differenzen sind, die aus den Wurzeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$$

gebildet werden können; der Ausdruck

$$X(0)$$

kann sich von der Discriminante der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

nur im Vorzeichen unterscheiden.

4. Sei $\Psi_2(z)$ hingeschrieben der folgende Ausdruck:

$$\Psi_2(z) \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} - z & \alpha_{12} & \dots \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots \alpha_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \dots \alpha_{\nu\nu} - z \end{vmatrix}_{(\nu = m^2)}$$

und

$$\beta_{ik} = \alpha_{i1}\,\alpha_{1k} + \alpha_{i2}\,\alpha_{2k} + \dots + \alpha_{i\nu}\,\alpha_{\nu k}$$
$$(i, k = 1, 2, \dots, \nu;\quad \nu = m^2)$$

so ist die rationale ganze Function $m(m-1)$-ten Grades

$$\Omega(z) = \frac{\begin{vmatrix} \beta_{11} - z & \beta_{12} & \dots \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - z & \dots \beta_{2\nu} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{\nu 1} & \beta_{\nu 2} & \dots \beta_{\nu\nu} - z \end{vmatrix}}{z^m}$$

ein vollständiges Quadrat, und wenn

$$\Omega(z) = \{\omega(z)\}^2,$$

so giebt die Gleichung $\frac{m(m-1)}{2}$-ten Grades

$$\omega(z) = 0$$

in expliciter Form jene von LAGRANGE herrührende Resolventengleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

sind.

5. Zum Schluss sei mir gestattet, die erörterten Verhältnisse durch ein Beispiel zu illustrieren. Seien

$$f(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = 0$$

und

$$g(\mu) \equiv \begin{vmatrix} b_{11}-\mu & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\mu & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0$$

die gegebenen Gleichungen, dann sind die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi(z) \equiv$$

$$\begin{vmatrix} b_{11}+a_{11}-z\,b_{12} & b_{13} & a_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22}+a_{11}-z\,b_{23} & 0 & a_{12} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}+a_{11}-z\,0 & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & 0 & b_{11}+a_{22}-z\,b_{12} & b_{13} \\ 0 & a_{21} & 0 & b_{21} & b_{22}+a_{22}-z\,b_{23} \\ 0 & 0 & a_{21} & b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \quad b_{33}+a_{22}-z$$

$$\lambda_1+\mu_1,\ \lambda_1+\mu_2,\ \lambda_1+\mu_3,\ \lambda_2+\mu_1,\ \lambda_2+\mu_2,\ \lambda_2+\mu_3.$$

Wenn wir in Bezug auf die Gleichung $f(\lambda) = 0$ den Ausdruck $\Psi_2(z)$ bilden, so muss derselbe im Sinne unserer allgemeinen Ausführungen durch z^2 theilbar sein. In der That ist

$$\Psi_2(z) \equiv \begin{vmatrix} -z & a_{21} & -a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22}-a_{11}-z & 0 & -a_{12} \\ -a_{21} & 0 & a_{11}-a_{22}-z & a_{21} \\ 0 & -a_{21} & a_{12} & -z \end{vmatrix} =$$

$$= z^2[z^2 - (a_{11}-a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}],$$

so dass

$$X(z) = \frac{\Psi_2(z)}{z^2} = z^2 - (a_{11}-a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21}$$

und hieraus

$$X(0) = -(a_{11}-a_{22})^2 - 4a_{12}a_{21} = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - (a_{11}+a_{22})^2,$$

welcher Ausdruck in der That mit der Discriminante der Gleichung

$$f(\lambda) = 0$$

übereinstimmt.

Bemerkung. Meine „Die Theorie der inducierten linearen Substitutionen" betitelte Abhandlung war bereits erschienen (in den Sitzungsberichten der Ungarischen Academie der Wissenschaften Bd. XVI, S. 278), als ich durch ein Referat „Jahrbuch für Fortschritte der Mathematik" erfuhr, dass ein Satz dieser Arbeit, der sich auf die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der inducierten Substitutionen bezieht, schon in einer Notiz von F. FRANKLIN „Note on Induced linear Substitutions" enthalten ist, welche im „American Journal of Mathematics" vom Jahre 1894 erschienen war. Indem ich die Priorität FRANKLIN's betreffs der Aufstellung dieses Satzes gern anerkenne, will ich nur noch bemerken, dass die von mir gegebene Ableitung von der FRANKLIN'schen durchaus verschieden ist und über dieselbe hinausgehend als wichtiges Resultat auch noch die Zusammensetzung der Doppelelemente der inducierten Substitutionen aus denjenigen der Inductorsubstitutionen enthält.

15.

JOHANN BOLYAI'S „BEMERKUNGEN UEBER NICOLAUS LOBATSCHEWSKY'S GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN".

Ein Bericht erstattet von
JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest und PAUL STÄCKEL in Kiel.

Vorgelegt der Ungarischen Akademie in der Sitzung vom 20. Januar 1902.

Einleitung.

Bekanntlich haben LOBATSCHEWSKY's Schriften die verdiente Anerkennung erst gefunden, nachdem im Jahre 1863 in dem fünften Bande des Briefwechsels GAUSS-SCHUMACHER ein Brief GAUSSens vom 28. November 1846 veröffentlicht worden war, in dem der Princeps mathematicorum die *Geometrischen Untersuchungen* vom Jahre 1840 als das meisterhafte Werk eines echten Geometers bezeichnet hatte. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, dass schon im Jahre 1851 von anderer Seite auf LOBATSCHEWSKY hingewiesen worden war, freilich ohne Erfolg, nämlich von WOLFGANG BOLYAI, der in seinem *Kurzen Grundriss eines Versuches* (S. 43—47) auf die *Geometrischen Untersuchungen* eingegangen war und ihre wunderbare Uebereinstimmung mit dem 1832 veröffentlichten *Appendix* seines Sohnes JOHANN hervorgehoben hatte; „beiden", sagt er, „ist, da keiner den anderen gesehen hat, dasselbe Original der Wahrheit nach Jahrtausenden erschienen."

Der im Jahre 1899 von FRANZ SCHMIDT und PAUL STÄCKEL herausgegebene Briefwechsel GAUSS-BOLYAI hat gezeigt, dass BOLYAI durch GAUSS von jener Schrift LOBATSCHEWSKY's Kenntniss erhalten hatte. Am 18. Januar 1848 fragt WOLFGANG bei seinem

Jugendfreunde an, was der Titel des russischen mathematischen Werkes sei, welches viel Aehnlichkeit mit dem seinigen habe, und GAUSS antwortet am 20. April 1848: „Die Arbeiten des russischen Geometers stehen grössten Theils in den russischen Denkschriften der Universität Kasan. Ich vermuthe aber, dass Du leichter erhalten kannst die kleine treffliche Schrift: Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien von NICOLAUS LOBATSCHEWSKY. Berlin 1840 in der Finckeschen Buchhandlung." Hiermit war jedoch nur ein Theil des Räthsels gelöst, es blieb übrig zu ermitteln, was W. BOLYAI veranlasst hatte, bei GAUSS nach dem russischen Mathematiker zu fragen. Einen Anhalt hierfür giebt ein Brief, den er am 10. September 1844 an seinen Sohn JOHANN in Domáld gerichtet hat und von dem ein schlecht erhaltenes Concept in der Bibliothek des Ev. ref. Collegiums zu Maros Vásárhely vorhanden ist. Mittheilungen daraus hat bereits 1898 Herr BEDŐHÁZI in seiner Biographie der beiden BOLYAI gebracht. WOLFGANG schreibt: „In der Zeitung (dem Gesellschafter) erschien MENTOVICH's Unterredung mit GAUSS. GAUSS habe die Arbeit eines (ungenannten) russischen Mathematikers, die er unter den Büchern in der Nähe des Tisches neben dem meinigen hatte, mit der Aeusserung gezeigt, dass sie bis auf [unleserliche Worte] ähnlich ist dem Werke der BOLYAI, obwohl es keiner von dem anderen nehmen konnte."

Der Zeitungsartikel, von dem WOLFGANG spricht, hat den Titel *„Tagebuch-Fragmente"* und befindet sich in der am 30. August 1844 erschienenen Nummer des Klausenburger Journals *Nemzeti Társalkodó* (Nationaler Gesellschafter*). Ehe wir die auf GAUSS bezügliche Stelle mittheilen, möchten wir bemerken, dass FRANZ MENTOVICH (1819—1879) in Nagy-Enyed, Wien und Berlin Mathematik und Physik studiert hat. Auf der Heimreise kam er im September 1843 durch Göttingen, wo er GAUSS besuchte. Später ist er in Nagy-Körös, seit 1856 als Nachfolger WOLF-

* Bei unseren Bemühungen, den von W. BOLYAI erwähnten Zeitungsartikel ausfindig zu machen, hat uns Herr Prof. JOSEF KONCZ in Maros Vásárhely in liebenswürdiger Weise unterstützt, wofür wir ihm auch an dieser Stelle unseren Dank sagen.

GANG BOLYAI's in Maros Vásárhely Professor der Mathematik und Physik gewesen. Die Aufzeichnungen über seine Unterredung mit GAUSS hatte er sogleich am 1. September 1843 in sein Tagebuch eingetragen, sie können daher auf Glaubwürdigkeit Anspruch machen.

MENTOVICH äussert sich nach einer längeren Einleitung folgendermaassen: „Als ich sagte, dass ich ein Siebenbürger sei, fragte er (GAUSS) sogleich mit Interesse, ob ich über seinen Siebenbürger Freund, Professor BOLYAI, nicht neuere Nachrichten habe, als mein Siebenbürger Landsmann, Professor SZÁSZ, der ihn einige Zeit vor mir besucht hatte. Hierauf antwortete ich, dass ich ihm nur mit noch älteren Nachrichten dienen könne, indem ich bereits vor $1\frac{1}{2}$ Jahren meine Heimath verlassen hätte. Obwohl diese meine Antwort durchaus nicht zur Fortsetzung des Gespräches über den begonnenen Gegenstand geeignet war, wurde damit der Wortwechsel über unseren BOLYAI bei weitem nicht abgebrochen; es war ersichtlich, dass GAUSS an einem Lieblingsgegenstande festhielt, den man im Gespräche nicht leicht verlässt. 'Wie kann wohl mein Freund gleich mir grau und alt geworden sein! Es wäre mir keine geringe Freude, wenn wir uns noch einmal begegnen könnten, denn im späteren Alter, wenn unsere guten Freunde und Bekannten allmählig aussterben, hängen wir mit gesteigerter Innigkeit an unseren wenigen übriggebliebenen Lieben'. So seufzte der Gelehrte, und es war eine kurze Zeit seinem ganzen Aeusseren ein Nachsinnen über die gemeinsam verlebten Tage der Jugendzeit anzusehen. Bald wieder heiterer geworden, erhob er sich von seinem Sitze und zog ein ganz neu aussehendes Buch hervor, von dem er sagte, dass er es vor einiger Zeit von einem russischen Mathematiker erhalten habe und dass es ihn darum interessiere, weil es in Betreff der darin enthaltenen Ideen genau mit den selbständigen mathematischen Ideen der BOLYAI übereinstimme; gleichwohl sei er überzeugt, dass sie nicht das Geringste von einander wissen und ihre Ideen nicht austauschen konnten, indem die Gegenden, in denen sie wohnen, so weit von einander gelegen sind. 'Diese Arbeit,' fuhr er fort, 'verdient beachtet zu werden, und einem Ungarn kann sie wegen der wunderbaren Verwandtschaft der An-

sichten doppelt interessant sein, da sie in russischer Sprache geschrieben ist.' Aus dieser Aeusserung ersieht man, dass auch GAUSS, obwohl er einen ungarischen Freund hat, dennoch die sehr falsche Ansicht hegt, die übrigens bei den deutschen Gelehrten, welche keine Philologen sind, allgemein verbreitet ist, die ungarische Sprache sei, wie die polnische, slowakische, böhmische u. s. w. ein verwandter Zweig des slavischen Sprachstammes."

„BOLYAI's mathematisches Werk erblickte ich in der kleinen Bibliothek neben GAUSSens Arbeitstisch, wo allem Anschein nach nur von ihm lieberen Schriftstellern verfasste und mehr als Handbücher gebrauchte Werke standen. Aus jedem Worte dieses vorzüglichen Mannes war ersichtlich, dass er unseren BOLYAI nicht nur als seinen Freund verehrt, sondern auch seine wissenschaftlichen Verdienste hochschätzt. Als ich Abschied nahm, trug er mir auf in seinem Namen seinen alten Freund zu grüssen und ihm zu sagen, dass es ihn sehr freuen würde, wenn er über sein Befinden durch einen Brief von ihm selbst das Neueste und Sicherste erführe. Das zu thun versprach ich."

Wie ist es aber gekommen, wird man jetzt fragen, dass WOLFGANG BOLYAI sich erst mehr als drei Jahre später, im Januar 1848, nach dem Titel des russischen mathematischen Werkes erkundigt hat? Wahrscheinlich hat er es zunächst für überflüssig gehalten, sich ein Werk zu verschaffen, das in einer Sprache geschrieben war, die nicht nur ihm selbst, sondern wohl auch allen, an die er sich wenden konnte, unverständlich war. Dass er trotzdem darauf zurückgekommen ist, hat sein Sohn JOHANN veranlasst. In JOHANN's Nachlass befinden sich umfangreiche *„Bemerkungen über NICOLAUS LOBATSCHEWSKY's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien"*, über deren Inhalt noch genauer zu berichten sein wird. Am Schlusse erzählt JOHANN, was ihn dazu veranlasst habe, LOBATSCHEWSKY's Werk zu kritisieren. „GAUSS," sagt er, „hat zwar meine Arbeit wiederholt gelobt, wenn auch nur indirect, wie unter anderem mit dem Ausdrucke seiner Ueberraschung. Dennoch ist es nach der Aussage eines ausgezeichneten Landsmannes, der ihn später besuchte, geschehen, dass der bis dahin ruhige und an der Gesellschaft nur

gleichgültig theilnehmende Coloss, als mein Landsmann anfing von den Parallelen zu sprechen, auf einmal mit erheitertem Gesichte und mit feuriger Begeisterung in das Lob von LOBATSCHEWSKY's Werk ausbrach, als einer gediegenen und mit seinen Ansichten übereinstimmenden Arbeit, hingegen sich des Appendix mit Unrecht und zu seiner Schande garnicht erinnern wollte, obwohl er schon früher seine Verwunderung über die sonderbare Uebereinstimmung beider Werke ausgesprochen hatte. Nun habe ich aber bewiesen, dass LOBATSCHEWSKY, wenn er auch besonders von § 35 an, bei der Ableitung der antieuklidischen ebenen Trigonometrie, sich als ein wahrhaft originaler, klassischer Autor zeigt und auf den ersten Blick dem Ziele sehr nahe zu kommen scheint, dennoch sehr weit von dem Resultate des Appendix und des Additamentum am Ende des zweiten Bandes des Tentamen entfernt war."

Dass bei dem Berichte des „ausgezeichneten Landsmannes", dessen Namen festzustellen uns leider noch nicht gelungen ist, ein Missverständniss obgewaltet hat, ist höchst wahrscheinlich, denn Briefe von GAUSS an SCHUMACHER und GERLING aus den Jahren 1848 und 1849 (vgl. Briefwechsel GAUSS-BOLYAI, S. 198—199) zeigen, welch' herzlichen Antheil er noch damals an allem nahm, was seinen Jugendfreund betraf. Dass aber JOHANN, für den bereits GAUSSens Brief vom 6. März 1832 eine grosse, niemals verwundene Enttäuschung gewesen war, sich dadurch aufs heftigste gekränkt fühlte, ist, besonders in Anbetracht seines unglückseligen, reizbaren und misstrauischen Wesens, sehr begreiflich. Gewaltige Stürme müssen damals JOHANN's leidenschaftliche Seele durchtobt haben. Vor dem Jahre 1848 sehen wir ihn, nachdem er 1838 bei der Bewerbung um den Preis der JABLONOWSKY'schen Gesellschaft zu Leipzig eine Niederlage, die zweite und desshalb um so tiefer schmerzende, erlitten hatte, ein Leben in Müssiggang und Ausschweifungen führen. Mit dem Jahre 1848 beginnt eine Zeit intensiver Arbeit. Er will der Welt zeigen, was er zu leisten vermöge, und versucht seine Raumlehre und seine Theorie der imaginären Grössen in ausführlicher Darstellung für den Druck zu bearbeiten; fast alle Aufzeichnungen seines Nachlasses stammen aus der Zeit von 1848 bis 1860. Leider war es zu

spät, die Kraft productiven Schaffens war ihm verloren gegangen, und an die Stelle der kernigen Kürze und Originalität des Appendix trat weitschweifige Ausspinnung alter Gedanken, die es zu keinem Abschlusse kommen liess.

Bevor jedoch JOHANN die Raumlehre und die Theorie der imaginären Grössen wieder vornahm, erleichterte er sein Herz durch eine Kritik der *Geometrischen Untersuchungen* LOBATSCHEWSKY's, die er, wie eine Notiz in seinem Nachlasse zeigt, am 17. October 1848 von seinem Vater erhalten hatte. Das umfangreiche Manuscript seiner *Bemerkungen*, das sich wenigstens Anfangs durch saubere Schrift als eine Redaction früherer Entwürfe erweist, stammt aus dem Ende des Jahres 1850 oder dem Anfange des Jahres 1851, denn es wird darin erwähnt, dass WOLFGANG BOLYAI, der am 9. Februar 1775 geboren war, nahezu 76 Jahre alt sei. Während JOHANN sich für Aufzeichnungen mathematischen Inhalts sonst fast ausschliesslich der deutschen oder lateinischen Sprache bedient, hat er hier seine Muttersprache gewählt, vielleicht weil diese seine Aeusserungen, wie er einmal sagt, nicht für die Oeffentlichkeit bestimmt waren.

Die Lektüre der *Bemerkungen* wird dadurch erschwert, dass JOHANN sich einer besonderen Schrift bedient, nämlich einer dem Charakter der magyarischen Sprache angepassten Modification des lateinischen Alphabetes, die sein Vater erfunden hatte (vergl. *Arithmetika eleje kezdönek*, M. Vásárhely 1850). Dazu kommt, dass er ganz ungewöhnliche, ja zuweilen von ihm selbst oder seinem Vater neu gebildete Worte gebraucht. Die mühsame Aufgabe der Herstellung einer lesbaren Uebertragung hat JOSEF KÜRSCHÁK übernommen, der auch für die Beschaffung des in der vorstehenden Einleitung veröffentlichten Materials thätig gewesen ist, während die Redaction der Abhandlung von PAUL STÄCKEL herrührt.

Von einem vollständigen Abdrucke der *Bemerkungen* glaubten wir absehen zu sollen. Einmal ist JOHANN's Darstellung so breit und an Citaten aus den *Geometrischen Untersuchungen* so reich, dass Kürzungen geboten erschienen. Dann aber finden sich bei ihm ausführliche Nachrichten über die Entdeckung der absoluten Geometrie, die, zum Theil auf Grund fast gleichlautender Aufzeichnungen in deutscher Sprache, bereits an anderer

Stelle* veröffentlicht worden sind. Endlich schien auch eine Wiedergabe der ausführlichen Erörterungen nicht erforderlich, durch die JOHANN mit dem Aufgebote von viel Scharfsinn und nicht ohne Spitzfindigkeit beweisen will, dass in Wahrheit nicht LOBATSCHEWSKY, sondern GAUSS der Verfasser der *Geometrischen Untersuchungen* gewesen sei; denn dass diese Behauptung weiter nichts ist als ein gänzlich unbegründeter Verdacht, das ist für jeden Kundigen selbstverständlich. Wir werden daher im Folgenden nur diejenigen Stücke der *Bemerkungen* ausführlich mittheilen, die als wichtig und neu gelten können, sie aber durch Berichte über die weggelassenen Theile in der Weise verbinden, dass der Leser eine Uebersicht über den Gedankengang des Ganzen erhält.

Bemerkungen über Nicolaus Lobatschewsky's Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien.

1.

„Wenn auch in diesem merkwürdigen Werke vielfach andere Wege eingeschlagen sind", so beginnt JOHANN seine *Bemerkungen über NICOLAUS LOBATSCHEWSKY'S Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*, „so gleicht doch der Geist und das Resultat so sehr dem Appendix des im Jahre 1832 zu Maros Vásárhely erschienenen *Tentamen matheseos*, dass man es nicht ohne Verwunderung erblicken kann. War GAUSS nach seiner Aeusserung zuerst durch den Appendix und kürzlich durch das merkwürdige Zusammentreffen des magyarischen und russischen Mathematikers auf das Aeusserste überrascht, so bin ich es nicht weniger."

„Das Wesen der reinen Wahrheit kann zwar in Maros Vásárhely wie in Kamschatka und auf dem Monde, kurz auf der ganzen Welt, nur dasselbe sein; und was ein vernünftiges Wesen erfindet, dessen Erfindung kann auch einem anderen nicht unmöglich sein. Auch pflegt für Geistesproducte wie für Naturproducte — je

---

* BEDŐHAZI, *A két Bolyai*. Maros Vásárhely 1898, und STÄCKEL, *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*; diese Berichte. Bd. XVII. Leipzig und Budapest 1901.

nach der Entwickelungsstufe der Menschheit — gewissermaassen ihre Zeit zu kommen; sodass mitunter auf dem Lande und in dem Meere derselbe Gegenstand zu gleicher Zeit untersucht wird und verwandte Ideen erwachen, wie das z. B. im Falle der Differential- und Integralrechnung geschehen ist. Endlich ist dieser Gegenstand an sich gar nicht besonders schwierig und verborgen. Jedoch wenn man bedenkt, wie wenige scharf denkende Mathematiker, selbst unter den besseren, Sinn dafür hatten, dieser Lücke gewahr zu werden und nach ihrer Ausfüllung zu streben, und dass seit Euklides oder gar seit dem Dasein der Menschheit trotz vieler schönen, geistreichen Untersuchungen — unter denen, was Strenge, Klarheit und Tiefe betrifft, unstreitig die diesbezüglichen, unmittelbar dem *Appendix* vorausgehenden Untersuchungen des *Tentamen* den ersten Platz verdienen — in dieser Sache wenigstens öffentlich beinahe garnichts geschehen ist, und dass der übrigens tüchtige ETTINGSHAUSEN nicht einmal den Werth des fertigen *Appendix* begreifen konnte: dann kann man es kaum für wahrscheinlich halten, dass zwei oder gar drei Leute, von einander nichts wissend, fast zu derselben Zeit auf eigenen Wegen die Sache beinahe vollständig erledigt haben sollen."

„Nach diesen Ueberlegungen halte ich den Verdacht nicht für unbegründet — obwohl ich nur ungern diese nicht für die Oeffentlichkeit bestimmte Aeusserung thue — dass LITTROW, als Ehrenmitglied der Kasaner Universität oder vielleicht gar ihr ehemaliger Professor Matheseos, mit LOBATSCHEWSKY in Verbindung sein konnte und ihm das *Tentamen*, das mein Vater an ETTINGSHAUSEN in Wien gesandt hatte, überlieferte*, und LOBATSCHEWSKY, der als unstreitig geistreicher Mann dessen Ziel und Werth erkannte, auch in anderer Weise das Ziel zu erreichen suchte. Für noch wahrscheinlicher aber halte ich, dass der ohnedem an Schätzen so reiche, colossale GAUSS es nicht ertragen konnte, dass ihm jemand in dieser Sache zuvorgekommen sei, und,

* LITTROW (1781—1840) ist in der Zeit von 1810 bis 1816 Professor der Astronomie in Kasan gewesen. Sein Nachlass, dessen Durchsicht Frau Prof. VON LANG in Wien, LITTROW's Enkelin, mit dankenswerter Bereitwilligkeit gestattet hat, zeigt, dass er zwar mit anderen Collegen in Kasan, aber nicht mit LOBATSCHEWSKY selbst in Briefwechsel gestanden hat.

da er dies durchaus nicht mehr verhindern konnte, unter LOBATSCHEWSKY's Namen das Werk selbst bearbeitet hat."

Nachdem JOHANN diese Annahme ausführlich begründet und GAUSS' Verhalten ihm gegenüber scharf kritisiert hat, bemerkt er, dass dem *Appendix* die Priorität zukomme, wenn nicht etwa LOBATSCHEWSKY schon 1829 in seiner Abhandlung im Kasan'schen Boten dieselben Lehren vorgetragen habe. Freilich habe er selber schon im Jahre 1823 das Wesentliche der Sache gefunden, nämlich den Satz des § 29 des *Appendix*, und im Jahre 1826 habe er seinem damaligen Vorgesetzten und früheren Lehrer an der Genie-Academie, dem Genie-Hauptmann WOLTER, einen Entwurf seiner Raumlehre vorgelegt. Von Einfluss auf die Entwickelung seiner Ideen sei sein Verkehr mit KARL SZÁSZ während seiner Studienzeit auf der Academie gewesen, viel verdanke er auch seinem Vater, der seinem Leben die standhaft eingehaltene Hauptrichtung gegeben habe*.

2.

Nach dieser ausführlichen Einleitung wendet sich JOHANN zu der Besprechung der *Geometrischen Untersuchungen*, indem er von § 16 an den Inhalt der weiteren Paragraphen theils wortgetreu, theils mit kleinen Aenderungen wiedergiebt und seine Bemerkungen daran knüpft.

Bei § 22 heisst es: „Es sei bemerkt, dass der Name *Imaginäre Geometrie* so wenig angemessen und zweckmässig ist, wie jener der *Imaginären Grössen*; denn beide Geometrien sind gleich imaginable, und es bleibt ewig unentscheidbar, welche eigentlich die reale ist."

Hinter § 25, mit dem die Lehre von den Parallellinien (die JOHANN Asymptoten nennt) abgeschlossen wird, setzt JOHANN auseinander, wie er in seinem geplanten *Vollständigen Systeme der Raumlehre* diesen Gegenstand vorzutragen gedenke.

„Vorerst § 1 des *Appendix* in drei Theile getrennt, deren erster die Erklärung der Asymptoten enthält".

---

* Vergl. hierüber das Buch von BEDÖHAZI und die schon angeführte Abhandlung von STÄCKEL.

„§ 1. *Wenn* bn ||| am *und* c *wo immer in* $\widetilde{ma}$ *angenommen wird, so ist* bn ||| cm. Auf das Genaueste bewiesen.

Es kann dann folgen:

§ 2. *Wenn* bn ||| am, *und* c *wo immer in* $\widetilde{bn}$ *angenommen wird, so ist* cn ||| am.

Oder aber dies:

Wenn bn ||| am, *und* c, d *in* $a\widetilde{m}$ *liegen, endlich* cd = cb *und* ac ~ ∞, *so folgt hieraus* adb ~ 0.

Dann:

§ 3. *Wenn* bn ||| am, *so ist auch* am ||| bn."

JOHANN will für diesen Satz den Beweis von LOBATSCHEWSKY benützen und dann die bisherigen Resultate in den Satz § 6 des *Appendix* zusammen fassen. Dann folge:

„*Wenn* bn ||| am *und* cp || am, *so ist* bn ||| cp *(und* cp ||| bn*)*.

Oder es wird vorausgeschickt:

Ist bn || am, *und liegt* c *nicht in der Ebene* $\widetilde{bam}$, *so ist der Schnitt von* mac *und* nbc *auch* ||| am *und* bn.

Und dann erst folgt des erwähnten Satzes

I. Fall, wenn c nicht in $\widetilde{bam}$ liegt,

II. Fall, wenn c darin liegt.

Dann:

§. *Ist* bn ||| ≙ am, *bedeutet* c *die Mitte von* ab, *und ist in* bam cp ∟ ab, *so ist* am || cp ||| bn.

Zu jedem am *giebt es immer ein solches* bn, *dass* ||| ≙ am *ist.*

Dies kurz in folgender Weise:

Ist cp ∟ de, *ist in* de : cd = ce, *und ist* dq ||| cp ||| er, *so hat man* dq ||| ≙ er.

§. *Ist* bn || am *und* $\widetilde{map}$ ∟ $\widetilde{mab}$, *liegen* c *und* p *auf gleicher Seite von* bam *und bilden die Ebenen* cbn *und* nba *einen räumlichen Winkel, der* $< R$ *ist, so schneiden sich* map *und* nbc."

3.

Eine scharfe Kritik übt JOHANN an § 27 der *Geometrischen Untersuchungen.* Wir geben zunächst seine Ausführungen wieder, werden ihnen aber einige Bemerkungen hinzufügen, da JOHANN über das Ziel hinausschiesst und seine Behauptung, LOBATSCHEWSKY

habe „einen groben Fehler begangen", uns nicht berechtigt erscheint.

„Am Anfange des § 27 vergleicht LOBATSCHEWSKY die Seiten des sphärischen Dreiecks mit π, und sagt sie seien $< \pi$. Daraus ersieht man, dass er darunter eine mit den Seiten *gleichartige* Grösse versteht, also entweder eine *Länge*, oder aber ein blosses *Verhältnis*, eine *abstracte Grösse*; ich sage nicht *Zahl*, da dieses Wort auf irrationale Grössen nicht anwendbar ist, ja sogar für Brüche unzweckmässig erscheint, und am besten nur für *ganze* Grössen benutzt wird. Dass er nun π im *letzteren* Sinne, d. h. als blosses Verhältnis, benutzt, das ist aus der Mitte der Seite 28 ersichtlich, wo er von den dortigen sphärischen Dreiecken behauptet, sie seien zusammen gleich π; Längen und Flächen können nämlich nur in diesem Sinne einander gleich sein. Ja! aber sobald man concrete Grössen wie Verhältnisse behandelt, so muss man für sie eine *Maasseinheit* bestimmen. Dann kann man freilich Flächen mit Linien vergleichen. Soll aber zum Beispiel der Flächeninhalt des Parallelogrammes auf F gleich dem Product der Seiten sein, so muss man zur Flächeneinheit jenes Quadrat nehmen, dessen Seite gleich der Längeneinheit ist. Da der Verfasser über dieses alles zu sprechen versäumt hat, so sieht man, dass er π und $2R$ verwechselt und über sie keinen klaren Begriff giebt. Aus seiner Betrachtung folgt aber nur so viel: Versteht man unter einem von zwei halben Hauptkreisen bestimmten zweieckigen Winkel den kleineren der von beiden eingeschlossenen Kugelsectoren, so ist der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks gleich der Hälfte der um die Halbkugel verminderten Winkelsumme. Von Zahlen oder Verhältnissen ist hier noch keine Rede."

JOHANN meint aber, es sei einfacher und einzig richtig, unter dem Winkel, der von zwei Geraden oder mehreren durch einen Punkt gehenden Ebenen gebildet wird, den von diesen begrenzten Theil der Ebene oder des Raumes zu verstehen. „Dann kann bewiesen werden, dass auf jeder überall gleichmässigen Fläche der Flächeninhalt des von drei Hauptlinien begrenzten Dreiecks gleich ist der Winkelsumme weniger $2R$, sagen wir z, multipliciert mit der zweiten Potenz des Strahles (Radius) jener Fläche. Also ist auf der Kugel, deren Strahl (Radius) gleich dem L-Bogen

der Länge 1 ist, der Flächeninhalt des Dreiecks gleich z, und der Flächeninhalt des ebenen Dreieckes ist (da z negativ und der Strahl gleich $\pm\sqrt{-1}$ ist) ebenfalls gleich dem absoluten Werthe von z"*.

„LOBATSCHEWSKY vergleicht die Winkel schon in § 16 mit π, und da man unter Winkeln nur den zwischen den unendlichen Schenkeln befindlichen unendlichen Theil der Ebene oder aber ein Verhältnis verstehen kann, so ergiebt sich daraus im Verein mit dem Uebrigen, dass er unter jeder Grösse ein Verhältnis versteht. Und er kann dies, wenn er zur Winkeleinheit jenen Winkel wählt, bei dem sich der um den Scheitelpunkt zwischen den Schenkeln beschriebene Kreisbogen zu dem Halbkreise mit gleichem Radius so verhält wie 1 zu dem unabhängig von der Geometrie bestimmten π. Wenn er dann aber meint, dass auf der Kugel in diesem Sinne der *Kugel-Sector* oder *zweieckige Winkel* gleich sei dem bei dem Scheitelpunkt befindlichen Ebenenwinkel, also die Halbkugel gleich π, so ist diese Behauptung theils unbegründet und unbestimmt, theils geradezu falsch. Der Winkel in dem genannten Sinne ist nämlich unabhängig vom Radius. Da nun also der Sector sich mit dem Radius ändert, so fehlt hier augenscheinlich etwas Wichtiges, nämlich die Angabe des Radius jener Kugel, auf welcher der Sector zu nehmen ist. Von diesem Radius lässt sich *erst später* zeigen, wie er zu nehmen ist, und dass es am einfachsten ist, ihn gleich der senkrechten Ordinate des mit i gleichen L-Bogens zu nehmen. Dann kann man aber beweisen, dass nicht der *ganze* Sector, sondern dessen *Hälfte* dem genannten Winkel gleich ist. Also hat LOBATSCHEWSKY hier einen groben Fehler begangen, es sei denn er habe, was man kaum voraussetzen kann, als Kugelradius die senkrechte Ordinate des $2i$ gleichen L-Bogens genommen." —

An einer späteren Stelle ist JOHANN — in Gestalt einer längeren Anmerkung — auf die Winkelmessung zurückgekommen. „Einen Winkel", sagt er, „kann man am directesten dadurch bestimmen, dass man ihn — indem er an sich eine unendliche

* Vergl. hierzu die Abhandlung von STÄCKEL, *Untersuchungen Johann Bolyai's aus der absoluten Geometrie*, die demnächst in diesen Berichten erscheinen wird.

Grösse ist — mit einem anderen Winkel in der Weise vergleicht, dass man ihre Scheitelpunkte zusammenfallen lässt. Auf diese Weise betrachtet man ihn als relative Grösse und vergleicht ihn mit $4R$; der Winkel R, gewöhnlich ein rechter genannt, kann dann mit Recht Haupt-, Grund- oder Viertelwinkel genannt werden. Diese erste *synthetische* oder *directe* Art ist die einfachste."

„Als zweite, aber verwickeltere und tiefere Einsicht benötigende Art bietet sich die folgende. Da F jedenfalls existiert und auf F der Kreisbogen zwischen den Schenkeln eines Winkels ein constantes Verhältnis zu seinem Radius hat, so gebe man dieses Verhältnis an und bestimme daraus das Verhältnis des Winkels zu $4R$, da allein dieses eine klare Vorstellung von der Grösse des Winkels giebt."

„In S ist natürlich auch das eine Bestimmung des Winkels, dass man in der Ebene den Kreisradius und den zwischen den *geraden* Schenkeln enthaltenen Kreisbogen durch Zahlen angiebt. Dies ist aber mit noch mehr Umständlichkeit verbunden, sodass als einzige natürliche, einfache und praktische Art nur die *erste* bleibt."

Was würde LOBATSCHEWSKY auf diese Auseinandersetzungen erwidert haben? Versuchen wir, um die Pflicht der Gerechtigkeit zu erfüllen, seine Vertheidigung zu führen! Allerdings, müsste er zugeben, habe er in den *Geometrischen Untersuchungen*, die er möglichst kurz gestalten wollte, nicht ausdrücklich gesagt, was er unter π. verstehe, allein aus S. 9 gehe doch deutlich hervor, dass bei ihm π nur ein Zeichen für $2R$ sein solle. In § 27 aber handle es sich darum, zu zeigen, dass ein dreiseitiger *Körperwinkel* gleich der halben Summe der Flächenwinkel weniger einem Rechten sei, und dafür bedürfe es keineswegs der Angabe des Radius der Kugel; die Halbkugel bedeute hier weiter nichts als einen Ebenenwinkel von $2R$. Das werde bestätigt durch die ausführlichere Darstellung, die er bereits in der Abhandlung vom Jahre 1829 gegeben habe, dort heisse es*: „Die Grösse eines Kreisbogens wird durch dessen Vergleichung mit dem Umfange be-

* ENGEL, N. J. LOBATSCHEWSKY, *Zwei geometrische Abhandlungen*. Leipzig 1898—99. S. 8.

stimmt, von dem der Bogen ein Theil ist. Dieses Verhältnis hängt nicht von der Grösse des Halbmessers ab, sondern von der gegenseitigen Lage der beiden Halbmesser, die durch die Enden des Bogens gehen. Um willkürlich zu lassen, welcher Bogen als Einheit benutzt wird, werden wir den Umfang mit 2π bezeichnen*. Ein so dargestellter Bogen heisst *geradliniger Winkel*, oder Winkel der beiden Geraden, die durch die Enden des Bogens gehen und im Mittelpunkte des Kreises zusammentreffen. Ebenso werden wir mit 2π auch die Kugelfläche bezeichnen, wenn wir die Ausschnitte auf dieser im Vergleich mit ihr bestimmen. Wenn der Ausschnitt durch zwei Ebenen entsteht, die durch den Mittelpunkt gehen, so ist seine Grösse ein *Ebenenwinkel*, bei anderen Ausschnitten ein körperlicher Winkel. Ebenenwinkel und körperliche Winkel hängen nicht von dem Halbmesser der Kugelfläche ab, sondern von der gegenseitigen Lage der Ebenen, die von dem Mittelpunkte der Kugelfläche ausgehen."

Wenn man aber den ungewöhnlichen Gebrauch der Zahl π tadeln will, so ist zu bemerken, dass auch der *Appendix* manche ungewöhnliche Bezeichnung enthält und vielfach verlangt, dass der Leser zwischen den Zeilen liest, z. B. wenn in § 26 ohne jede weitere Erklärung von dem Sinus der Seite eines sphärischen Dreiecks geredet wird.

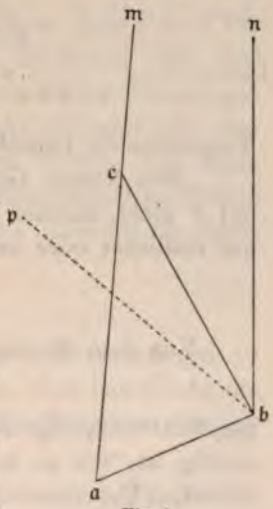


Fig. 1.

4.

Zum Schlusssatze von § 32 bemerkt JOHANN:

„Die Bemerkung, F sei eine Kugel und L ein Kreis von unendlichem Radius, ist in dem Sinne, dass Kugel und Kreis

* In den *Neuen Anfangsgründen* (1836) sagt LOBATSCHEWSKY sogar (ENGEL a. a. O. S. 112): „Die Zahl π nimmt man zuweilen gleich 200 an, häufiger jedoch gleich 180, je nachdem man der neuen decadischen Theilung oder der alten Sechzigtheilung folgt . . . Zuweilen versteht man unter π eine Zahl, die man nur näherungsweise finden kann, und die sich sehr wenig von dem Bruche 355 : 113 unterscheidet."

einen Mittelpunkt haben, falsch. Man kann aber den Begriff von Kugel und Kreis so verallgemeinern, dass darin nicht nur F und L, sondern auch die *Hypersphären* und *Hypercyklen* enthalten sind."*

„Für F und L kann man dies sogar rein geometrisch erreichen, wenn man folgende Definition aufstellt: $\mathfrak{bc}$ *liegt an* $\mathfrak{ac}$, wenn alle Punkte von $\mathfrak{ac}$ auf derselben Seite von $\widetilde{\mathfrak{bc}}$ liegen, jedoch jede Gerade $\mathfrak{bp}$, die durch $\mathfrak{b}$ in $\Lambda\,\mathfrak{abc}$ gezogen wird, $\mathfrak{ac}$ schneidet. Hier können $\mathfrak{ac}$ und $\mathfrak{bc}$ auch unendliche Geraden sein."

„Analytisch kann die Verallgemeinerung nicht nur für F und L, sondern auch für die Hypersphären und Hypercykel dadurch erfolgen, dass man bei den überall gleichmässigen Flächen jene Länge einen Strahl (Radius) nennt, mit der man die auf dieser Fläche gelegenen Dreiecksseiten zu messen hat, damit man die Formeln der sphärischen Trigonometrie unmittelbar anwenden kann."

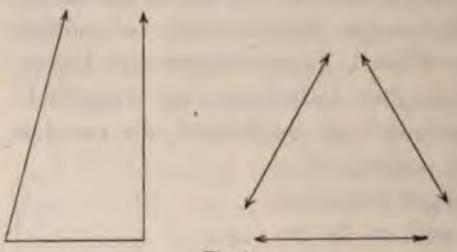


Fig. 2.

„Den Namen *Grenzdreiecke*, den LOBATSCHEWSKY Dreiecken auf F giebt, möchte ich zweckmässiger für ein Paar Asymptoten auf endlicher oder unendlicher Basis gebrauchen."

5.

Von dem Beweise, der in § 33 für die Gleichung

$$s' = se^{-x}$$

gegeben wird, sagt JOHANN mit Recht, dass er „nicht so durchsichtig ist, wie er sein sollte"; auch HOÜEL hat in seiner französischen Uebersetzung der *Geometrischen Untersuchungen* hier eine erläuternde Anmerkung unter dem Texte für erforderlich gehalten. Uebrigens lässt die Herleitung, die LOBATSCHEWSKY im Jahre 1837 in § 117 der *Neuen Anfangsgründe* gegeben hatte, an Klarheit nichts zu wünschen übrig, und nur das Streben nach Kürze

* [Ueber die Definitionen von Hypersphäre und Hypercykel vergleiche die eben angeführte Abhandlung von STÄCKEL.]

hat der Fassung des § 33 geschadet. Aus diesem Streben erklären sich auch verschiedene andere Mängel der *Geometrischen Untersuchungen*, die ohne Zweifel, was die Kunst gedrängter und doch deutlicher Darstellung betrifft, hinter dem Appendix erheblich zurückstehen.

Aber JOHANN hat gegen LOBATSCHEWSKY's Ausführungen noch weitere Einwendungen gemacht.

„Es ist bei LOBATSCHEWSKY ein schlechter Ausdruck, wenn er sagt: e (wie er J bezeichnet) sei eine *unbekannte* Zahl, also nicht einmal Grösse, die der einzigen Bedingung unterworfen sei, dass sie grösser als eins ist*, und er reisst hastig und unvorbereitet, wenn auch nicht unrichtig, die Idee heran, es sei das Einfachste, J gleich der Basis der natürlichen Logarithmen zu setzen, sodass alsdann

$$x = l(X)$$

wird."

„Auch das ist NEWTON'schen Geschmackes, dass $s' = 0$ für $x = \infty$. Es liegt doch im Begriff des Endlosen oder Unendlichen, dass es kein Ende hat, d. h. dass ein letzter *End*zustand unmöglich ist. Vom Unmöglichen aber mehr zu sagen, als dass es *unmöglich* sei, das ist ein Missbrauch des Wortes, und einen solchen Sprachgebrauch würde schon der vernünftige Ungebildete belächeln, um damit zu zeigen, dass er solche Rede nur für Spass und Neckerei hält."

6.

Von besonderem Interesse sind JOHANN's Bemerkungen zu § 35, in dem LOBATSCHEWSKY zeigt, wie man, ohne das XI. Axiom zu benutzen, zu den Formeln der sphärischen Trigonometrie gelangen kann.

„Wie im Appendix dessen § 29 gewiss einer der wesentlichsten Punkte ist, so beginnt hier LOBATSCHEWSKY's bedeutendste Originalität und seine wichtigste Abweichung vom Appendix. Und man muss zugeben, dass sein Werk, besonders von hier an, ein

* Den Ausdruck „unbekannt" hat LOBATSCHEWSKY in seiner Abhandlung vom Jahre 1829 (Engel a. a. O. S. 20) so erklärt: „weil es unbekannt ist, welche Linie bei der Messung der Geraden als Einheit genommen wird."

schöpferisches Genie verrät und dass der Weg, den er bef
besonders von hier an, und das Ergebniss, zu dem er gef
wird, ihn ohne Zweifel leicht auf einmal zu den Mathemati
ersten Ranges erheben."

„Seine Hauptidee ist klassisch. Mit feinem Tacte sucht
findet er am richtigen Ort, in einem wohlversteckten Winkel
Wahrheit, und wenn er auch an manchen Stellen langwie
verwickelt sich abmüht und zurückbleibt hinter der Vollkomn
heit, die ich erreichte, so muss man seine Arbeit doch als
Meisterwerk anerkennen."

„Sein Werk gereicht ihm zu um so grösserer Ehre sow
darum, weil er bei einem verborgen gewesenen Gegenstand
merkte, dass er verdiene zu Tage befördert zu werden, als a
darum, weil er das Gebiet des Gegenstandes durch neue Ansicl
bereicherte, indem bei wichtigen, besonders aber bei verborge
Gegenständen eine mehrseitige Beleuchtung immer werthvoll
wie auch eine politische oder sociale Wahrheit durch meh
Beweise und durch Controle gewinnt."

„Um nicht im Finstern herumzutasten wird es gut sein,
Wesen des Zieles, wohin wir streben, zu bezeichnen. Es
nichts anderes, als die zur vollständigen Darlegung der sphärisc
und der ebenen Trigonometrie nöthigen Formeln aufzufin
und zwar vorerst nur die einfachsten, aus denen die übri
folgen."

„Es ist bekannt, dass mit Ausnahme einiger Fälle, in de
die trigonometrischen Aufgaben *zweideutig* lösbar sind, aus
Elementen [Seiten und Winkeln] sowohl das ebene wie auch
sphärische Dreieck vollkommen bestimmt ist, also ein R-
Dreieck ausser durch R durch zwei Elemente."

„Demnach müssen stets $3 + 1 = 4$ Elemente in jeder
Lösung von Dreiecken dienenden Formel vorkommen. Es
also viererlei Formeln zu allen solchen Aufgaben genügend, n
lich die Relationen:

1. zwischen drei Seiten und einem Winkel, $abcA$,
2. zwischen zwei Seiten und den beiden Winkeln, die
einer dieser Seiten liegen, $bcAB$,

3. zwischen zwei Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln, $abAB$,

4. zwischen drei Winkeln und einer Seite, $aABC$."

„Die Gleichungen, die wir erhalten werden, enthalten Kreisfunctionen, und wir bemerken schon jetzt, dass eine Zweideutigkeit bei der Auflösung von Dreiecken immer nur daraus entsteht, dass das gesuchte Element nur durch seinen Sinus bestimmt wird."

„Aber gehen wir weiter. Dass zwischen einem Bogen und seinen Kreisfunctionen keine *allgemeine algebraische* Relation bestehen kann, das habe ich — soweit ich weiss und wie ich glaube auf Erden als erster — mit voller Strenge an anderer Stelle bewiesen, wie auch folgende Lehren von ähnlicher Natur: wann man einen Kreis aus einem Quadrat und überhaupt Figuren aus einander zusammenlegen, also ihre Endlich-Gleichheit darlegen kann; dass man irrationale dritte und höhere Wurzeln nicht durch Quadratwurzeln ausdrücken, also nicht geometrisch construieren kann; die algebraische Radicallehre mit einer gründlichen Theorie der algebraischen Gleichungen, durch die vollkommene Ergänzung des scharfsinnigen zehnten Buches von EUKLID. Eine solche Lehre ist auch der strenge Beweis, dass es unmöglich ist, über die Richtigkeit des XI. Axioms zu entscheiden. — Mit dem Gesagten will ich aber nicht behaupten, dass man nicht bei einigen besonderen Bögen, sagen wir bei dem Bogen $\sqrt{2}$, eine algebraische Relation mit dem Sinus finden könne, nicht einmal soviel behaupte ich, dass man π nicht algebraisch ausdrücken könne, da es ja nicht einmal entschieden ist, ob π rational sei oder nicht. Aber das behaupte ich, dass man die oben erwähnten vier trigonometrischen Gleichungen nicht durch algebraische Relationen ausdrücken könne."*

„Untersuchen wir nun, bevor wir noch jene vier Gleichungen kennen, ihren Inhalt und wie weit die eine in den anderen enthalten ist; dabei beschränken wir uns auf das sphärische Dreieck, da dessen Trigonometrie in dem antieuklidischen Raume nicht nur

* [Nachträglich hat JOHANN mit Bleistift hinzugesetzt: „Aber auch das ist fraglich. Adhuc sub iudice lis est." Man wird hiernach auch die vorhergehenden Behauptungen nur als Vermuthungen zu betrachten haben.]

mit der ebenen Trigonometrie übereinstimmt, sondern sich daraus auch die F-Trigonometrie ergiebt, indem man den Radius unendlich wachsen lässt."

„Aus der *ersten* Gleichung [also aus $abcA$] ergiebt sich durch Vertauschung von a und A mit b und B eine ähnliche Gleichung $bacB$ oder $abcB$. Vertauscht man hingegen a und A mit c und C, so gewinnt man $abcC$. Sehen wir nun, was aus zwei solchen Gleichungen folgt. Wenn wir aus $abcA$ und $abcB$ einmal a, ein andermal c eliminieren, so gewinnen wir $bcAB$ und $abAB$. Diese müssen mit der zweiten bez. dritten Gleichung identisch sein, denn sonst könnte man eine Grösse eliminieren und würde eine Gleichung zwischen *drei* Elementen erhalten, was unmöglich ist, da drei Elemente zwischen gewissen Grenzen beliebig gewählt werden können. Aus $bcAB$ fliesst die ähnliche Gleichung $bcAC$, und wenn wir b eliminieren, so erhalten wir $cABC$. Also enthält die erste Gleichung auch die übrigen in sich."

„Aus der *zweiten* Gleichung $bcAB$ fliesst — wie schon gesagt — $cABC$. Diese *vierte* Gleichung unterscheidet sich von der ersten nur dadurch, dass, wo in der einen grosse Buchstaben stehen, in der anderen kleine sind. Also fliessen aus der vierten Gleichung und folglich auch aus der zweiten alle übrigen."

„Nur die Gleichungen $abAB$, $acAC$, $bcBC$ der dritten Art haben die Eigenschaft, dass durch Elimination aus je zweien immer die dritte herauskommt. Man gewinnt also auf diese Weise nie etwas Neues."*

JOHANN betrachtet nunmehr das rechtwinklige Dreieck, bei dem, wenn C ein rechter Winkel ist, nur die 6 Gleichungen abc, abA, acA, acB, aAB, cAB (und die durch Vertauschung der Buchstaben daraus entstehenden) auftreten und untersucht ihre Abhängigkeit von einander. Da er den Umstand übersehen hat, dass in den durch Elimination erhaltenen Relationen zwischen

* In verschiedenen Aufzeichnungen hat JOHANN versucht, aus dem Sinussatze $abAB$ die erste Gleichung, und damit alle, zu erhalten, indem er das Dreieck durch eine Transversale in zwei theilt und den Sinussatz auf die Theildreiecke anwendet; die wirkliche Durchführung der Rechnung zeigt aber, dass man auf diese Weise immer nur zu dem Sinussatze für das ursprüngliche Dreieck zurückgelangt.

vier Elementen eins von selbst herausfallen kann, sind seine Deductionen nicht stichhaltig und sollen daher unterdrückt werden.

Nachdem er dann LOBATSCHEWSKY's Herleitung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks (G. U. S. 45—50) mit einigen unerheblichen Aenderungen wiedergegeben hat, bemerkt er:

„So mit den Zehen auf Kanten balancierend, bringt LOBATSCHEWSKY wunderbar und geschickt in der Weise der grössten Artisten die Selbständigkeit der sphärischen Trigonometrie heraus."

„Aber *dieser* Theil der Sache kann auch *ohne* alle solche Vorbereitungen auf folgendem Wege erledigt werden. Wenn der Radius der Kugel $\backsim 0$, dann sind auf der Kugel die Verhältnisse entweder dieselben als in Σ oder aber — um mich kurz auszudrücken — sie nähern sich diesen. Nun aber sind diese Verhältnisse bei jedem Radius dieselben, also [kann nur der erste Fall eintreten]."

„Auch der folgende Weg führt zum Ziele. Es ist Σ die Grenze von S für $i \backsim \infty$. Da nun in Σ die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie bestehen, so kann in S die sphärische Trigonometrie nur so beschaffen sein, dass sie entweder stets mit der in Σ übereinstimmt oder aber wenigstens beim Grenzübergang zu den in Σ gültigen Relationen führt. Da aber im sphärischen Dreieck alle Bestandtheile [auch die Seiten eigentlich] nur Winkel sind, so sind die Formeln der sphärischen Trigonometrie stets dieselben. Folglich kann von beiden Fällen nur der erste gelten."

7.

In § 36 bestimmt LOBATSCHEWSKY die Function $\Pi(x)$ und findet die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x},$$

„wo e jede beliebige Zahl sein kann, die grösser als die Einheit ist, weil $\Pi(x) = 0$ für $x = \infty$". Indem er glaubt, hier den schwachen Punkt in der Stellung seines Feindes gefunden zu haben, führt JOHANN gegen diese zwei Zeilen der *Geometrischen Untersuchungen* einen wuchtigen Angriff. In der That lässt sich nicht leugnen, dass hier ein Mangel vorliegt, der freilich nicht

so gross ist, als es JOHANN behauptet. Da seine Auseinandersetzungen an Klarheit zu wünschen übrig lassen, indem gerade der Kernpunkt nicht mit ausdrücklichen Worten ans Licht gestellt wird, so sei es gestattet, die betreffenden Aufzeichnungen JOHANN's zu unterdrücken und lieber den Sachverhalt in Kürze darzustellen.

In § 33 war gezeigt worden, dass für zwei Grenzbögen s und s' zwischen denselben Axen, die den Abstand x haben, die Gleichung

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}$$

gilt, wo „e eine unbekannte Zahl und nur der Bedingung $e > 1$ unterworfen ist." In § 36 beweist LOBATSCHEWSKY, dass der Ausdruck

$$(\cot \tfrac{1}{2} \Pi(x))^{\frac{1}{x}}$$

von x unabhängig, also eine Constante ist; welchen Werth diese Constante habe, bleibt dabei noch ganz unentschieden. Gegen diesen Beweis, den JOHANN mit Recht „versteckt, schwer zu finden, grossartig und brillant" nennt, lässt sich nichts einwenden, allein es ist ein Mangel, dass LOBATSCHEWSKY seine Constante wiederum mit e bezeichnet, denn wenn er auch ausdrücklich sagt, dass „e jede beliebige Zahl sein kann, die grösser als die Einheit ist", so gilt das ebenfalls von der im § 33 auftretenden Zahl e. Dass der russische Geometer selbst ein Gefühl hierfür gehabt hat, zeigt seine 1855 erschienene *Pangéométrie*, dort schreibt er nämlich zuerst (*Oeuvres*, t. II, S. 621):

$$\frac{s'}{s} = E^{-x}$$

und alsdann (S. 633):

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

und beweist später (S. 643), dass

$$E = e$$

ist; allerdings findet er diese Gleichung gewissermaassen als Nebenergebniss von Rechnungen, die bei der Aufstellung der allgemeinen Gleichung der geraden Linie durchzuführen sind.

Ein Fehler würde bei LOBATSCHEWSKY nur dann vorliegen, wenn er ohne Beweis die Gleichheit der beiden Constanten behauptet oder *gleichzeitig* die beiden Gleichungen

$$\frac{s'}{s} = e^{-x}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

mit demselben Werthe der Constanten e, also etwa beide Male mit e als Basis der NEPER'schen Logarithmen, angewandt hätte. Das ist jedoch, wie man sich leicht überzeugt, nicht der Fall, vielmehr tritt in § 36 allein die zweite Gleichung auf (S. 55 und implicite S. 60—61), dann aber ist es an und für sich gleichgültig, welchen Werth man der Constanten e beilegt, und daher erlaubt, den für die Durchführung der Rechnungen bequemsten Werth zu nehmen.

Hierin liegt wohl auch der Grund, dass LOBATSCHEWSKY, dessen Endziel war, da „der Umfang seiner Arbeiten vielleicht seine Landsleute gehindert habe, dem Gegenstande zu folgen", allein das „Wesentliche seiner Untersuchungen darzulegen", die Frage nach der Beziehung zwischen den beiden in den §§ 33 und 36 auftretenden Constanten nicht erörtert hat, *obwohl ihm ihre Gleichheit sehr wohl bekannt war;* er brauchte diese eben nicht zur Ableitung der Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks, deren Aufstellung den Abschluss seiner *Geometrischen Untersuchungen* bilden sollte.

Dass LOBATSCHEWSKY jene Gleichheit 1840 schon kannte, zeigt seine Abhandlung: *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie* vom Jahre 1829. Dort leitet er nämlich zuerst die Gleichung für $\Pi(x)$ her (ENGEL, a. a. O. S. 20) und beweist erst später (S. 33), dass alsdann $s' : s = e^{-x}$ ist, „eine Gleichung, die man auch unmittelbar erhalten kann, indem man sich auf die Eigenschaften der Grenzkreise stützt". Hiermit ist augenscheinlich die Herleitung gemeint, die er 1836 in den *Neuen Anfangsgründen* (§ 117, ENGEL, S. 189—190) gegeben und daraus 1840 in die *Geometrischen Untersuchungen* herübergenommen hat*. Hierdurch wird die

* In den *Neuen Anfangsgründen* wird, genau wie in den *Geometrischen Untersuchungen*, die Gleichung für $\Pi(x)$ erst nachher abgeleitet (§ 137, S. 212—214), ohne dass über die Beziehung zwischen den beiden Constanten etwas gesagt würde. Wenn ENGEL in der Anmerkung zu S. 33 (S. 265)

Behauptung JOHANN's, dass der Verfasser dieses Werkes den *Appendix* gekannt haben müsse, in dem die Gleichheit der beiden Constanten bewiesen wird, widerlegt, und damit fällt gleichzeitig die Folgerung, die er daraus zieht, dass nämlich „hier wahrscheinlich eine sowohl moralisch als auch wissenschaftlich makelhafte Sache vorliege". Ebensowenig ist es richtig, dass LOBATSCHEWSKY „zufällig" oder weil er „durch den Appendix irregeführt wurde", darauf gekommen sei, die beiden Constanten einander gleich zu setzen. Es wird daher genügen, von JOHANN's Bemerkungen zu § 36 nur den Beweis für die Gleichheit der beiden Constanten mitzutheilen, der noch heute von Interesse ist*.

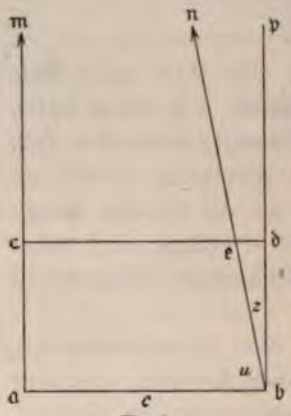


Fig. 3.

Um den unvollendeten Beweis zu ergänzen, „sei $\mathfrak{am} \perp \mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bn} \parallel \mathfrak{am}$, dann in der Ebene $\mathfrak{bam}$: $\mathfrak{bp} \perp \mathfrak{ab}$, $\angle \mathfrak{abn} = u$, $\angle \mathfrak{pbn} = z$, $\mathfrak{ac} = \mathfrak{ab} = c$, $\mathfrak{cd} \perp \mathfrak{bp}$, und $\mathfrak{cd}$ schneide $\mathfrak{bn}$ im Punkte $\mathfrak{e}$. Dann ist:

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} u = \operatorname{cotg} (\tfrac{1}{2} R - \tfrac{1}{2} z) = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} z}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{2} z}$$
$$= 1 + 2 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} z + w,$$

wo w [sogar im Verhältnisse zu z] sich der 0 nähert, wenn $c \rightsquigarrow 0$."

„Andererseits ist dann [nach § 23 des Appendix]

---

bemerkt, „in § 137 zeige sich, dass diese Wahl der Längeneinheit mit der früher getroffenen übereinstimme", so beruht das, wie er selbst zugesteht, auf einem Irrthume.

* Ein einfacher Beweis der Gleichheit ist bereits von F. ENGEL in der Abhandlung: *Zur nichteuklidischen Geometrie* (Berichte, Leipzig 1898, S. 188—190) gegeben worden; ENGEL zeigt sogar, wie man ohne weitere Grenzübergänge von der Gleichung $s' = s \cdot e^{-x}$ unmittelbar zu der Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

gelangen kann. Der Beweis JOHANN BOLYAI's setzt dagegen die Gleichung $(\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi(x))^{\frac{1}{x}} = \text{const.}$ schon als bewiesen voraus.

$$C \overset{\circ}{=} \frac{ab}{ce}*,$$

d. h.

$$\frac{1}{C}\frac{ab}{ce} \backsim 1.$$

Es ist aber $ce = cb - eb$, und nach § 27 des Appendix:

$$\frac{cb}{ab} : \frac{1}{\sin u} \backsim 1, \quad \frac{ac}{bb} \backsim 1,$$

und nach einem unabhängig von der fraglichen Gleichung beweisbaren Satze werden sich auf jeder Fläche in einem Dreiecke, das $\backsim 0$, die Verhältnisse der Elemente allmählich jenen in F nähern. Also ist

$$\frac{be}{c} \backsim \operatorname{tg} z,$$

und man hat:

$$\frac{be}{c \operatorname{tg} z} \backsim 1, \quad \frac{be}{cz} \backsim 1.$$

Daraus folgt, um die einzelnen Punkte des Beweises nur kurz zu erwähnen:

$$cb \overset{\circ}{=} \frac{c}{\sin u}, \quad be \overset{\circ}{=} cz, \quad ce \overset{\circ}{=} \frac{c}{\sin u} - cz,$$

$$\frac{c}{\frac{c}{\sin u} - cz} = \frac{\sin u}{1 - z \sin u} \overset{\circ}{=} C \overset{\circ}{=} \frac{\cos z}{1 - z \cos z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots}{1 - z + \cdots}$$

$$= 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \cdots.$$

Hieraus ist [wenn man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\Pi(c) = \mathfrak{C}$ setzt]:

$$\frac{\log \operatorname{nat} C}{\log \operatorname{nat} \mathfrak{C}} = 1$$

und damit

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\Pi(c)\right) = C$$

wirklich bewiesen, nicht nur im Traume."

8.

Auch an dem Schlussparagraphen der *Geometrischen Untersuchungen*, § 37, hat JOHANN verschiedene Ausstellungen zu machen. Er tadelt, dass der Uebergang von der imaginären zur gewöhnlichen Geometrie „leichtsinnig und oberflächlich" gemacht

* [Das Zeichen $\overset{\circ}{=}$ bedeutet, dass die linke Seite der rechten gleich wird, wenn $c \backsim 0$ ist.]

werde, und vermisst die wichtigen Bemerkungen, dass „die Verhältnisse in der ebenen Trigonometrie von S auch dann denen in Σ sich nähern, wenn $i \backsim \infty$", dass „die S-Geometrie, wenn man für den Fall von Σ die $i \backsim \infty$ entsprechenden Grenzwerthe nimmt, als Grenze auch Σ in sich enthält, sodass Σ *in diesem Sinne* — wenn auch ohne festen Grund gebaut — doch selbständig und unabhängig richtig ist", und dass, wenn „man das $\backsim$ 0-seitige Dreieck mit dem endlichen F-Dreieck vergleicht, durch Grenzübergang aus der ebenen Trigonometrie auch jene von F erhalten werden kann." In der That ist es ein wichtiger Vorzug des Appendix, dass die Formeln der Trigonometrie die Constante i enthalten, sodass man, in der modernen Ausdrucksweise, das Krümmungsmaass des Raumes variieren kann, während diese Formeln bei LOBATSCHEWSKY abgeleitet werden, indem von vornherein $i = 1$ gesetzt wird.

Von grösserer Bedeutung ist die Kritik des Ausspruches LOBATSCHEWSKY's, dass die gewonnenen Formeln der ebenen Trigonometrie 'für sich selbst schon eine hinreichende Grundlage gewähren, um die Voraussetzungen der imaginären Geometrie als möglich anzusehen'. „Um dies behaupten zu können", bemerkt JOHANN, „dazu wäre ein strenger Beweis nothwendig, den ich in aller mathematischer Strenge führen werde, um jeden Zweifel, jede Unklarheit und jeden eitlen Hoffnungsstrahl auf ewig zu entfernen". Wenn er hiermit gemeint hat, dass aus der Widerspruchslosigkeit der Formeln der ebenen Trigonometrie noch nicht folge, dass das XI. Axiom nicht durch *räumliche* Constructionen bewiesen werden könne, so ist dieser Einwand ohne Zweifel berechtigt. In der That hat JOHANN's Nachlass gezeigt, dass er hier über LOBATSCHEWSKY's Standpunkt hinausgekommen ist, ohne dass ihm freilich die wirkliche Durchführung des „strengen Beweises" geglückt wäre*.

Weiter erklärt LOBATSCHEWSKY, dass es demnach kein anderes Mittel gebe, um über die Genauigkeit zu urtheilen, die den Berechnungen der gewöhnlichen Geometrie zukomme, als die astro-

* Ausführliche Angaben findet man in der schon erwähnten Abhandlung von STÄCKEL.

nomischen Beobachtungen zu Hülfe zu nehmen; aus diesen folge aber, wie er in einer seiner Abhandlungen gezeigt habe, dass 'in Dreiecken, deren Seiten unseren Ausmessungen zugänglich sind, die Summe der drei Winkel noch nicht um den hundertsten Theil einer Secunde von zwei Rechten verschieden ist'. In Wirklichkeit folgt sogar, da ein Rechenfehler vorliegt, dass die Abweichung weniger als ein hunderttausendstel einer Secunde beträgt.

Ueber die Frage der *praktischen Entscheidung* äussert sich JOHANN folgendermaassen: „Unser Auge ist unser edelstes und schärfstes Wahrnehmungsorgan. Jedoch wird sich jeder Beobachter, besonders wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung, über den Ort des Gegenstandes irren, wenn er nicht diesen Fehler mit Hülfe diesbezüglicher Untersuchungen zu vermeiden strebt. Denn seien auch unsere Instrumente noch so fest, und mögen wir auch mit der grössten Sorgfalt messen und von wie immer Grossem zu dem Kleineren übergehen: so kann trotzdem niemand versichern, dass zwei von der Natur oder künstlich erzeugte Gegenstände ihre Lage gegeneinander nicht, etwa durch ein Erdbeben, merklich änderten. Jedoch können wir uns durch controlierende Messungen über die genügende Genauigkeit beruhigen. Die Aberration des Lichtes wird nur für das Licht der Himmelskörper eintreten."

„Weil beim Uebergange vom Kleineren zum Grösseren sich die Fehler ansammeln, hingegen beim Uebergange vom Grösseren zum Kleineren weniger bemerkbar werden, so nehmen wir ein möglichst grosses, wenigstens ungefähr zugängliches (um mindestens eine Centrierung benutzen zu können) und vom gleichseitigen nicht sehr verschiedenes Dreieck, dessen Spitzen möglichst hohe Berge mit weiter Aussicht bilden, und messen dessen Seiten und Winkel mit dem besten, freilich auch theuersten und complicirtesten Apparate, mit dem Multiplicationstheodoliten oder gar mit dem Multiplicationskreise von REICHENBACH." Welches ist die grösste Genauigkeit, die wir erhoffen können?

„Setzen wir den Erdradius, um nur ungefähr zu rechnen, auf 1000 geographische Meilen und die Höhe des *Dhvalagiri* auf eine Meile, so ist die Tangente von hier an die Erdkugel

$$\sqrt{1001^2 - 1000^2} = \sqrt{2001} = 44{,}7 \text{ Meilen}.$$

Also ist die grösste Entfernung auf Erden, von deren einem Ende zum andern gesehen werden kann, höchstens etwa 45 Meilen; aber sie wird wegen der localen Hindernisse kaum mehr als 30 Meilen sein. Bei den katastralischen Messungen in Oesterreich war die grösste Seite des gewonnenen Dreiecks $6\frac{1}{2}$ Meilen. Auch darf man nicht vergessen, dass bei grösserer Entfernung mehr Gelegenheit zu atmosphärischer Strahlenbrechung vorhanden ist; wenn man also durch grosse Entfernungen auch etwas gewinnt, so werden dadurch in anderer Hinsicht unberechenbare Zweifel entstehen."

„Nunmehr setzen wir voraus, dass, wie bei der österreichischen Feldmessung, die Längen und Längenunterschiede der Messruthen bis auf $\frac{1}{100000}$ alte Pariser Klafter bestimmt werden."

„Mit dem HERSCHEL'schen Fernrohre kann man die Theile des ungefähr 51000 Meilen von der Erde entfernten Mondes so sehen, als wären sie 17 Meilen entfernt, d. h. mit 3000facher Vergrösserung. Im Vergleich hierzu könnte das Rosshaar, das man mit blossem Auge auf 10 Klafter sieht, noch auf 30000 Klafter, also $7\frac{1}{2}$ Meile gesehen werden. Da nun der Kreis mit einem solchen Durchmesser einen Umfang von

$$\tfrac{22}{7} \times 30000 \times 100000\, p = \tfrac{66}{7} \text{ tausendmillionen } p,$$

also ungefähr zehntausendmillionen p hat, wo

$$p = \tfrac{1}{100000} \text{ Klafter},$$

und da der Kreisumfang aus

$$360 \times 60^2 = 1296000 \text{ Secunden}$$

besteht, so ist die erreichbare Genauigkeit höchstens

$$\frac{1296000}{10000000000},$$

also ungefähr $\frac{1}{8}$ Secunde*, und wenn statt $7\frac{1}{2}$ Meilen 30 Meilen genommen werden, so wird die Genauigkeit erst $\frac{1}{32}$ Sec. Aber nehmen wir an, dass man mit der Zeit durch noch schärfere Fernröhre $\frac{1}{100}$ Sec. erreichen könne."

* [Das richtige Resultat ist $\frac{1}{8000}$ Secunde.]

„Wenn wir aber auch die Winkel und damit die Winkelsumme möglichst genau abmessen und genau $2R$ bekommen, wer kann nun versichern, dass die atmosphärische Strahlenbrechung keine erheblichen Fehler verursacht? Umgekehrt, wenn, sagen wir um 16 Minuten, weniger gefunden wird — ein Unterschied, den bei der Entfernung von 30 Meilen schon eine Declination von 1 Klafter verursachen kann — wer kann dann behaupten, dass ein *solches*, oder dass überhaupt *irgend* ein S richtig sei und nicht Σ? Ja es kann sogar bei den Messungen das ganz naturwidrige Resultat herauskommen, dass die Summe $> R$."

„Mithin kann durch irdische Messungen nicht entschieden werden, ob Σ oder irgend ein S gilt."

Man könnte dazu aber den Unterschied benutzen, der in unseren Rechnungen eintritt, wenn wir den Ort der Himmelskörper einmal unter der Voraussetzung berechnen, „dass die Winkelsumme des Dreiecks gleich $2R$ und die Anziehungskraft zweier Körper *immer* in umgekehrtem Verhältnisse mit der Kugeloberfläche sei, deren gerader Radius die Entfernung der beiden Körper ist" und dann die Rechnung für „immer grössere Abweichungen von $2R$" wiederholt. „Wenn so, um die schönen Worte meines Vaters zu gebrauchen, die Zeit ihrem ewigen Verwandten, dem Raume, zu Hülfe kommt*, so kann man sich überzeugen, dass man mit einer im ganzen Gebiete unserer praktischen Untersuchungen ausreichenden Genauigkeit Σ annehmen kann, aber freilich nie mit theoretischer Genauigkeit. Also — denn nur auf diesem Wege konnte LOBATSCHEWSKY zum Ziele kommen — wenn man im grössten irdischen Dreieck die Winkelsumme $= 2R - \frac{1}{100}$ Sec. setzt und dann die bis dahin beobachtete Uebereinstimmung der wirklichen und der berechneten Bewegung der Himmelskörper aufhört und der Widerspruch mit dem Unterschiede von $2R$ eine Weile wächst, so kann man daraus mit Recht schliessen, dass in dem genannten Dreieck die Winkelsumme weniger als $\frac{1}{100}$ Sec. von $2R$ verschieden ist. Wenigstens ist dies so lange berechtigt, bis die gewonnenen Ergebnisse nicht durch Verbesserung der optischen Instrumente geändert werden."

* [*Tentamen*, t. I, S. 489: *tempus ab aeterno connata spatii soror ei auxilio venit.*]

Den Schluss der *Geometrischen Untersuchungen* bildet die Bemerkung, dass 'die Gleichungen der ebenen Trigonometrie in die Gleichungen für sphärische Dreiecke übergehen, wenn man statt der Seiten a, b, c setzt $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$.' Denn alsdann müsse man

$$\sin \Pi(a) \text{ durch } \frac{1}{\cos a}, \quad \cos \Pi(a) \text{ durch } \sqrt{-1}.\ \mathrm{tg}\, a,$$

$$\mathrm{tg}\, \Pi(a) \text{ durch } \frac{1}{\sqrt{-1}\sin a}$$

ersetzen und auf ähnliche Weise auch bei den Seiten b und c verfahren. Dies ins Reine zu bringen hat LOBATSCHEWSKY allerdings dem Scharfsinn des Lesers überlassen, und insofern darf seine Darstellung als zu knapp bemängelt werden, allein einen Fehler, wie JOHANN meint, hat er damit nicht begangen.

Von erheblicherer Bedeutung ist es, wenn JOHANN sagt, dass LOBATSCHEWSKY nur „wahrgenommen" habe, dass durch Einsetzung „von $\frac{1}{\cos a}$ für $\sin \Pi(a)$" die Formeln der ebenen Trigonometrie in die der sphärischen übergehen, und dass ihm die „tiefere Einsicht zu ermangeln scheine". In der That war JOHANN hier dem Wesen der Sache näher gekommen, ohne freilich ganz durchzudringen, nämlich den Zusammenhang zwischen der absoluten Geometrie und der Geometrie der geodätischen Linien auf den Flächen constanten negativen Krümmungsmaasses zu erkennen*.

Jene „tiefere Einsicht" hat JOHANN mit folgenden Worten formuliert:

„Wie man [in den Formeln der sphärischen Trigonometrie] die Seiten des Dreiecks durch jenen L-Bogen theilen muss, dessen senkrechte Ordinate gleich dem *geraden* Radius jener Kugel ist, ebenso muss man in der Ebene, um jene Formeln anwenden zu können, die Seitenlängen mit $i\sqrt{-1}$ getheilt einsetzen. Ist also der Kugelradius so gross, wie die Ordinate des L-Bogens, der gleich einer beliebig gewählten Einheit ist, so kann man mit den Seiten selbst rechnen. In diesem Sinne kann man sagen, die

* Genauere Angaben über JOHANN's diesbezügliche Untersuchungen findet man in der schon erwähnten Abhandlung von STÄCKEL.

Ebene sei eine Hypersphäre vom L-förmigen Radius $i\sqrt{-1}$ oder einem geraden Radius

$$a = \tfrac{1}{2}\pi i\sqrt{-1} + 2m\pi i,$$

wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet." Dass beide Ausdrucksweisen dasselbe besagen, „erhellt aus der in § 30 des Appendix enthaltenen und auch mit Hülfe der Integralrechnung leicht beweisbaren Gleichung

$$z = i \operatorname{cotg} u$$

und der Gleichung

$$z = \sqrt{-1} \sin \frac{a}{i\sqrt{-1}},$$

die aus der obigen Formel

$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{\sqrt{-1} \sin \dfrac{a}{i\sqrt{-1}}}$$

fliesst."

„Da die imaginären L-förmigen oder geraden Radien bisher noch nirgends definiert waren, so können diese Ausdrücke nicht missverstanden werden."

„Das Gesagte kann man auch leicht auf die zur Ebene äquidistanten Flächen ausdehnen, und man gewinnt so eines der schönsten, wichtigsten und interessantesten Resultate in der ganzen Geometrie und überhaupt im ganzen Bereiche des Denkens."

Die Einsicht, dass in der Ebene die Hypercykeln zu dem Systeme der Kreise, Grenzkreise und Geraden, im Raume die Hypersphären zu dem Systeme der Kugeln, Grenzkugeln und Ebenen gehören und dass die Geometrie auf den Hypersphären mit der absoluten Geometrie der Ebene im wesentlichen identisch ist, scheint JOHANN BOLYAI eigentümlich zu sein, denn bei LOBATSCHEWSKY findet sich nur ein einziges Mal die Linie der Punkte gleichen Abstandes von einer Geraden erwähnt (*Ueber die Anfangsgründe* 1829, ENGEL a. a. O. S. 34).

16.

UNTERSUCHUNGEN AUS DER ABSOLUTEN GEOMETRIE.

Aus Johann Bolyai's Nachlass
herausgegeben von PAUL STÄCKEL, Professor an der Universität Kiel, auswärtigem Mitgliede der Ungarischen Akademie der Wissenschaften.

Der Akademie vorgelegt in der Sitzung vom 18. November 1901.

Einleitung.

„Alle uns subjectiv möglichen Systeme allgemein umfassend," sagt Wolfgang Bolyai*, „hat der *Verfasser des Appendix* mit einzigartigem Scharfsinn eine für jeden Fall unbedingt wahre Geometrie aufgestellt; freilich enthält der Appendix dieses Bandes aus der grossen Menge nur das Allernothwendigste, und es ist der Kürze wegen Vieles fortgelassen worden, z. B. die allgemeine Auflösung des Tetraeders und mehrere andere elegante Untersuchungen." Dass Johann über das im Appendix Gegebene hinausgegangen war, berichtet Wolfgang auch in dem Briefe an Gauss vom 20. April 1835: „Am Ende des zweiten Bandes ist, nebst der Erleuchtung mancher im ersten gegebenen Begriffe, auch eine gewisse Einigkeit beider Trigonometrien**, nach dem Gedanken meines Sohnes. Gern hätte ich auch die Auflösung des Tetraeders drucken lassen, welche mein Sohn noch ein Jahr vor der Herausgabe des Appendix fand: aber die Formeln, die ich sah, waren zu verwickelt, und ich weiss sie nicht. Und über alles hätte ich den Beweis davon drucken lassen, dass es absolut unmöglich sei dem menschlichen Auge es einzusehen, ob das

* Tentamen, t. I, Maros Vásárhely 1832, S. 489—490.
** Tentamen, t. II, Maros Vásárhely 1833, S. 380—383.

XI. Axiom wahr sei oder nicht: mein Sohn behauptet den evidenten Beweis davon zu haben."*

Aus diesen Aeusserungen geht hervor, dass JOHANN BOLYAI sich in der Zeit von 1830 bis 1835 mit der Beantwortung der folgenden drei Fragen beschäftigt hat:

1. In welchem Zusammenhange steht die absolute Trigonometrie mit der sphärischen Trigonometrie?

2. Lässt sich in aller Strenge beweisen, dass es unmöglich ist, das elfte Euklidische Axiom aus den übrigen Axiomen herzuleiten?

3. Welches Volumen hat in der absoluten Geometrie ein von vier Ebenen begrenztes Raumstück?

Von den Aufzeichnungen, die JOHANN hierüber in der Zeit von 1830 bis 1835 gemacht hat, habe ich trotz sorgfältiger Nachforschungen in seinem Nachlasse, den mir das Ev.-ref. Collegium zu Maros Vásárhely mit dankenswerther Bereitwilligkeit zugänglich gemacht hat, nur wenige Blätter finden können. Eine werthvolle Ergänzung sind daher Bemerkungen, die JOHANN in Aufzeichnungen aus den letzten Jahren seines Lebens (1851 bis 1860) über seine „ältesten Ideen" gemacht hat; freilich sind sie nur mit Vorsicht zu benutzen.

In den drei Abschnitten dieser Abhandlung findet man der Reihe nach zusammengestellt, was sich über JOHANN's Untersuchungen in Betreff jener drei Fragen aus der absoluten Geometrie hat ermitteln lassen. Die wichtigsten Notizen sind dabei in extenso wiedergegeben worden, die minder wichtigen auszugsweise. Dass aus unfertigen Entwürfen mit zahlreichen Wiederholungen, Einschaltungen (zum Theil auf beigelegten Zetteln), Aenderungen, Streichungen erst ein lesbarer Text gestaltet werden musste, möge ausdrücklich festgestellt und dabei versichert werden, dass Nichts, was irgendwie erheblich schien, weggelassen worden ist (vergl. auch meine Abhandlungen: *Johann Bolyais Theorie der imaginären Grössen* und *Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*, diese Berichte Bd. XVI (1899) und Bd. XVII (1901)).

---

* Briefwechsel GAUSS-BOLYAI. Leipzig 1899. S. 115—116.

I. Abschnitt.

Sphärische und hypersphärische Trigonometrie.

Unter den Nachträgen, die WOLFGANG BOLYAI dem zweiten Bande des *Tentamen* beigefügt hat, findet sich auch (S. 380—383) ein Zusatz zu dem Appendix des ersten Bandes.

„Endlich sei es erlaubt", beginnt WOLFGANG, „als Zugabe etwas beizufügen, was von dem Verfasser des *Appendix* des früheren Bandes herrührt; der allerdings entschuldigen möge, wenn ich etwas nicht so scharf wie er aufgefasst habe ... Die Sache lässt sich in wenigen Worten so darstellen: *Die Formeln der sphärischen Trigonometrie* (die in dem genannten Appendix unabhängig vom XI. Euklidischen Axiom bewiesen worden sind) *stimmen mit den Formeln der ebenen Trigonometrie überein, wenn man* (auf eine sogleich zu erklärende Art) *die Seiten eines sphärischen Dreiecks als reell, die eines geradlinigen aber als imaginär ansieht*, sodass die Ebene hinsichtlich der trigonometrischen Formeln als imaginäre Kugel angesehen werden darf, wenn man als die reelle Kugel diejenige annimmt, in der $R = 1$ ist." Es folgt eine ausführliche Begründung dieser Behauptung, deren Wiedergabe hier nicht erforderlich erscheint.

In Aufzeichnungen, die noch aus der Zeit vor dem Erscheinen des zweiten Bandes stammen, berichtet JOHANN, dass er seinen Vater „nach vollendetem Drucke (des Appendix) schriftlich aus Lemberg* darauf aufmerksam gemacht [habe], dass, wenn man sämmtliche Seiten des geradlinigen Dreiecks, auf i als Einheit der Länge bezogen**, als ebenso grosse imaginäre Grösse ansieht, alle Relationen in geradlinigen Dreiecken denen in Kugeldreiecken vollkommen analog seien, z. B. in einem rechtwinkeligen Dreieck, worin a, b Katheten, c Hypotenuse ist, wenn das Dreieck sphärisch ist:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b,$$

* Der Appendix ist Anfang 1831 gedruckt worden. JOHANN war 1831 nach Lemberg versetzt worden, wo er bis zum 5. Mai 1832 geblieben ist; dann kam er nach Olmütz.

** Vergl. § 30 des *Appendix*, dessen Kenntnis zum Verständnis des Folgenden erforderlich ist.

und also, wenn es geradlinig ist:

$$\cos + c = \cos + a \cdot \cos + b.$$

Und so werden die beiden Trigonometrien höchst einfach in eine zusammengezogen. Und ich bedauere es doch, es nicht wenigstens angezeigt zu haben, da es jeder sogleich bemerken muss. Es war mir auch, seit ich diese Formeln zuerst fand, keineswegs entgangen, allein damals nur vorzüglich die Materie der Parallelen als Hauptsache im Auge haltend und die allgemeine Unvollkommenheit und Unbegreiflichkeit der Lehre von den imaginären Grössen erwägend, konnte ich mich — ungeachtet des Versuches, diese Idee nicht fallen zu lassen — nicht entschliessen, eine so unvollkommene Lehre, als die Imaginäre bis dahin war, aufzunehmen, und, da die damals durch die Umstände gebotene Kürze nicht erlaubte, sich darauf einzulassen, so beschloss ich, obschon sehr ungern, es auf eine andere Gelegenheit aufzusparen."

Eine solche Gelegenheit bot sich im Jahre 1837, als JOHANN, durch eine von der Fürstlich JABLONOWSKI'schen Gesellschaft zu Leipzig gestellte Preisaufgabe veranlasst, seine „im Wesentlichen im Jahre 1831 ausgedachte" Theorie der imaginären Grössen ausarbeitete. In § 9 seiner *Responsio* heisst es:

„In dem Anhange des ersten Theiles des Werkes: *Tentamen* ... werden die Formeln der ebenen Trigonometrie für den Fall gegeben, dass der Lehrsatz, den EUKLID (nach dem Urtheil aller scharfsinnigeren Geometer) irrthümlich unter der Form des XI. *Axioms* aufgeführt hat, falsch sein sollte (nachdem vorher die Raumlehre unabhängig von dem genannten Axiome aufgebaut worden ist). Ohne Mühe folgt aus diesen Formeln, dass

$$\sin + \frac{a}{i} = \sin \alpha \cdot \sin + \frac{c}{i},$$

$$\cos + \frac{c}{i} = \cos + \frac{a}{i} \cdot \cos + \frac{b}{i}$$

ist, wenn a, b, c die Katheten und die Hypotenuse, α den der Kathete a gegenüberliegenden Winkel bezeichnet, und endlich i eine gewisse Gerade, die eben daselbst erklärt wird (und die bei der vorliegenden Annahme an und für sich bestimmt ist); aus diesen *beiden* Gleichungen ergeben sich alle übrigen der ebenen

Trigonometrie. Die Betrachtung dieser Gleichungen zeigt, dass die rechtwinkligen ebenen Dreiecke und daher die ganze Ebene sowie die von ihr gleichweit abstehenden Flächen, die ich, ebenfalls auf diese Theorie verfallend, schon vor vielen Jahren *hypersphärische Flächen* genannt habe*, genau auf dieselbe Art wie die Kugelfläche in der Rechnung behandelt werden können. Nennt man dabei diejenige Grösse r, durch die die Seiten eines [rechtwinkligen]** Dreiecks auf einer gewissen, überall gleichförmigen Fläche zu theilen sind, damit man

$$\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cdot\cos\frac{b}{r}$$

setzen darf, z. B. den *Parameter* der Fläche, so werden die Parameter der Kugelflächen *reelle*, die Parameter der von der Ebene gleich weit abstehenden Flächen *imaginäre* Grössen (d. i. Grössen, die wirklich existieren, aber mit den Zeichen $+$, $-$ behaftet sind); der Parameter der Ebene wird $-i$ (oder ebensogut $+i$)."

„Man kann die Sache jedoch auch anders auffassen. Man könnte die Ebene als zum Parameter i gehörend betrachten und die *Geraden*, die in der Ebene an die Stelle der Bogen der grössten Kreise treten, *selbst als imaginäre Bogen* in Bezug auf den Parameter i ansehen; auf diese Art entsprechen jedoch (wie sich zeigen lässt) den Parametern, die kleiner als i sind, keine solchen gleichförmigen Flächen, deren Bogen, zu dem soeben angegebenen Zwecke, als imaginär angesehen werden dürfen."

Auf einem Zettel, der dem Entwurfe der *Responsio* beigelegt ist, findet sich eine ausführlichere Fassung des § 9, die ich, ebenfalls in deutscher Uebersetzung, hier wiedergeben möchte.

„Es darf jedoch die folgende, sehr interessante Bemerkung um so weniger mit Stillschweigen übergangen werden, als sie höchst elegant ist, eine ausgezeichnete Anwendung der sogenannten imaginären Grössen*** giebt, und es ermöglicht, die ganze vom

* Gemeint ist mit dieser Anspielung Gauss, der in dem Briefe an Wolfgang vom 6. März 1832 (*Briefwechsel Gauss-Bolyai*. S. 109) die Namen Parasphäre und Hypersphäre vorgeschlagen hatte.

** [Die eckigen Klammern bedeuten überall, dass der Herausgeber die darin eingeschlossenen Worte dem Urtexte als Ergänzung hinzugefügt hat.]

*** Die höchst wirkliche Wissenschaft der Wahrheit darf nicht durch

XI. Axiom unabhängige Raumlehre höchst einfach und bequem darzustellen; worauf schon in § IV hingewiesen wurde."

„Schreibt man der Kürze und Einfachheit wegen $+$ für $+\sqrt{-1}$, $-$ für $-\sqrt{-1}$, sodass $\overset{+}{-}1 \cdot \overset{+}{-}1 = -1$ und $\overset{+}{-}1 \cdot \overset{-}{+}1 = +1$ wird, und wählt i, gemäss § III, als Einheit, so überzeugt man sich leicht durch Vergleichung mit den bekannten eleganten Formeln in § 31 I [des Appendix], dass

$$1 : \sin\alpha = \sin + c : \sin + a$$

ist, oder, wenn man zu noch grösserer Vereinfachung nicht die positiv, sondern die mit dem Zeichen $+$ genommenen Seiten mit a, b, c bezeichnet oder bloss c, a statt $+c$, $+a$ schreibt:

$$1 : \sin\alpha = \sin c : \sin a,$$

und ebenso ergiebt sich aus II:

$$\cos\alpha : \sin\beta = \cos a,$$

aus III:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad \text{und} \quad \cot\alpha \cdot \cot\beta = \cos c,$$

aus § 30:

$$\operatorname{tg} z = - \sin + y \quad \text{und} \quad + \circ y = 2\pi \sin + y,$$

oder wenn man festsetzt, dass ein für alle Male bei jeder Rechnung jede Gerade in der Ebene mit dem Zeichen $+$ genommen werden soll, wobei bloss y für $+y$ und bloss $\circ y$ für $+\circ y$ (indem das ganze Zeichen $\circ y$ eine Linie bezeichnet) geschrieben werden darf, ist einfach:

$$\operatorname{tg} z = - \sin y, \qquad \circ y = 2\pi \sin y;$$

ferner folgt sogleich aus § 32, III:

$$\frac{r}{p} = \cos q, \qquad s = p \cdot \sin q,$$

---

die Betrachtung nicht existierender Dinge befleckt werden. Welchen Sinn hat $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$, wenn $\sqrt{-1}$ keinen hat? Alles wird sonnenklar, wenn man sorgfältig beachtet, dass die Vorsetzung der Zeichen $+$, $-$, $+$, $-$ gar nichts Anderes bedeutet, als die Art und Weise, wie die absoluten Grössen in der algebraischen Rechnung behandelt werden sollen, nach einer Verabredung, die man zu treffen hat. [Anmerkung JOHANN BOLYAI's]

aus IV:

$$\odot x = 2\pi \cos x - 2\pi = -2\pi \operatorname{sin\,vers} x$$

u. s. w.“

„Die grösste Aehnlichkeit oder vielmehr die vollständige Uebereinstimmung der Ausdrücke für die Grössen derselben Art auf der Kugelfläche in Σ springt in die Augen. Denkt man sich eine Kugel des L-förmigen Halbmessers $r = 1$ (deren *gerader* Halbmesser nach § 30 gleich $\log \operatorname{nat}(1 + \sqrt{2})$ ist), so ist ihre Oberfläche gleich der der Kugel vom Halbmesser 1 in Σ, und alle vorher erhaltenen Ausdrücke stimmen vollständig überein mit den Ausdrücken für dieselben Grössen auf dieser Fläche.“

„Es lässt sich allgemein beweisen, dass, wenn in irgend einer überall gleichmässigen Fläche — eine solche kann, abgesehen von F, nur sphärisch, eben oder einer Ebene parallel sein — jede kürzeste Linie a (oder Schnittlinie mit einer durch eine Axe gehende Ebene), wenn die Fläche sphärisch ist, durch eine Zahl, nämlich den entsprechenden Bogen in dem Winkel bei dem Mittelpunkte von a, ausgedrückt wird, wenn aber die Fläche eben oder einer Ebene parallel ist, durch die Maasszahl des Stückes einer Geraden, in dem ersten Falle in derselben Ebene, sonst in der parallelen Ebene p*, sodass das Stück zwischen die Fusspunkte der Lothe [von den Endpunkten von a] auf p fällt, und falls in dem früheren Falle alle Linien in derselben Fläche mit dem Zeichen $+$, in dem späteren aber mit dem Zeichen $+$ genommen werden, — dass, sage ich, die Theorie aller dieser Flächen ganz allgemein von denselben Formeln umfasst wird und von ihnen allen ganz entsprechende Lehrsätze gelten. So darf man z. B., wenn die Formeln der sphärischen Trigonometrie bekannt sind, aus ihnen ohne jede weitere Untersuchung schliessen, dass auch für geradlinige rechtwinklige Dreiecke die Formeln gelten:

$$\cot a = \cot a \cdot \sin b, \qquad \cot c = \cot a \cdot \cos \beta, \text{ u. s. w.,}$$

und in gleicher Weise kann man aus allen Eigenschaften der Ebene, in dem angegebenen Sinne, sogleich auf Eigenschaften der Kugel schliessen.“

---

* [Vergl. *Appendix* § 32, III. Die Bezeichnung *parallel* gebraucht Johann immer in dem Sinne von *äquidistant*, während er Lobatschewsky's Parallelen *Asymptoten* nennt.]

„Hier möge es genügen, nur einige besonders wichtige Eigenschaften zu streifen, um zu zeigen, in welcher Weise diese *Uebertragung* zu geschehen hat und wie man mit ihrer Hülfe die Raumlehre, ohne zu wissen, ob das System Σ oder S wirklich existiere, aufs bequemste analytisch behandeln kann."

„*Erstens* möge bemerkt werden, dass der Kürze wegen (um die Schaffung eines neuen Wortes zu vermeiden) die Bezeichnungen *Kugel* (und *Kreis*) in einem erweiterten Sinne verstanden werden sollen, sodass einer jeden überall gleichförmigen Fläche (und Linie) dieser Name beigelegt werde. Im erweiterten Sinne oder analytisch heisst *Strahl* [Radius] jeder überall gleichförmigen Fläche oder gleichförmigen Linie in der Ebene eine algebraischen Grösse, die augenscheinlich ganz und gar nicht der Euklidische Strahl ist, sondern die aus den soeben gefundenen Ausdrücken auf eine sogleich darzulegende Art hervorgeht, Strahl einer gleichförmigen Linie auf der Kugel aber ein Stück einer gleichförmigen, die Kugel in zwei congruente Theile theilenden Linie, das die Krümmung misst. Jeder Kreis hat unendlich viele Strahlen, während nur ein einziger oder gar kein Euklidischer Strahl vorhanden ist, ihr Ausdruck ist:

$$y \dot{-} 2n\pi,$$

wo n eine ganz beliebige ganze Zahl bezeichnet, mit dem Zeichen $+$ oder $-$. Auch ist

$$\bigcirc(y \dot{-} 2n\pi) = \bigcirc y,$$

wo das Zeichen $\dot{-}$ für die Ebene und die ihr parallelen Flächen zu nehmen ist, das Zeichen $-$ aber für eine sich schliessende Kugel gilt."

Die Fortsetzung dieses Manuscriptes hat sich leider nicht finden lassen, als Ergänzung können jedoch einige Randbemerkungen dienen, die JOHANN einer in deutscher Sprache abgefassten Bearbeitung der ersten 33 Paragraphen des Appendix beigefügt hat; während die Bearbeitung selbst aus der Zeit zwischen 1833 und 1835 stammt, scheinen die Randbemerkungen niedergeschrieben worden zu sein, als JOHANN sich um den Preis in Leipzig bewarb. Zu § 30 des Appendix wird dort bemerkt:

„[Es ist]

$$\bigcirc y = 4\pi i \frac{e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}}{2} = + 4\pi i \sin \frac{y}{i} = - 4\pi i \sin + \frac{y}{i}^{*}.$$

Auf einer Kugel, deren Strahl die senkrechte Ordinate (Höhe) eines der i gleichen *paracyklischen*** Bogens ist, ist aber der $\bigcirc$ eines y gleichen *cyklischen* Strahles

$$= 4\pi i \sin \frac{y}{i}.$$

Auf einer zur Ebene parallelen Hypersphäre aber ist

$$\bigcirc y = n \bigcirc \left(\frac{y}{n}\right) \text{(in Ebene)} = - 4\pi i n \sin + \frac{y}{ni} = - 4\pi i'' \sin + \frac{y}{i''},$$

wenn $ni = i''$ gesetzt wird (nämlich i'' jene hypercyklische Länge ist, auf derselben Hypersphäre, deren $I' = e$ ist). Und ebenso wird auf einer Kugel, deren Strahl die senkrechte Ordinate eines paracyklischen Bogens $= i'$ ist, allgemein

$$\bigcirc y = 4\pi i' \sin \frac{y}{i'},$$

woraus der Ausdruck auf einer Hypersphäre sogleich erhalten wird, sobald man nur sowohl dem Strahle als auch dem Kreise $+$ (oder beiden $-$) vorsetzt. Und um den Ausdruck auf der Parasphäre*** abzuleiten, darf man nur ($i' \backsim \infty$) die Grenze nehmen von $i' \sin \frac{y}{i'}$, da diese gleich y ist, also auf diese Art den wahren Ausdruck von $\bigcirc y$ auf der Parasphäre wirklich darbietet. Es kann hierbei i' der Hauptstrahl der Kugel (von L, $= \infty$) heissen und $\overset{+}{-} i'$ jener der Hypersphäre heissen . . .†“

„Man kann auch eine allgemein auf alle (auch auf die sich nicht schliessenden) gleichförmigen Linien auf beliebigen gleichförmigen Flächen anwendbare Definition von Strahl oder, wenn man will, *Parameter* auf derselben Fläche geben. Denn der gerade Strahl des senkrechten Entwurfes jener Linien auf der mit der Fläche parallelen Ebene ist vorher definiert, und offenbar ist das Product

---

* [Hierbei bedeutet, wie auch in der Schrift über die imaginären Grössen, 4π den Umfang des Euklidischen Kreises vom Halbmesser 1.]

** [Paracyklisch = L-förmig.] *** [Parasphäre = F.]

† [Hier folgen einige unleserliche Worte.]

der geraden Strahlen beider Linien der zu definierende Strahl der fraglichen Linie *auf* der Fläche."

Im Jahre 1851 hat JOHANN eine neue Darstellung dieser Gedanken ausgearbeitet. Sie bildet einen Abschnitt einer Kritik der „*Geometrischen Untersuchungen*" von N. LOBATSCHEWSKY, die ich in Gemeinschaft mit Herrn Professor J. KÜRSCHÁK demnächst herausgeben werde. Bei LOBATSCHEWSKY erscheint nämlich der Zusammenhang zwischen der sphärischen und der „imaginären" Trigonometrie lediglich als eine analytische Thatsache, und dieser formalistischen Auffassung gegenüber wollte JOHANN den höheren geometrischen Gesichtspunkt zur Geltung bringen. Da seine Ausführungen inhaltlich nicht über das bereits Mitgetheilte hinausgehen, während allerdings die neue Fassung den Vorzug verdient, so möge es genügen auf jene Publication zu verweisen.

Man muss sich auf der anderen Seite davor hüten, JOHANN's Leistung zu überschätzen. Das zu sagen liegt deshalb Veranlassung vor, weil seine Ausdrucksweise von modernen Geometern leicht missverstanden werden kann. Wenn man von „überall gleichmässigen Flächen" hört, die die Kugeln als besonderen Fall unter sich fassen, wenn man (auf einem Zettel) liest: „Auf jeder gleichförmigen Fläche haben jede zwei ebene gleichförmige Linien entweder Nichts oder 1 oder 2 Punkte gemeinsam. Im ersten Falle lässt sich zeigen, dass eine gemeinsame Senkrechte da sei", so könnte man auf die Vermutung kommen, dass JOHANN, die Entdeckung BELTRAMI's vorausnehmend*, den Zusammenhang der absoluten Geometrie der Ebene mit der Geometrie auf den (im Euklidischen Raum liegenden) Flächen von constantem negativen Krümmungsmaass erkannt hätte. Wenn man, um diese Vermuthung zu prüfen, JOHANN's Aufzeichnungen durchgeht, so stösst man bald auf Widersprüche. Die überall gleichmässigen Flächen (deren Begriff übrigens auf WOLFGANG BOLYAI zurückgeht) sind, wie JOHANN wiederholt ausspricht, entweder Kugeln oder Grenzflächen (Parasphären) oder Ebenen oder einer Ebene parallele Flächen (Hypersphären), die im absoluten Raume liegen. Es werden also

* *Interpretazione di geometria non-Euclidea.* Giornale di mat. 6 (1868). Vergl. auch GAUSS' Werke. Bd. VIII, S. 254.

allerdings, wie JOHANN einmal sagt, „die Dreiecksformeln der Kugel, auf imaginäre Seiten angewendet, im hypersphärischen Dreiecke realisiert", allein diese von der Kugel und der Ebene verschiedenen Flächen existieren nur, wie er an einer anderen Stelle ausdrücklich constatiert, „wenn das XI. Axiom falsch ist".

II. Abschnitt.

Die Unbeweisbarkeit des elften euklidischen Axioms.

JOHANN BOLYAI schliesst den *Appendix* mit den Worten: „Es bliebe endlich übrig (um den Gegenstand ganz zu erschöpfen) zu beweisen, dass es (ohne irgend eine Voraussetzung) unmöglich ist zu entscheiden, ob Σ oder ein gewisses (und welches) S existiert: das möge jedoch für eine geeignetere Gelegenheit aufgespart werden". Ausführlicher äussert er sich hierüber in § 33 der schon erwähnten deutschen Bearbeitung des Appendix. Dort heisst es:

„I. Ob an sich eigentlich Σ oder S bestehen kann, bleibt hier (und, wie der Verfasser beweisen kann, für immer) unentschieden."

„II. Man hat nunmehr eine absolut wahre (d. i. von aller Voraussetzung freie) *ebene Trigonometrie*, worin jedoch die Grösse i und, ob sie vorhanden sei, durchaus unbestimmt bleibt, bis auf diese einzige Unbekannte aber alles bestimmt ist. Die *sphärische Trigonometrie* aber wurde in § 26 absolut gerechtfertigt; sodass die gewöhnliche bekannte sphärische Trigonometrie vom XI. Axiom garnicht abhängig und unbedingt wahr ist."

„III. Mittels dieser beiden Trigonometrien und einiger (in der Druckschrift § 32 angegebenen) Hülfssätze wird man der Auflösung aller Aufgaben der Raumlehre und Mechanik, welche die Analysis bei ihrer jetzigen Höhe in ihrer Gewalt hat, (in dem nunmehr keiner Erläuterung bedürfenden Sinne) mächtig, und die ganze Raumlehre lässt sich in besagtem Sinne von nun an nach der (zwischen gehörigen Schranken mit Recht gepriesenen) analytischen Methode der Neueren abhandeln."

„IV. Tritt nun auch der Beweis der Unmöglichkeit je zwischen Σ und S zu entscheiden hinzu (den der Verfasser gleichfalls be-

sitzt), so ist das Wesen des XI. Axioms vollends ergründet, die intricate Materie der Parallelen vollkommen durchdrungen und die bis zur Stunde (für die nach Wahrheit dürstenden Geister) so unglückselig geherrscht habende, die Lust zur Wissenschaft benommen und Zeit und Kräfte so vielen geraubt habende totale Sonnenfinsterniss für immer verschwunden. Und es *lebt* in dem Verfasser die vollkommen geläuterte Ueberzeugung, dass durch Aufklärung dieses Gegenstandes einer der *allerwichtigsten* und *allerglänzendsten* Beiträge zur wahren Bereicherung der Wissenschaft und somit zur Hebung des menschlichen Schicksals gemacht werde".

Leider haben sich Niederschriften der beiden Beweise, nämlich *erstens*, dass es *an sich* (durch logische Schlüsse) für immer unentschieden bleibe, ob Σ oder S bestehen kann, und *zweitens*, dass man auch nicht *praktisch* feststellen könne, ob in Wirklichkeit Σ oder S besteht, im Nachlasse nicht finden lassen. Mittheilungen über den zweiten Beweis hat JOHANN in der Kritik der *Geometrischen Untersuchungen* von LOBATSCHEWSKY gegeben, die in diesen Berichten veröffentlicht werden wird. Was den ersten Beweis angeht, so ist uns der Anfang eines Entwurfes erhalten, der folgendermaassen lautet:

„*Beweis der Unmöglichkeit das XI. Euklidische Axiom zu beweisen oder umzustossen.*"

„*Lehrsatz.* Ob, wenn $bn \parallel am$ ist, $bam + abn =$ oder $< 2R$ sei; ob für jede endliche Länge x das zugehörige X (§ 23 [des Appendix]) $=$ oder > 1 sei; ob, wenn bnn in bam liegt, jede zwei Gerade amm, bnn, aus den Endpunkten einer dritten ab, in einer Ebene, innere Winkel bam, abn mit ab bildend, deren Summe $< 2R$ ist, sich schneiden, oder auch dabei ein Nichtschnitt statthaben könne, kurz, ob die EUKLID'sche Raumlehre oder irgend ein antieuklidisches System in der Wirklichkeit bestehe, lässt sich durch keine logischen Schlüsse entscheiden. Nur so viel lässt sich bei $bn \parallel am$ herausbringen, dass die Summe $bam + qbn$ nicht $> 2R$, ferner jedes X nicht < 1. Ob (im Sinne des § 20) i endlich oder unendlich sei, bleibt jedem Verstande, welchem es nicht unmittelbar klar ist, ein unenthülltes Geheimniss. Da jedoch eine solche axiomatische Anschauung keinem mensch-

lichen Verstande einleuchtend ist und je sein kann, so bleibt es ewig ein Räthsel."

Ferner ist ein Briefumschlag mit JOHANN's Adresse vorhanden, auf dessen Innenseite dieser, der Briefumschläge oft zu Notizen verwendete, folgende Bemerkung eingetragen hat:

„Durch die Trigonometrie geht es also nicht: bei aller Anwendung derselben findet man nur Gereimtheiten im unbestimmten Systeme, nie erfolgt die Bestimmung des Systems daraus. Womit denn der Beweis der Unmöglichkeit i zu bestimmen, vollendet ist."

„Kann man sich bei diesem Umstande beruhigen? Gar sehr wohl! Und schön genug bleibt die Raumlehre doch. Es liegt eben in der Natur der Sache, dass dieses nicht durch logische Schlüsse, [sondern] nur durch unmittelbare Anschauung erkannt werden könne. Ja, selbst auch für Engel ist es unzugänglich, wenn sie es nicht unmittelbar erschauen. Es giebt nur ein Wesen, dessen Anschauung die ganze Natur offen steht: Gott, den Raummeister."

Hieraus wird man schliessen dürfen, dass JOHANN seinen Beweis der Unmöglichkeit das XI. Axiom zu beweisen darauf gegründet hat, dass *die Anwendung der nichteuklidischen Trigonometrie auf keinen Widerspruch führe*. Diese Vermuthung wird durch verschiedene Aeusserungen JOHANN's bestätigt, die allerdings erst aus einer späteren Zeit, wohl aus den Jahren nach 1851, stammen.

„Man erhält", so heisst es einmal, „bei der Analyse eines Systems [von Punkten] in der Ebene offenbar ganz dieselben Formeln wie auf der Kugel, und da nun auf der Kugel bei vollständiger Analyse stets Consequenz gefunden werden muss, da die Kugeltrigonometrie *absolut* gilt: so ist klar, dass ebenso in der Ebene bei jeder Betrachtung von Punktsystemen ewig Consequenz bestehen müsse. Daraus ist denn evident, dass aus S in einer Ebene nie [ein Widerspruch hergeleitet werden kann]. Auch direct kann man nicht zur Bestimmung von i gelangen. Denn welchen Weg man auch immer in der Ebene befolgen mag, welchen Theil der Ebene immer betrachten, so kann man denselben sofort *absolut* vollständig ausdrücken, was oft das Meiste ist, was man bisher leisten kann, und es erfolgt keine Bestimmung von i daraus. Aber i bleibt ja doch nicht *völlig* unbestimmt.

Es lässt sich vielmehr zeigen, dass, *wenn* der Ausdruck des ebenen Dreiecks so aussieht:

$$\sin + \frac{b}{r} : \sin + \frac{c}{r} \backsim \sin ac^*,$$

bei $r \backsim i$, dann i weder ein gemischter Stand, noch 0, sondern ein glatter Stand** sein müsse. Denn u. s. w. Aber ob i endlich oder unendlich sei, bleibt bei Betrachtung in einer Ebene ewig unentschieden."

Wenn JOHANN hinzufügt: „Nun ist aber die Frage, ob nicht etwa Betrachtungen im Raume doch zur Rechtfertigung von Σ verhelfen könnten", so formuliert er damit einen Einwand, den er später gegen seinen alten Beweis erhoben hatte. „Bei der lateinischen Herausgabe der Grundzüge der neuen selbständigen Raumlehre hoffte der Verfasser noch die Unmöglichkeit etc. zeigen zu können. Bei näherer Untersuchung zeigte sich vielmehr, dass sowohl eine Möglichkeit da sei, für das EUKLID'sche System zu entscheiden, als auch eine des Unentschiedenbleibens, und dass man (solange die Sache noch unentschieden ist) weder von einer Entscheidbarkeit, noch von einer Unentscheidbarkeit a priori einen Beweis geben könne, sodass ein weiterer Versuch zu entscheiden einem Schatzgräber gliche . . . Das XI. Axiom ist entweder erweislich oder unerweislich. Eine Unerweisbarkeit lässt sich durchaus nicht beweisen, und auch ein Beweis davon könnte nur durch die That selbst, d. i. durch einen wirklichen Beweis, nachgewiesen werden."

Wann JOHANN dazu gelangt ist, die Unvollständigkeit seines Beweisversuches zu erkennen, hat sich nicht mit Sicherheit feststellen lassen. Es scheint, dass ihm schon um 1837 Bedenken gekommen sind, denn in Randbemerkungen zu der deutschen Bearbeitung des Appendix, die ungefähr aus dieser Zeit stammen, äussert er sich so:

„Ob entschieden werden und die Raumlehre auch in dieser Hinsicht vollendet werden könne, welches von beiden statthabe,

---

* [Dabei bedeuten a, b, c die Seiten des Dreiecks, ac bezeichnet den Winkel zwischen a und c, und der Winkel zwischen a und b wird als Rechter angenommen.]

** [Glatter Stand = reelle Zahl, gemischter Stand = complexe Zahl.]

ob i endlich oder unendlich, ist bis jetzt unbekannt. Soviel ist gewiss, dass eine Entscheidung, wenn sie möglich ist, nur auf dem hier angedeuteten Wege errungen werden kann*. Insofern jedoch, wenn S logisch denkbar ist, auch Σ [es ist] (als besonderer Fall), nicht aber umgekehrt S, scheint Σ mehr für sich zu haben, obschon keineswegs ausgemacht."

Die Untersuchung, ob es möglich sei, Σ durch Betrachtungen im *Raume* zu beweisen, hat JOHANN in folgender Weise durchgeführt. Da *drei* Punkte stets in einer Ebene liegen, betrachtet er zunächst ein *System von vier Punkten im Raume*, die die Ecken eines Tetraeders a b c d bilden. Durch die 6 Kanten a, b, c, d, e, f sind zunächst die 12 Winkel ab, ac, .. bestimmt, und daraus ergeben sich dann die 6 „zweiebnigen" Winkel des Tetraeders, jedoch jeder Winkel auf zwei verschiedene Arten. „Es ist also zu untersuchen, ob daraus eine Bestimmung von i erfolge oder nicht". Indem JOHANN zur Abkürzung $\cos + a$ mit a, $\sin + a$ mit A bezeichnet, erhält er zunächst die Gleichungen:

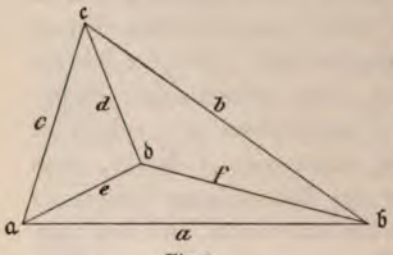


Fig. 1.

$$\cos ac = \frac{b - ac}{AC}, \qquad \cos df = \frac{b - df}{DF}$$

$$\cos ae = \frac{f - ae}{AE}, \qquad \cos de = \frac{e - de}{DE}$$

$$\cos ce = \frac{d - ce}{CE}, \qquad \cos fe = \frac{a - fe}{FE},$$

und hieraus folgen für den Winkel zwischen den durch a und e, e und c bestimmten Ebenen, den er aec nennt, die beiden Gleichungen:

$$\text{I. } \cos aec = \frac{\cos ac - \cos ae \cos ce}{\sin ae \sin ce} = \frac{\frac{b - ac}{AC} - \frac{f - ae}{AE} \cdot \frac{d - ce}{CE}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{f - ae}{AE}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{d - ce}{CE}\right)^2\right]}}$$

* [Indem nämlich die absolute Raumlehre vollständig durchgeführt und untersucht wird, ob schliesslich ein Widerspruch herauskommt.]

$$\text{II. } \cos aec = \frac{\cos df - \cos de \cos fe}{\sin de \sin fe} = \frac{\frac{b-df}{DF} - \frac{c-de}{DE} \cdot \frac{a-fe}{FE}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{c-de}{DE}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{a-fe}{FE}\right)^2\right]}},$$

deren rechte Seiten übereinstimmen müssen, wenn S auf keinen Widerspruch führen soll. Die Ausführung der Rechnung ergiebt in der That die Identität beider Ausdrücke. Das Entsprechende gilt für die fünf anderen Winkel, sodass demnach „durch Betrachtung von 4 die Spitzen eines Tetraeders bildenden Punkten sich nichts ergiebt, da auch dann Consequenz herrscht, man möge wie immer dieselben dadurch bestimmten Grössen ausdrücken aus das Ganze bestimmenden Grössen".

„Ver- und untersuchen wir also", fährt JOHANN fort, „ein *System von fünf Punkten.*" Wird zu den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ ein fünfter $\mathfrak{e}$ hinzugefügt, der nicht mit je dreien von ihnen in einer Ebene liegt, so ist die Lage von $\mathfrak{e}$ durch die Länge der Verbindungslinien $\mathfrak{ae}, \mathfrak{be}, \mathfrak{ce}$, die JOHANN mit k, h, i bezeichnet, vollständig bestimmt, und es müssen sich daher durch die 9 Grössen $a, b, c, d, e, f, h, i, k$ die Länge g der Verbindungslinie $\mathfrak{de}$ und die in der Figur vorhandenen 30 Dreiecks- und 30 Ebenenwinkel ausdrücken lassen. Dabei stellt sich wiederum heraus, dass manche dieser Stücke sich auf zwei und mehr verschiedene Arten berechnen lassen, und es fragt sich daher, ob alsdann unter Anwendung der absoluten Trigonometrie stets derselbe Werth herauskomme; im Besonderen ergiebt sich eine dreifache Bestimmung von g, da, sobald die 60 Winkel bekannt sind, je zwei der Winkel eg, dg, fg dazu hinreichen.

Mit diesem *System von 5 Punkten* hat sich JOHANN aufs eingehendste beschäftigt, wie es scheint, in der sicheren Erwartung, auf diesem Wege einen Beweis des XI. Axioms zu erlangen. Eine Zeit lang hat er sogar geglaubt, das Ziel erreicht zu haben, indem er einmal keine Identität erhielt. „Somit ist S falsch", ruft er triumphierend aus und beginnt mit der Abfassung einer Schrift, deren Titel lautet:

„Beweis des bis nun auf der Erde immer noch zweifelhaft gewesenen, weltberühmten und, als der gesammten Raum- und Bewegungslehre zum Grunde dienend, auch in der That allerhöchst-

wichtigsten 11. Euklid'schen Axioms. Von Johann Bolyai von Bolya, k. k. Génie-Stabshauptmann in Pension."

Die Einleitung — weiter ist er nicht gekommen — enthält interessante biographische Notizen über seinen Vater und ihn selbst; da JOHANN dabei sagt, dass sein Vater „die Briefe von GAUSS soeben an die Universität Göttingen zurückgesandt" habe, so ergiebt sich als Abfassungszeit Juli 1856.

Später erkannte JOHANN, dass er sich getäuscht hatte, indem ein Rechenfehler vorlag, und dass also „in dem System von 5 Punkten Consequenz herrsche". „Auf diese Weise kann man," meint er, „zu einem System von 6 Punkten übergehen, allein die Mühseligkeit der Arbeit bei der Auflösung eines Systems von 6 Punkten ist wohl im Stande, selbst den muthigsten Rechner stutzig zu machen".

Es ergiebt sich somit, dass JOHANN BOLYAI niemals zu einer Gewissheit darüber gelangt ist, ob *S im Raume* auf einen Widerspruch führe oder nicht. In der That liegt hier eine Schwierigkeit vor, die zu überwinden ganz andere Mittel erforderlich gewesen sind, als sie JOHANN zu Gebote standen*. Dass jedoch JOHANN die Frage, ob sich das XI. Axiom durch räumliche Constructionen beweisen lasse, überhaupt aufgeworfen hat, macht seinem Scharfsinn Ehre und verdient um so mehr anerkannt zu werden, als er dadurch über LOBATSCHEWSKY hinausgegangen ist, der zwar bemerkt, dass die imaginäre Geometrie auf keinen Widerspruch führen könne, da die Gleichungen zwischen den Winkeln und Seiten eines Dreiecks in die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie übergehen, wenn man die Seiten als imaginär ansieht**, der sich aber — auch in seinen späteren Veröffentlichungen — bei der Frage der Widerspruchslosigkeit stets auf die Ebene beschränkt hat.

---

* Die Widerspruchslosigkeit von *S im Raume* hat wohl zuerst Herr F. KLEIN (auf Grund der Untersuchungen von CAYLEY) nachgewiesen: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie*, Math. Ann. Bd. 4 (1871), S. 573—625, Bd. 6 (1873), S. 112—145.

** *Anfangsgründe der Geometrie*, Kasaner Bote (1829), S. 634—635 (vgl. F. ENGEL, *Nikolaj Lobatschefskij*, Leipzig 1898. S. 65).

III. Abschnitt.

Die Cubierung des Tetraeders.

Die uns erhaltenen Aufzeichnungen, in denen JOHANN BOLYAI von seinen in dem Jahre 1830 beginnenden* Untersuchungen über die Cubierung des Tetraeders berichtet, stammen — mit einer Ausnahme — aus der Zeit um 1856. Ihre Entzifferung wurde dadurch erheblich erschwert, dass er sich einer grossen Anzahl von Abkürzungen und neuen Bezeichnungen bedient, deren Bedeutung erst zu ermitteln war. Da diese Neuerungen nicht nachahmenswerth erscheinen, ist der Text in die übliche Formelsprache übertragen worden.

JOHANN hatte zwar seinem Vater versichert, dass er die *allgemeine* Auflösung des Tetraeders gefunden habe, in seinen Aufzeichnungen beschränkt er sich jedoch auf eine spezielle Art von Tetraedern, die entstehen, wenn in dem Eckpunkte c eines in b rechtwinkligen Dreiecks abc auf dessen Ebene eine senkrechte cd errichtet wird**, ohne anzugeben, wie man daraus die allgemeine Cubierung der Tetraeder gewinnen könne. Es verdient übrigens bemerkt zu werden, dass Tetraeder dieser besonderen Art auch bei LOBATSCHEWSKY*** und GAUSS† auftreten.

Nach diesen Vorbemerkungen gehe ich dazu über, die vier Methoden anzugeben, die JOHANN für die Cubierung von Specialtetraedern vorgeschlagen hat.

Erste Methode.

Zerlegung mittels Ebenen, die auf ab senkrecht stehen.

Auf einem halben Foliobogen, dessen Rückseite den Entwurf einer militärischen Meldung, datiert Lemberg, den 5. Mai 1832,

---

* *Briefwechsel Gauss-Bolyai.* S. 115.

** Jedes Specialtetraeder $abcb$ ist auf doppelte Art ein Specialtetraeder, es entsteht nämlich auch, wenn in dem Eckpunkte b des in c rechtwinkligen Dreiecks bcb auf dessen Ebene die Senkrechte ba errichtet wird.

*** *Anfangsgründe der Geometrie.* Kasaner Bote (1829), S. 594 (bei ENGEL a. a. O. S. 53).

† C. F GAUSS, *Werke* Bd. VIII. Göttingen 1900. S. 228.

enthält, findet sich folgende augenscheinlich aus derselben Zeit stammende Aufzeichnung:

„**Aufgabe.** Um in S den Inhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Körpers) $\mathfrak{abcda} = T$ zu bestimmen, sei zuerst

$\mathfrak{cd} \llcorner (\mathfrak{cba} = R)$,

$\mathfrak{ab} \llcorner (\mathfrak{bcd} = R)$.

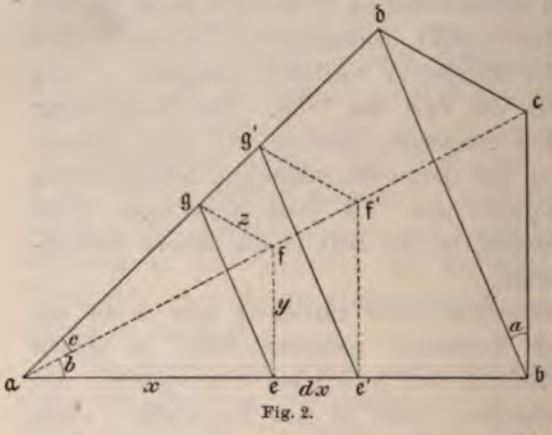


Fig. 2.

Das Stück $\mathfrak{ae}$ von $\mathfrak{ab}$ oder die Abscisse $\mathfrak{ae}$ heisse x, die auf $x\llcorner$te Ordinate $\mathfrak{ef}$ y und die auf $\mathfrak{af}$ $\llcorner$te zweite Ordinate $\mathfrak{fg}$, z.“

„Bewegt sich $\triangle \mathfrak{efg}$ längs $\mathfrak{ab}$ so fort, dass stets $\mathfrak{ef} \llcorner \mathfrak{ab}$ und in $\mathfrak{abcc}$ bleibt, so ist, wenn der Weg von $\mathfrak{e}$, dx heisst, der durch $\triangle \mathfrak{efg}$ erzeugte Körper

$$K = \pm \tfrac{1}{2}\, dx \cdot \sin + y \cdot z.“*$$

„Nun ist [aus den rechtwinkligen Dreiecken $\mathfrak{efg}$ und $\mathfrak{aef}$ für $i = 1$:]

$$(1) \qquad \sin + y = \frac{\cot a}{\cot + z} = \frac{\alpha}{\cot + z},$$

$$(2) \qquad \sin + x = \frac{\cot b}{\cot + y} = \frac{\beta}{\cot + y},$$

$$\left(\text{und aus (1)} \quad \cot + y = \frac{\sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}}{\alpha}\right), \text{ also}$$

$$x = \pm \arcsin \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}},$$

$$dx = \pm \frac{\alpha\beta \cot + z\, d + z}{\sin^2 + z\,(\cot^2 + z - \alpha^2)\sqrt{1 - \dfrac{\alpha^2\beta^2}{\cot^2 + z - \alpha^2}}\ \sqrt{\cot^2 + z - \alpha^2}}$$

$$= \pm \frac{\beta \cdot d + z \cdot \cos + z \cdot \operatorname{tg} a}{\left(\dfrac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\cos^2 + z\left(1 + \dfrac{\alpha^2}{\sin^2 b}\right) - \dfrac{\alpha^2}{\sin^2 b}}}.$$

* [Die Herleitung dieser Formel, die Johann auf einem besonderen Zettel verzeichnet hat, wird nachher mitgetheilt werden.]

Aber [aus dem rechtwinkligen Dreikant $\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$:]

$$\cot a = \cot c \cdot \sin b, \qquad \frac{\alpha}{\sin b} = \cot c,$$

mithin

$$dx = -\frac{\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} c \cdot \beta \cdot d + z \cdot \cos + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}},$$

folglich [unter Benutzung von (1):]

$$K = -\frac{\frac{1}{2}\beta \cdot \operatorname{tg} c \cdot z \cdot d + z \cdot \sin + z}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}}.$$

Lässt man $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ an $\sim \infty$ wachsen, so ist $b, c \sim 0$, also [$\cos b$,] $\cos c \sim 1$ und

$$\beta \cdot \operatorname{tg} c = \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \frac{\sin c}{\cos c} \sim \frac{c}{b}\left(\text{da } \frac{\sin c}{\sin b} \sim \frac{c}{b}\right) = \operatorname{tg} a,$$

also

$$K \sim \frac{+\frac{1}{2}\operatorname{tg} a \cdot z d + z}{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\operatorname{tg} a \cdot + z d + z}{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1} \text{ “*}.$$

Auf einem beiliegenden Zettel, dessen Rückseite den Anfang eines zweiten Entwurfes derselben militärischen Meldung enthält, findet sich (neben anderen Notizen) eine Herleitung der Formel für K angedeutet, die in folgender Weise dargestellt werden kann.

Auf der Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = u$ mögen in derselben Ebene die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{d} = v$ senkrecht stehen. In $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ sollen die Lothe $\mathfrak{c}\mathfrak{e} = \mathfrak{d}\mathfrak{f} = w$ auf der Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ errichtet und alsdann die Ebenen durch $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{e}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ gelegt werden. So entsteht ein durch fünf Ebenen begrenzter Körper, dessen Inhalt mit K bezeichnet werde.

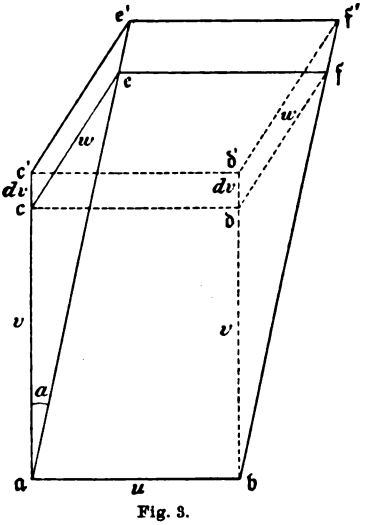


Fig. 3.

* Es folgt noch der Anfang eines Ansatzes zur directen Bestimmung eines solchen „asymptotischen Tetraeders“, der jedoch nicht erkennen lässt, worauf Johann hinaus wollte.

Jetzt möge v um dv wachsen, indem $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}\mathfrak{d}$ um $\mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \mathfrak{d}\mathfrak{d}' = dv$ verlängert werden. Errichtet man in $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{d}'$ Lothe $\mathfrak{c}'\mathfrak{e}$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{f}'$, die die Ebene $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{e}\mathfrak{f}$ in $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{f}'$ schneiden, so erfährt der Inhalt einen Zuwachs dK, der, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, gleich dem Inhalt des Körpers ist, der entsteht, wenn auf der Grundfläche $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ lauter Lothe der Länge w errichtet werden. Wenn aber auf einer ebenen Grundfläche des Inhaltes p lauter Lothe der Länge q errichtet werden, so entsteht ein Körper, für dessen Inhalt J in § 32 III des Appendix die leicht zu beweisende Formel:

$$J = -\tfrac{1}{4} p \sin + 2q + \tfrac{1}{2} pq$$

angegeben ist; dabei hat man wie im Vorhergehenden $i = 1$ zu setzen. Im vorliegenden Falle unterscheidet sich der Inhalt der Grundfläche $\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ nur um eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung von dem Producte

$$dv \cdot \mathfrak{c}\mathfrak{d} = dv \cdot u \cos + v,$$

und es darf daher zum Zwecke der Integration

$$dK = -\tfrac{1}{4} dv \cdot u \cos + v \cdot \sin + 2w + \tfrac{1}{2} dv \cdot w \cdot u \cos + v$$

gesetzt werden. Nun ist aber aus dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{e}$, wenn der Winkel $\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ mit a bezeichnet wird:

$$\cot + w = \frac{\cot a}{\sin + v} = \frac{a}{\sin + v},$$

folglich

$$\sin + w = \frac{\sin + v}{\sqrt{a^2 + \sin^2 + v}}, \qquad \cos + w = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \sin^2 + v}}$$

und

$$\sin + 2w = \frac{2a \sin + v}{a^2 + \sin^2 + v},$$

so dass sich schliesslich für dK der Ausdruck ergiebt:

$$dK = -\tfrac{1}{2} u \cos + v dv \frac{a \sin + v}{a^2 + \sin^2 + v} - \tfrac{1}{2} u \cos + v dv \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{a}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4} au \cdot \frac{2 \sin + v d(\sin + v)}{a^2 + \sin^2 + v} - \tfrac{1}{2} u \cdot d(\sin + v) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin + v}{a}\right).$$

Hieraus findet man durch Integration nach v von 0 bis v:

$$K=\Big[-\tfrac{1}{4}\alpha u \log(\alpha^2+\sin^2+v)-\tfrac{1}{2}u\cdot\sin+v\operatorname{arctg}\frac{\sin+v}{\alpha}\Big]_0^v$$
$$+\tfrac{1}{2}u\int_0^v \sin+v\,d\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin+v}{\alpha}\right)=-\tfrac{1}{2}u\sin+v\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin+v}{\alpha}\right),$$

wofür man auch schreiben kann

$$K=-\tfrac{1}{2}u\sin+v\cdot w.$$

Alles das gilt für beliebiges u. Ist aber u unendlich klein, wie es bei dem vorher betrachteten Körper K der Fall ist, so wird der Inhalt der Grundfläche $abcb$ des Körpers K

$$=-u\sin+v,$$

während $w=ce$ als seine Höhe angesprochen werden kann. „Der Körper K ist also *(absolut)* = dem halben Producte aus der Grundfläche und der Höhe."

JOHANN hat noch eine Bemerkung hinzugefügt, die von Interesse ist. Wenn man die Höhe w über alle Grenzen wachsen lässt, so wächst auch der Inhalt K über alle Grenzen, während der Inhalt der begrenzenden Flächen endlich bleibt. Er bezeichnete diese Erscheinung als „merkwürdig". Das Paradoxe, das darin liegt, verschwindet aber, wenn man bedenkt, dass der Körper zwar von Flächen endlichen Inhalts begrenzt ist, dass diese aber sich ins Unendliche erstrecken.

Soweit JOHANN. Bedenkt man nunmehr, dass GAUSS am 6. März 1832 an WOLFGANG BOLYAI über die Arbeit JOHANN's, den Appendix, geschrieben und jenen gebeten hatte, JOHANN aufzufordern, er möge sich mit der Aufgabe beschäftigen:

„den Cubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu berechnen",

beachtet man ferner, dass WOLFGANG den Brief an JOHANN gesandt hat*, so erscheint es als äusserst wahrscheinlich, dass die soeben mitgetheilten Aufzeichnungen JOHANN's auf Veranlassung des Briefes von GAUSS niedergeschrieben worden sind, und damit stimmt auch vortrefflich das Datum des 5. Mai 1832.

Höchst merkwürdig ist, dass *die Methode, deren sich* GAUSS *zur Cubierung des Tetraeders bedient hatte, genau dieselbe ist wie*

* *Briefwechsel Gauss-Bolyai.* S. 154.

die von JOHANN. Das zeigt eine aus dem März 1832 stammende Notiz, die aus GAUSS' Nachlass in den Werken (Bd. VIII, S. 228) abgedruckt ist: GAUSS hat genau dasselbe Specialtetraeder (das bei ihm nur 3142 statt $abcd$ heisst), genau dieselbe Zerlegung durch Ebenen senkrecht zu ab (31).

In den späteren Aufzeichnungen JOHANN's finden sich noch Umgestaltungen der Formel

$$T = \tfrac{1}{2}\beta \operatorname{tg} c \cdot \int_0^z \frac{z\, d(\cos + z)}{\left(\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 a} - 1\right)\sqrt{\frac{\cos^2 + z}{\cos^2 c} - 1}},$$

deren Zweck die Ausführung der Integration mittelst elementarer Functionen („in endiger Form") ist. Da die hierauf gerichteten Bemühungen der Natur der Sache nach vergeblich bleiben mussten, soll von ihrer Mittheilung abgesehen werden.

Zweite Methode.

Zerlegung mittels Ebenen, die durch ab *oder* cd *gehen.*

Auf dem bereits erwähnten Zettel, der der Aufzeichnung über die Cubierung des Tetraeders aus dem Mai 1832 beigelegt ist, findet sich auch noch folgende Bemerkung:

„Dreht sich $\triangle abc$ [Fig. 2] um ab, so ist das Differential dK des durch dasselbe erzeugten rechten Kegels

$$= -2\pi dx \sin^2 + y^*;$$

aber

$$x = -\arc\sin\frac{\beta}{\cot + y},$$

$$dx = -\frac{d\frac{\beta}{\cot + y}}{\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\cot^2 + y}}} = -\frac{\beta \cdot -d\cot + y}{\cot + y\sqrt{\cot^2 + y - \beta^2}};$$

also

---

* [Gemeint ist die Scheibe, die durch Rotation von $ee'ff'$ um die Axe ab entsteht. Die angegebene Formel findet sich im Appendix § 32 VII, Errata; jedoch soll hier wieder π den *Quadranten* bedeuten.]

$$dK = + \frac{2\pi\beta d + y \cdot \sin^2 + y}{\cos + y \sqrt{\cos^2 + y - \beta^2 \sin^2 + y}}$$
$$= - \frac{2\pi \cdot d \cos + y \cdot \sin + y}{\cos + y \sqrt{\frac{\cos^2 + y}{\cos^2 b} - 1}}.$$

Setzt man, um den einfachsten und zugleich merkwürdigsten Fall zu haben, $b \backsim 0$, so wird

$$dK \backsim \frac{2\pi d \cos + y}{\cos + y}$$

und

$$K = 2\pi \log \cos + y + (C = 0)$$

$= 2\pi \cdot$ Abscisse von y in L.

Wächst nun bei dem rechtwinkligen asymptotischen Tetraeder T a um da, so ist offenbar

$$dT = \frac{da}{4\pi} \cdot 2\pi \log \cos + \mathfrak{eg}$$

und [in dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{efg}$:]

$$\cot + \mathfrak{eg} = \cot + y \cdot \cos a,$$

also

$$\cos + \mathfrak{eg} = \frac{\cot + y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 + y \cdot \cos^2 a}}$$

und

$$T = \tfrac{1}{2} \int da \log \frac{\cot + y \cdot \cos a}{\sqrt{1 + \cot^2 + y \cdot \cos^2 a}}.$$ "

In Aufzeichnungen, die ungefähr aus dem Jahre 1856 stammen, hat JOHANN diesen Gedanken weiter ausgeführt. Nachdem er die im Vorhergehenden mitgetheilte erste Methode auseinandergesetzt hat, sagt er:

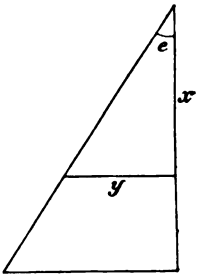


Fig. 4.

„Den Inhalt des Tetraeders in S zu bestimmen, eröffnet sich noch ein schöner Weg, wenn man zuerst den rechten Kegel ausdrückt: was (unter den unendlich vielen möglichen) auf zwei einfachere Arten geschehen kann; nämlich einmal mit der Grundfläche parallele Schnitte*; zweitens durch die Axe senkrechte Ebenen. Auf letztere Art ist:

* [Parallel bedeutet hier äquidistant.]

$$\cot \measuredangle y = \frac{\cot c}{\sin \measuredangle x}; \qquad d(\text{Kegel}) = -\frac{dx \cdot \pi \cdot \sin^2 \measuredangle x}{\sin^2 \measuredangle x + \cot^2 e}.$$

(Appendix S. 18. VII. Errata). Dann das Tetraeder durch die cd enthaltenden Ebenen geschnitten."

Daneben findet sich eine der hier als Figur 5 bezeichneten ähnliche Figur (jedoch ohne Bezeichnung der Punkte u. s. w. durch Buchstaben). Der von JOHANN angedeutete Zusammenhang mit dem geraden Kegel besteht darin, dass das Volumenelement ctt'd des Tetraeders auch als Element eines Kreiskegels mit der Axe cd angesehen werden kann, der durch Drehung des rechtwinkligen Dreiecks cdt erzeugt wird.

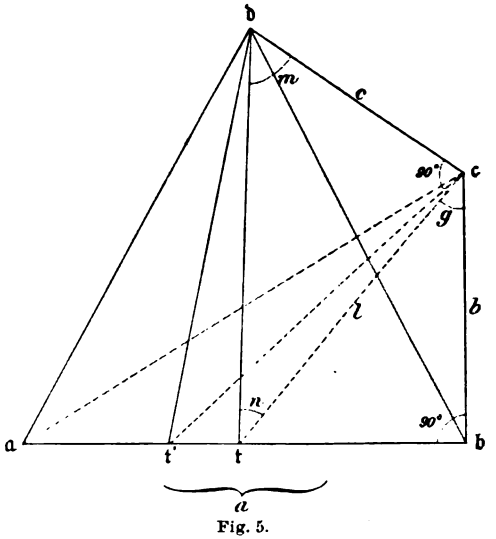


Fig. 5.

An einer anderen Stelle ist JOHANN auf diesen Gedanken zurückgekommen. Dort heisst es:

„Ist ab [Fig. 5] senkrecht auf bc, cd senkrecht auf abc, $b = bc$, t in ab, g gleich dem Winkel bct, $l = ct$, m gleich dem Winkel cdt, n gleich dem Winkel ctd, T [das Volumen des Tetraeders] abcd, so ist:

$$\cot \measuredangle l = \cot \measuredangle b \cdot \cos g,$$

$$\cot m = \cot \measuredangle l \cdot \sin \measuredangle c = \cot \measuredangle b \cdot \cos g \cdot \sin \measuredangle c,$$

$$\cot n = \cot \measuredangle c \cdot \sin \measuredangle l = \frac{\cot \measuredangle c}{\sqrt{1 + \cot^2 \measuredangle b \cdot \cos^2 g}},$$

$$\frac{dT}{dg} = \frac{1}{4}\frac{\cos^2 + c\cdot\cos^2 + l}{\sqrt{1+\cot^2+l\cdot\sin^2+c}}$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2+l\cdot\sin^2+c}}\right)\log\frac{\cot+b\cdot\cos g}{\sqrt{1+\cot^2+b\cdot\cos^2 g}}$$
$$=\frac{1}{4}\frac{\cos^2+c\cdot\cot^2+b\cdot\cos^2 g}{(1+\cot^2+b\cdot\cos^2 g)\sqrt{1+\cot^2+b\cdot\cos^2 g\cdot\sin^2+c}}$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2+b\cdot\cos^2 g\cdot\sin^2+c}}\right)\log\frac{\cot+b\cdot\cos g}{\sqrt{1+\cot^2+b\cdot\cos^2 g}}.$$

Aber dieser Ausdruck* ist noch viel verwickelter als der auf dem ersten Wege erhaltene, indem hier nicht nur zwei Quadratwurzeln, sondern auch ein Logarithmus vorkommt."

Es ist ein eigenthümliches Zusammentreffen, dass dieser Weg zur Berechnung des Tetraeders abcb genau derselbe ist, den LOBATSCHEWSKY in seiner Abhandlung: *Ueber die Anfangsgründe der Geometrie* (Kasaner Bote [1829], S. 594—596; vgl. auch F. ENGEL, a. a. O. S. 53—54) eingeschlagen hatte.

Dritte Methode.

Zerlegung mittels Hypersphären, die der Grundfläche abc *parallel sind.*

Den beiden ersten Methoden hat JOHANN (in Aufzeichnungen ungefähr aus dem Jahre 1856) zwei neue hinzugefügt, ohne sie freilich vollständig durchzuführen. Die erste besteht in der Zerlegung des Tetraeders abcb mittels Hypersphären, die der Grundfläche parallel sind.

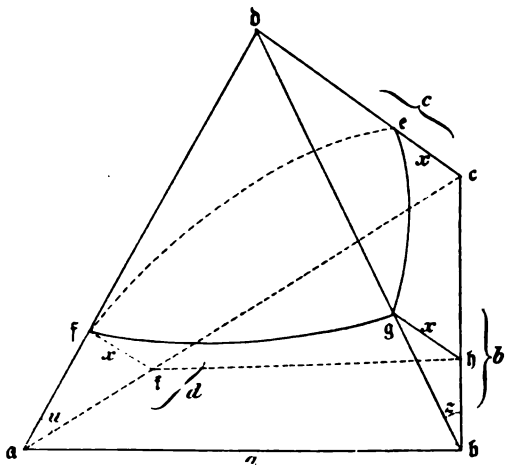


Fig. 6.

„[Es sei] ab senkrecht auf bc, abc auf

* [Der Ausdruck ist fehlerhaft; die richtige Formel findet man in LOBATSCHEWSKY'S *Anfangsgründen*.]

$\mathfrak{cd}$, $a = \mathfrak{ab}$, $b = \mathfrak{bc}$, $c = \mathfrak{cd}$, $\mathfrak{e}$ in $\mathfrak{cd}$, $x = \mathfrak{ce}$. Die durch $\mathfrak{e}$ [gelegte] mit $\mathfrak{abc}$ parallele Hypersphäre schneide das Tetraeder $\mathfrak{abcd}$ in dem hypersphärischen Dreieck $\mathfrak{feg}$. Ist $\mathfrak{gh}$ senkrecht auf $\mathfrak{bc}$ [und der Winkel $\mathfrak{gbh} = z$], so ist:

$$\cot z = \cot + c \cdot \sin + b,$$

$$\sin + \mathfrak{bh} = \frac{\cot z}{\cot + x} = \frac{\cot + c \cdot \sin + b}{\cot + x},$$

$$\mathfrak{ch} = b - \arcsin\left(\frac{\cot + c \cdot \sin + b}{\cot + x}\right).$$

Ist desgleichen $\mathfrak{ff}$ senkrecht auf $\mathfrak{ac}$, $d = \mathfrak{ac}$ [und der Winkel $\mathfrak{faf} = u$], so ist

$$\cot u = \cot + c \cdot \sin + d,$$

$$= \cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b},$$

$$\sin + \mathfrak{af} = \frac{\cot u}{\cot + x} = \frac{\cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b}}{\cot + x},$$

$$\left[\mathfrak{cf} = d - \arcsin\left(\frac{\cot + c \cdot \sqrt{1 - \cos^2 + a \cdot \cos^2 + b}}{\cot + x}\right)\right].$$

Nun ist das Dreieck $\mathfrak{hcf}$ [bekannt] aus $\mathfrak{ch}$, Winkel $\mathfrak{hcf}$, $\mathfrak{cf}$, woraus auch die Winkel bei $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{f}$ nach den Formeln für die allgemeinen Dreiecke berechnet werden können. Dann [lässt sich] dadurch [das hypersphärische] Dreieck $\mathfrak{gef}$ berechnen [, da es dieselben Winkel, wie seine Projection $\mathfrak{hcf}$ auf die Ebene des Dreiecks $\mathfrak{abc}$ hat und seine krummlinigen Seiten denen dieses Dreiecks proportional sind], womit man das Differential des Tetraeders [, nämlich] das zwischen den zwei parallelen Flächen [im Abstande x und $x + dx$] begrenzte Stück des Tetraeders $\mathfrak{abcd}$ erhält, auf dessen Integration nunmehr alles ankommt."

JOHANN fügt hinzu, dass dieser Weg allerdings verdiene ausgeführt zu werden, dass jedoch allem Anschein nach die Formeln verwickelt ausfallen würden.

Vierte Methode.

Zurückführung auf asymptotische Tetraeder.

Den Gedanken zu einer vierten Methode, der vielleicht auch aus der Jugendperiode stammt, enthält die folgende kurze Notiz:

„Am einfachsten dürfte man wohl zum Ausdruck des Tetrae-

ders gelangen, wenn man $ab \perp bcb$, Winkel bcb gleich R, bn, $ap \parallel cb$ annimmt und den Inhalt von der dreikantigen endlosen Röhre sowohl der Grundfläche $\triangle abc$ als jener $\triangle abb$ sucht und letztere Röhre von der ersteren abzieht, indem der Unterschied hier offenbar $abcb$ ist. Die Grösse der Röhre auf dem Dreieck abb findet man einfachst so ... aber endig wird es wohl ebensowenig sich ausdrücken lassen."

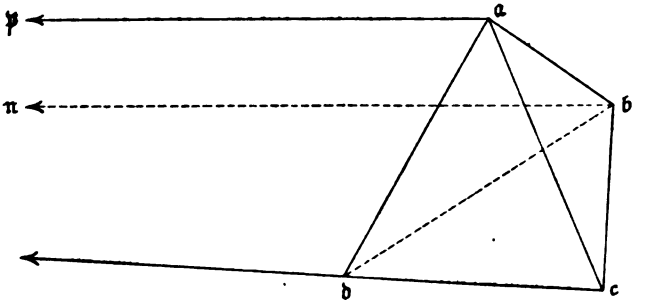


Fig. 7.

Asymptotische Tetraeder, wie die von JOHANN betrachteten, kommen auch bei LOBATSCHEWSKY vor (Kasaner Bote [1829], 583—585, S. 600—602; vgl. ENGEL, a. a. O. S. 48, 56—57), der eine sehr einfache, directe Methode zu ihrer Berechnung angegeben hat. Um so interessanter wäre es gewesen, wenn die Methode, die JOHANN zur *directen* Berechnung asymptotischer Tetraeder anwenden wollte, sich in seinen Papieren hätte finden lassen, was leider trotz sorgfältigen Suchens nicht gelungen ist; denn der S. 299 erwähnte Anfang eines Ansatzes zur directen Bestimmung eines asymptotischen Tetraeders giebt darüber keine Auskunft.

17.

UEBER DIE CLASSIFICATION DIOPTRISCHER SYSTEME.

Von HERMANN STRAUSS, Adjunct am Polytechnikum zu Budapest.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 21. Mai 1900 durch das ord. Mitglied Alois Schuller.

Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö". (Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger), Bd. XVIII, p. 200—232.

Die aus kugelförmigen brechenden Flächen zusammengesetzten Systeme pflegt man in Hinsicht auf ihre optische Wirkung in collective und dispansive Systeme einzutheilen. In dieser Benennung der Klassen herrscht allgemeine Uebereinstimmung, hingegen finden sich in deren Definitionen wesentliche Unterschiede und selbst unbedingt irrige Behauptungen; so wird z. B. im Falle einer einzelnen brechenden Fläche allgemein behauptet, dass eine collective Fläche die Convergenz einfallender Strahlen immer vergrössere, eine dispansive Fläche hingegen immer verringere; wie ich später nachweisen werde, ist diese Unterscheidung in derartiger Allgemeinheit unhaltbar und irrig.

Bei einem Systeme von brechenden Flächen gebrauchen viele Autoren die Benennung: collectiv und dispansiv dem Sinne des Wortes gemäss und auch der historischen Entwickelung entsprechend zur Unterscheidung dessen, ob parallel einfallende Strahlen nach der Brechung convergent oder divergent aus dem System austreten und betrachten als Erkennungszeichen hiervon das Vorzeichen der GAUSS'schen zweiten Brennweite. Diese Classification ist insofern fehlerhaft, als man aus dem Vorzeichen der zweiten Brennweite nicht darauf folgern kann, ob parallel

einfallende Strahlen aus dem System als convergente oder divergente Strahlen austreten, wie dies Prof. SCHULLER auf graphischem Wege nachgewiesen hat. Es ist also das Kriterium der Classification irrig gewählt und durch ein entsprechendes zu ersetzen.

Neuere Autoren vollführen die Classification der Systeme rein auf Grund des Vorzeichens der zweiten Brennweite; aus diesem Vorzeichen kann man aber nur auf die aufrechte oder verkehrte Lage der Bilder folgern, keineswegs auf die Richtungsänderungen, welche die Strahlen während der Brechung erlitten haben; dessenungeachtet benennen sie die entstandenen zwei Klassen „collective" resp. „dispansive Systeme", was meiner Ansicht nach sowohl vom historischen als auch physikalischen Standpunkte aus nicht zu billigen ist.

Diese Differenzen und zum Theile irrigen Behauptungen, welche bei der Definition collectiver und dispansiver Systeme auftreten, geben mir den Anlass, mich mit folgenden Fragen zu befassen:

1. Welche Eigenschaften der optischen Systeme eignen sich zweckmässig zu einer Classification derselben und welchen physikalischen Werth haben die so gewonnenen Classificationen?

2. Auf welche Weise geschieht die Bestimmung der als Basis der Classification gewählten Eigenschaft aus den gegebenen Constanten des Systems?

3. Inwiefern sind die gebräuchlichen Classificationen mangelhaft oder fehlerhaft?

I.

Für die Classification dioptrischer Systeme rücksichtlich ihrer optischen Wirkung sind nur jene Unterschiede maassgebend, welche sich in der durch sie verursachten Abbildung zeigen. Um diese Unterschiede auf mathematischem Wege bestimmen zu können, benöthigen wir solche allgemeine Formeln, welche die Abbildung der Systeme in jeder Beziehung vollkommen bestimmen. Die Abbildung können wir nur dann als vollkommen bestimmt betrachten, wenn das zu einem beliebigen Object gehörige Bild nicht nur seiner Lage, Grösse und Stellung nach bekannt ist, sondern wir müssen auch wissen, ob das Bild reell oder virtuell

ist und welcher Art die Richtungsänderungen sind, welche parallele Strahlen in dem System erleiden.

Prüfen wir nun die bekannten Fundamentalgleichungen der Abbildung, inwiefern sie geeignet sind, die Abbildung vollkommen zu bestimmen.

Man pflegt drei Grundformeln zu unterscheiden, die in verschiedener Form bekannt sind, je nachdem man die Object- und Bildweite entweder von den Brennebenen oder von den Gauss'schen Hauptebenen, oder von einem beliebigen Paar conjugierter Ebenen rechnet. Hier genügt es, wenn wir die auf die Hauptebenen bezogenen Gleichungen vor Augen halten; bekanntlich ist dann die Relation zwischen Object- und Bildweite:

$$\frac{f'}{x'} + \frac{f}{x} = 1; \tag{1}$$

die Formel für die laterale Vergrösserung:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{x-f} = -\frac{x'-f'}{f'}; \tag{2}$$

und die der angularen Vergrösserung:

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x-f}{f'} = \frac{f}{x'-f'}. \tag{3}$$

Diese Formeln bestimmen im Falle einer einzelnen sphärischen brechenden Fläche die Abbildung vollkommen; die Gleichung (1) bestimmt nämlich nicht nur den Ort des Bildes, sondern sagt auch aus, ob es reell oder virtuell ist; denn bei einer einzelnen brechenden Fläche liegen die Hauptebenen in der brechenden Fläche, daher ist die von der zweiten Hauptebene gerechnete Bildweite (x') gleich dem Abstand des Bildes von der brechenden Fläche; aus ihrem Vorzeichen erfahren wir daher, auf welcher Seite der brechenden Fläche das Bild liegt, das heisst wir erfahren, ob es ein reelles oder virtuelles Bild ist. Gleichung (2) bestimmt die Grösse, sowie die aufrechte oder verkehrte Lage des Bildes in Bezug auf das Object. Gleichung (3) endlich bestimmt die Richtungsänderung, welche ein beliebiger einfallender Strahl durch die Brechung erleidet. Die drei Gleichungen zusammen bestimmen also vollständig die Abbildung, welche durch eine einzelne brechende Fläche erzeugt wird.

Hingegen kann man bei zusammengesetzten Systemen aus den auf die Hauptebenen bezogenen Gleichungen nur auf den Ort, Grösse und Stand des Bildes folgern, aber nicht auf seine Reellität oder Virtuellität und auch nicht auf die Richtungsänderung, die ein parallel einfallendes Strahlenbüschel bei dem Austritt aus dem System erleidet. Da nämlich die in den Gleichungen enthaltenen Abstände von den GAUSS'schen Hauptebenen gerechnet sind, so wird durch dieselben die Richtungsänderung der Strahlen und der Ort des Bildes in Bezug auf die zweite Hauptebene bestimmt; die Reellität oder Virtuellität des Bildes, sowie auch die Convergenzänderung der aus dem System austretenden Strahlen hängt aber nicht ab von der Lage der Hauptebenen, sondern allein von der Lage des Bildes, resp. der austretenden Strahlen in Bezug auf die letzte Brechungsfläche. Daher kann der auf die zweite Hauptebene bezogene Bildabstand nur in dem Falle aussagen, ob das Bild ein reelles oder virtuelles sei, wenn die zweite Hauptebene und die letzte Brechungsfläche des Systems zusammenfallen (z. B. bei einer einzelnen Brechungsfläche oder bei einer unendlich dünnen Linse).

Vom physikalischen Standpunkte aus halte ich es wünschenswerth, Formeln aufzustellen, mittelst deren man bei jedem optischen System leicht entscheiden kann, ob das einem beliebigen Object entsprechende Bild reell oder virtuell ist und ob ein parallel einfallendes Strahlenbüschel aus dem System austretend in Bezug auf die letzte Fläche convergent oder divergent ist. Entsprechende Formeln erhalten wir, wenn wir Object- und Bildabstand nicht von den Hauptebenen, auch nicht von den Brennebenen oder einem conjugierten Ebenenpaare rechnen, sondern von der ersten und resp. letzten Grenzfläche des brechenden Systems. Damit auch die Form der Gleichungen einfach sei, halte ich es für zweckmässig, den Abstand der Brennpunkte von den Grenzflächen zu benützen und in die Formeln einzuführen.

Zur geometrischen Ableitung der fraglichen Formeln benützen wir Fig. 1, wo ausser den gebräuchlichen Fundamentalpunkten noch die Grenzflächen des Systems angedeutet sind, von denen wir die Abstände rechnen wollen. Es sei der Abstand vom

Object von der vorderen Grenzfläche . . . . . $AS = -\xi$
Erster Brennpunkt von der vorderen Grenzfläche . $FS = -\tau$
Bild von der hinteren Grenzfläche . . . . . $A'S' = \xi'$
Zweiter Brennpunkt von der hinteren Grenzfläche $F'S' = \tau'$
Objectgrösse . . . . . $AB = y$
Bildgrösse . . . . . $A'B' = -y'$

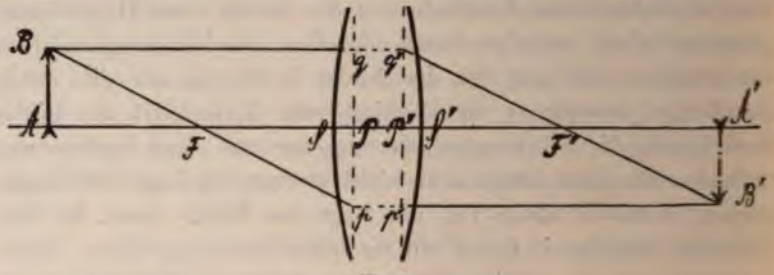


Fig. 1.

Nachdem

$$ABF\triangle \sim PpF\triangle$$

so ist

$$AF : FP = AB : Pp,$$

also

$$-(\xi - \tau) : -f = y : -y', \qquad (\alpha)$$

weil

$$Pp = P'p' = A'B' = -y';$$

ferner ist

$$A'B'F'\triangle \sim P'q'F'\triangle,$$

daher

$$P'q' : A'B' = P'F' : F'A',$$

also

$$y : -y' = f' : (\xi' - \tau'), \qquad (\beta)$$

weil

$$P'q' = Pq = AB = y.$$

Aus (α) und (β) ergiebt sich

$$-(\xi - \tau) : -f = f' : (\xi' - \tau')$$

woraus

$$(\xi - \tau)\cdot(\xi' - \tau') = f \cdot f'. \qquad (\gamma)$$

In dieser Formel bedeutet ξ' den Abstand des Bildes von der letzten Grenzfläche; infolge dessen entscheidet das Vorzeichen von ξ', ob das Bild reell oder virtuell ist. Rechnen wir die Abstände in der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes mit positivem,

in der entgegengesetzten Richtung mit negativem Vorzeichen, so entspricht einem positiven ξ' ein reelles, einem negativen ξ' aber ein virtuelles Bild.

Wir haben also eine Relation (γ) zwischen Object- und Bildabstand gefunden, welche gegenüber den gebräuchlichen (auf die Hauptebenen oder Brennebenen oder einem Paar conjugierter Ebenen bezogenen) Formeln den Vortheil bietet, dass sie auch die Reellität oder Virtuellität des Bildes bestimmt und auch für den praktischen Gebrauch geeigneter ist, da die in derselben vorkommenden Abstände von den Grenzflächen gerechnet, also direct messbar sind (ohne dass wir die Lage der Hauptebenen kennen müssen, vorausgesetzt, dass wir die Brennweiten und die Abstände der Brennpunkte von den Grenzflächen entweder experimentell oder mathematisch bestimmt haben).

Auch die Formeln für die laterale und angulare Vergrösserung sind leicht aufzustellen für den Fall, dass die Abstände von den Grenzflächen gerechnet werden; die laterale Vergrösserung ergiebt sich aus den Proportionen unter (α) und (β)

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{\xi - \tau} = -\frac{\xi' - \tau'}{f'};$$

die angulare Vergrösserung aber können wir aus der bekannten Formel $\frac{y'}{y} = -\frac{f \cdot \operatorname{tg} u}{f' \cdot \operatorname{tg} u'}$ berechnen, wenn wir in dieselbe den eben gefundenen Werth der lateralen Vergrösserung einsetzen; es ist dann

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f}{f'} \cdot \frac{y}{y'} = \frac{\xi - \tau}{f'} = \frac{f}{\xi' - \tau'}.$$

Die auf die Grenzflächen des optischen Systems bezogenen Abbildungsgleichungen sind daher die folgenden

$$(\xi - \tau) \cdot (\xi' - \tau') = f \cdot f' \tag{4}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{\xi - \tau} = -\frac{\xi' - \tau'}{f'} \tag{5}$$

und

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{\xi - \tau}{f'} = \frac{f}{\xi' - \tau'}. \tag{6}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Formeln aus den auf die Hauptebenen bezogenen Gleichungen durch die Sub-

stitutionen $x = \xi + f - \tau$ und $x' = \xi' + f' - \tau'$ auch unmittelbar ableitbar sind.

Der Form nach sind diese Gleichungen ebenso einfach als die auf die Hauptebenen bezogenen, dabei ist aber ihre Anwendung leichter und natürlicher, weil die Abstände von den der Messung unmittelbar zugänglichen Grenzflächen gerechnet werden; ihr Hauptvortheil aber ist, dass sie die Abbildung eines beliebigen Systems vollkommen bestimmen, also eine entsprechende mathematische Basis zur Classification der Systeme liefern.

In den Formeln sind Constanten zweierlei Natur enthalten: einestheils die GAUSS'schen Brennweiten, anderntheils die Abstände der Brennpunkte von den entsprechenden Grenzflächen des Systems; diese letzteren wollen wir, weil sie auch charakteristisch für die Abbildung sind, „scheinbare Focusdistanz" (oder Scheitel-Focusabstand) nennen.

Da die in der Abbildung verschiedener Systeme sich zeigenden wesentlichen Unterschiede nur von den Vorzeichen dieser Constanten abhängen können, so können wir auch die Classification der Systeme den Constanten zweierlei Natur entsprechend auf zweierlei Basis vollführen: entweder auf Grund des Vorzeichens der GAUSS'schen Brennweiten, oder auf Grund des Vorzeichens der scheinbaren Focusdistanzen.

Der Werth der auf Grund des Vorzeichens der GAUSS'schen Brennweiten vollführten Classification besteht darin, dass durch das Vorzeichen der Brennweiten die aufrechte oder verkehrte Stellung der Bilder in Bezug auf das Object bestimmt wird. Dies folgt aus der Formel der lateralen Vergrösserung

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{\xi - \tau} = -\frac{\xi' - \tau'}{f'}.$$

Die Formel zeigt, dass bei Systemen, deren zweite Brennweite positiv ist ($f' > 0$ daher $f < 0$), der von der ersten Brennebene links liegende Objectraum in verkehrter Stellung, der davon rechts liegende Objectraum in aufrechter Stellung abgebildet wird; ist hingegen die zweite Brennweite des Systems negativ ($f' < 0$, also $f > 0$), so wird der Objectraum links von der ersten Brennebene in aufrechter, rechts davon in verkehrter Stellung abgebildet, vorausgesetzt dass die Lichtstrahlen von links kommen und sich

nach rechts fortpflanzen. Die in die erste Klasse gehörigen Systeme ($f' > 0$) will ich „positive", die in die zweite Klasse gehörigen ($f' < 0$) „negative" Systeme nennen, welche Benennung sich auf das Vorzeichen der zweiten GAUSS'schen Brennweite des Systems bezieht.

Durch die auf Grund des Vorzeichens der „scheinbaren Focusdistanz" vollbrachte Classification wird festgestellt, ob das Bild eines unendlich weit entfernten Gegenstandes reell oder virtuell ist; es folgt dies aus Gleichung (4) $(\xi - \tau) \cdot (\xi' - \tau') = f \cdot f'$, wenn wir in derselben $\xi = -\infty$ setzen. Diese Classification lässt auf die Richtungsänderung folgern, welche parallel einfallende Strahlen im System erleiden: ist $\tau' > 0$, so ist der zweite Brennpunkt reell und parallel einfallende Strahlen werden durch die Brechung convergent; die in diese Klasse gehörigen Systeme ($\tau' > 0$) können wir „collective" nennen, zum Unterschiede von den „dispansiven", bei denen die zweite „scheinbare Focusdistanz" negativ ($\tau' < 0$) ist, also der zweite Brennpunkt virtuell ist und parallel einfallende Strahlen divergent aus dem System austreten.

Die Classification optischer Systeme ist also auf zweierlei Basis vollführbar: entweder auf Grund der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, oder auf Grund der Richtungsänderung, welche parallel einfallende Strahlen durch die Brechung in dem System erleiden. Die erstere Classification führt zu den „positiven" und „negativen Systemen", welche sich in dem Vorzeichen der zweiten GAUSS'schen Brennweite unterscheiden; die letztere führt zu den „collectiven" und „dispansiven Systemen", deren Erkennungszeichen das positive, resp. negative Vorzeichen der zweiten „scheinbaren Focusdistanz" ist.

II.

Nachdem wir jene Eigenschaften gefunden haben, auf Grund deren eine zweckmässige Eintheilung dioptrischer Systeme möglich ist, wollen wir uns nun mit der Frage beschäftigen, wie wir das Criterium der einzelnen Klassen aus den optischen Constanten des Systems mathematisch bestimmen können, wo wir unter den optischen Constanten die Krümmungsradien der brechenden Flächen,

die Abstände der Flächen voneinander und die absoluten Brechungsexponenten der durch sie getrennten Medien verstehen.

Geschieht die Classification auf Grund des Vorzeichens der GAUSS'schen zweiten Brennweite, so kann man dieses Vorzeichen für jedes beliebig zusammengesetzte System mittels der bekannten Formel der zweiten Brennweite $f' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta}$ auf bekannte Weise bestimmen; ohne mich deshalb weiter damit zu beschäftigen, gehe ich sogleich zur Bestimmung des Criteriums der collectiven und dispansiven Systeme aus den Constanten des Systems über.

Nach unserer Definition ist ein System collectiv, wenn dessen zweiter Hauptbrennpunkt reell ist, und dispansiv, wenn der zweite Hauptbrennpunkt virtuell ist. Das Erkennungszeichen hiervon ist das Vorzeichen der zweiten scheinbaren Focusdistanz: bei collectiven Systemen ist $\tau' > 0$, d. h. positiv, bei dispansiven $\tau' < 0$, also negativ.

Um die Relationen zwischen den scheinbaren Focusdistanzen und den Constanten des Systems aufstellen zu können, wollen wir zuerst ein nur aus zwei brechenden Flächen bestehendes System vor Augen halten.

Bezeichnen wir die Radien der brechenden Flächen mit r_1 und r_2, den Abstand der Scheitelpunkte der Kugelflächen voneinander (SS') mit d und die absoluten Brechungsexponenten der durch Kugelflächen getrennten Medien mit N_1, N_2 und N_3; aus diesen gegebenen Constanten des Systems können wir mittelst der bekannten Formeln:

$$f = -\frac{Nr}{N' - N} \quad \text{und} \quad f' = \frac{N'r}{N' - N}$$

die Brennweiten der einzelnen Flächen berechnen; nach Substituierung der entsprechenden Werthe erhalten wir

$$f_1 = -\frac{N_1 r_1}{N_2 - N_1}; \qquad f_1' = \frac{N_2 r_1}{N_2 - N_1}$$

$$f_2 = -\frac{N_2 r_2}{N_3 - N_2} \quad \text{und} \quad f_2' = \frac{N_3 r_2}{N_3 - N_2}.$$

Diese Brennweiten bezeichnen zugleich den Abstand des betreffenden Brennpunktes von dem Scheitelpunkte der zugehörigen brechenden Fläche als Anfangspunkt an gerechnet; ihre Vorzeichen

bestimmen daher die Lage der Brennpunkte zu der brechenden Fläche, es sind dies daher Grössen solcher Natur, wie die „scheinbaren Focusdistanzen“: ihr Vorzeichen entscheidet, ob die betreffende Fläche collectiv oder dispansiv ist.

Um bei einem aus zwei Kugelflächen bestehenden System die Lage der Hauptbrennpunkte zu den Grenzflächen bestimmen zu können, wollen wir vorerst den Abstand $\frac{\sigma}{\sigma'}$ des $\frac{\text{ersten}}{\text{zweiten}}$ Brennpunktes des Systems von dem $\frac{\text{ersten}}{\text{zweiten}}$ Brennpunkte der $\frac{\text{vorderen}}{\text{hinteren}}$ Grenzfläche an gerechnet bestimmen.

Bei der Berechnung müssen wir uns auf centrale Strahlen beschränken, für welche die brechende Fläche durch die zum Scheitel gezogene Tangentialebene ersetzbar ist, wie dies Fig. 2

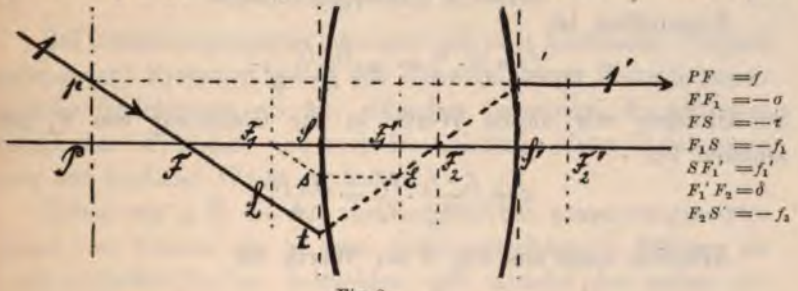


Fig. 2.

darstellt, in welcher alle Strahlen als centrale zu betrachten sind. In der Figur construierte ich den zu einem parallel der Axe austretenden Lichtstrahl (1′) zugehörigen einfallenden Strahl (1), dessen Schnittpunkt mit der Axe den ersten Brennpunkt des Systems liefert, seine Entfernung von F_1 ist der gesuchte Werth von σ.

Verlängern wir Strahl (1′) nach rückwärts, bis er den entsprechenden einfallenden Strahl (1) schneidet, so erhalten wir die Lage der ersten GAUSS'schen Hauptebene, von welcher aus wir jetzt die Objectabstände rechnen wollen.

In Fig. 2 ist

$$pPF\triangle \sim FF_1L\triangle$$

daher

$$PF : FF_1 = pP : F_1L$$

oder da

$$pP = s'S' \quad \text{und} \quad F_1L = st$$

so ist

$$f : -\sigma = s'S' : st;$$

ferner ist

$$s'S'F_2 \triangle \sim Est \triangle$$

daher

$$F_2S' : Es = s'S' : st$$

oder weil

$$Es = F_1'S = f_1'$$

so ist

$$-f_2 : f_1' = s'S' : st.$$

Aus (a) und (b) folgt:

$$f : -\sigma = -f_2 : f_1'$$

woraus

$$\sigma = f \cdot \frac{f_1'}{f_2}.$$

Bekanntlich ist

$$f = f_1 \cdot \frac{f_2}{\delta} = \frac{f_1 \cdot f_2}{d + f_2 - f_1'}.$$

Substituieren wir diesen Werth in die Gleichung von σ, erhalten wir

$$\sigma = \frac{f_1 \cdot f_2}{\delta} \cdot \frac{f_1'}{f_2} = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\delta}.$$

Aehnlich kann aus Fig. 3 der Werth für

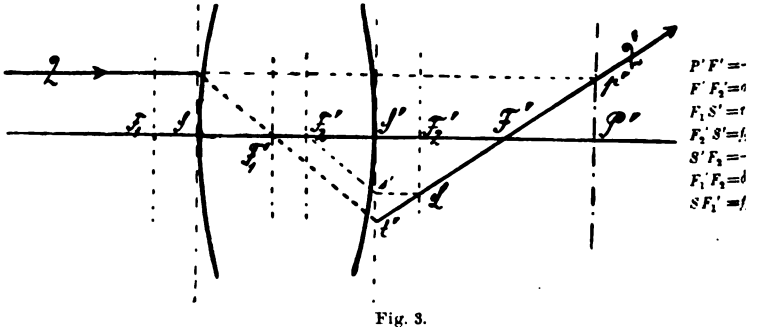


Fig. 3.

$$\sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta}$$

abgeleitet werden.

Ist σ und σ' bekannt, so können wir die „scheinbaren Fo distanzen“ mittelst der Formeln

$$\tau = f_1 + \sigma \quad \text{und} \quad \tau' = f_2' + \sigma'$$

berechnen. Das aus zwei brechenden Flächen bestehende System wird also collectiv oder dispansiv sein, je nachdem

$$\tau' = f_2' - \frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta} \gtrless 0.$$

Ob das System in verkehrter Lage collectiv oder dispansiv wirkt, erfahren wir durch das Vorzeichen von τ: haben τ und τ' verschiedene Vorzeichen, so ist das System in beiden Lagen collectiv, resp. dispansiv; haben τ und τ' gleiche Vorzeichen, so ist das System in der einen Stellung collectiv, in der verkehrten Stellung aber dispansiv.

Zusammengesetzte Systeme.

Bei zusammengesetzten (aus mehr als zwei brechenden Flächen bestehenden) Systemen gelten für die scheinbaren Focusdistanzen ähnliche Gleichungen als bei einfachen (aus zwei Kugelflächen bestehenden) Systemen und auch die Ableitung dieser Gleichungen kann auf ähnliche Weise geschehen.

Haben wir z. B. ein aus vier Kugelflächen zusammengesetztes System, so können wir je zwei aufeinanderfolgende Flächen als je ein einfaches System betrachten und mittelst der soeben abgeleiteten Formeln die scheinbaren Focusdistanzen dieser zwei einfachen Systeme bestimmen und dadurch feststellen, ob die Einzelsysteme collectiv oder dispansiv sind.

Um nun aus den Daten der Partialsysteme die scheinbaren Focusdistanzen des zusammengesetzten Systems berechnen zu können, wollen wir Fig. 4 und Fig. 5 benützen, aus welchen ersichtlich ist, dass die gesuchten Grössen durch die Gleichungen $\tau = \tau_1 + \sigma$ und $\tau' = \tau_2' + \sigma'$ gegeben sind; hier bedeutet τ_1, τ_2' die $\begin{matrix}\text{erste.}\\ \text{zweite}\end{matrix}$ scheinbare Focusdistanz des $\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{matrix}$ Partialsystems, welche mit Hülfe der früher abgeleiteten Formeln berechnet werden können. Jetzt ist noch der Werth von σ und σ' zu bestimmen; in Fig. 4 ist

$$pPF\triangle \sim FF_1L\triangle$$

daher

$$pP : LF_1 = PF : FF_1$$

aber

$$pP = p_2P_2 \quad \text{und} \quad LF = p_1'\pi_1'$$

also

$$p_2P_2 : p_1'\pi_1' = PF : FF_1.$$

Ferner ist

$$F_2p_2P_2 \triangle \sim Ep_1'\pi_1'\triangle$$

daher

$$p_2P_2 : p_1'\pi_1' = F_2P_2 : p_1'E$$

aber

$$p_1'E = P_1'F_1'$$

also

$$p_2P_2 : p_1'\pi_1' = F_2P_2 : P_1'F_1'.$$

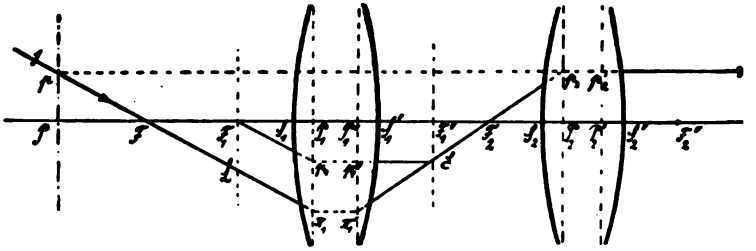


Fig. 4.

Aus (α) und (β) folgt

$$PF : FF_1 = F_2P_2 : P_1'F_1',$$

die entsprechenden Werthe substituierend $F : -\sigma = -$.
woraus

$$\sigma = \frac{F \cdot F_1'}{F_2};$$

bekanntlich ist aber

$$F = \frac{F_1 \cdot F_2}{\delta}$$

also

$$\sigma = \frac{F_1 \cdot F_2}{\delta} \cdot \frac{F_1'}{F_2} = \frac{F_1 \cdot F_1'}{\delta}.$$

Aehnlich finden wir aus Fig. 5

$$\sigma' = -\frac{F_2 \cdot F_2'}{\delta}.$$

In diesen Formeln bedeutet δ das sogenannte Intervall; bezeichnen wir $S_1'S_2 = D$, so ist $\delta = \overrightarrow{F_1'F_2} = D + \tau_2 - \tau_1'$.

Ist σ und σ' bekannt, so sind die scheinbaren Focusdistanzen des zusammengesetzten Systems:

$$\tau = \tau_1 + \sigma = \tau_1 + \frac{F_1 \cdot F_1}{\delta}$$

und

$$\tau' = \tau_2' + \sigma' = \tau_2' - \frac{F_2 \cdot F_2'}{\delta}.$$

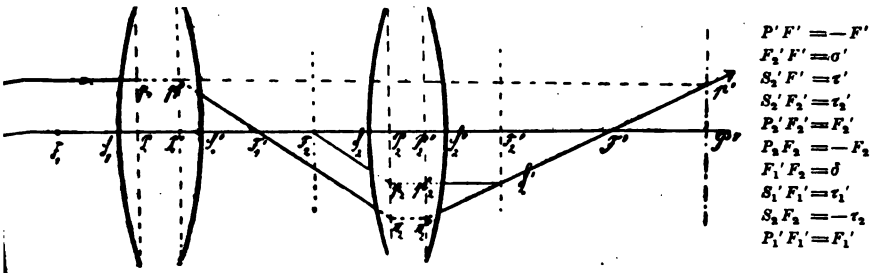


Fig. 5.

Die zur Berechnung nöthigen Grössen sind durch folgende Gleichungen gegeben:

$$F_1 = \frac{f_1 \cdot f_2}{\Delta_1}; \quad \tau_1 = f_1 + \sigma_1; \quad \sigma_1 = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\Delta_1};$$

$$F_1' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{\Delta_1}; \quad \tau_1' = f_2' + \sigma_1'; \quad \sigma_1' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\Delta_1};$$

$$F_2 = \frac{f_3 \cdot f_4}{\Delta_2}; \quad \tau_2 = f_3 + \sigma_2; \quad \sigma_2 = \frac{f_3 \cdot f_3'}{\Delta_2};$$

$$F_2' = -\frac{f_3' \cdot f_4'}{\Delta_2}; \quad \tau_2' = f_4' + \sigma_2'; \quad \sigma_2' = -\frac{f_4 \cdot f_4'}{\Delta_2};$$

$$\delta = D + \tau_2 - \tau_1'; \quad \Delta_1 = d_1 + f_2 - f_1'; \quad \Delta_2 = d_2 + f_4 - f_3'.$$

Hier bedeuten die kleinen f die Brennweiten der einzelnen brechenden Flächen, deren Bestimmung durch die Formeln auf Seite 316 geschieht.

Das System ist $\begin{matrix}\text{collectiv}\\ \text{dispansiv}\end{matrix}$, wenn das mit Hülfe obiger Formeln berechnete τ' $\begin{matrix}\text{positives}\\ \text{negatives}\end{matrix}$ Vorzeichen besitzt.

Unsere Formeln sind auch bei beliebig zusammengesetzten Systemen anwendbar, denn jedes System kann schliesslich als aus zwei einfachen Partialsystemen bestehend betrachtet werden, also aus solchen, für welche wir obige Formeln abgeleitet haben; wir können daher sagen, ein beliebig zusammengesetztes System ist

$$\begin{aligned} &\text{collectiv,} && \text{wenn} && \tau' = \tau_2' + \sigma' > 0 \\ &\text{dispansiv} && \text{„} && \tau' = \tau_2' + \sigma' < 0 \\ &\text{teleskopisch} && \text{„} && \tau' = \infty. \end{aligned}$$

Ist $\tau' = 0$, so kann das System sowohl als collectiv wie auch als dispansiv betrachtet werden.

In diesen Formeln bedeutet τ_2' die zweite scheinbare Focusdistanz des zweiten Partialsystems und σ' den Abstand des zweiten Hauptbrennpunktes vom zweiten Brennpunkte des zweiten Partialsystems. Ist das zweite Partialsystem selbst wieder ein zusammengesetztes System, so können wir seine zweite scheinbare Focusdistanz auf die früher angegebene Weise berechnen.

Dass diese Formeln nicht nur für zusammengesetzte Systeme, sondern auch für einfache Systeme und selbst für einzelne brechende Flächen gültig sind, ist leicht einzusehen; denn bei einfachen Systemen fällt die zweite scheinbare Focusdistanz des zweiten Partialsystems zusammen mit der zweiten Brennweite der zweiten brechenden Kugelfläche, es ist also $\tau_2' = f_2'$ und daher die Focusdistanz $\tau' = f_2' + \sigma'$ in vollkommener Uebereinstimmung mit der für einfache Systeme abgeleiteten Formel.

Im Falle einer einzelnen brechenden Fläche ist $\tau_2' = f'$ und $\sigma' = 0$, also $\tau' = f'$.

Nachdem wir nun das allgemeine Criterium aufgestellt haben, mittelst dessen auf rein mathematischem Wege aus den Constanten des Systems berechnet werden kann, ob das System collectiv oder dispansiv ist, können wir die uns gestellte Aufgabe als gelöst betrachten. Im Folgenden wollen wir unsere Formeln auf die optischen Linsen anwenden, um den Einfluss der Linsendicke auf die Collectivität oder Dispansivität der Linse zu bestimmen.

Bevor ich auf die speciellen Fälle übergehe, will ich bemerken, dass ich von nun an den Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums als gleich voraussetze (wie dies grösstentheils

der Fall ist) und dass ich die Radien der einzelnen brechenden Flächen mit positivem oder negativem Vorzeichen in Rechnung ziehe, je nachdem die einfallenden Lichtstrahlen auf die convexe oder concave Seite der brechenden Fläche auffallen.

Zur Berechnung dienen folgende Formeln:

$$\tau' = f_2' + \sigma'; \quad \sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta}; \quad f_1 = -\frac{N \cdot r_1}{N' - N}; \quad f_2 = \frac{N' \cdot r_2}{N' - N}$$

$$\tau = f_1 + \sigma; \quad \sigma = \frac{f_1 \cdot f_1'}{\delta}; \quad f_1' = \frac{N' \cdot r_1}{N' - N}; \quad f_2' = -\frac{N \cdot r_2}{N' - N}$$

$$\delta = d + f_2 - f_1'.$$

In diesen Formeln ist jede Grösse mit ihrem eigenen Vorzeichen zu gebrauchen.

Biconvexe Linsen.

Gegeben sind:

die Dicke der Linse . . . . . d

die Krümmungsradien der vorderen und hinteren brechenden Flächen . . . . . r_1 und $-r_2$

die Brechungsexponenten der aufeinanderfolgenden Medien . . . . . $N\ N'\ N$.

Wir setzen voraus $N' > N$, dann ist:

$$f_1 = -\frac{N r_1}{N' - N} < 0; \quad f_2 = -\frac{N' r_2}{N' - N} < 0.$$

$$f_1' = \frac{N' r_1}{N' - N} > 0; \quad f_2' = \frac{N r_2}{N' - N} > 0.$$

$$\tau' = f_2' + \sigma' = f_2' - \frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta} = f_2'\left(1 - \frac{f_2}{\delta}\right) = f_2'\left(1 + \frac{|f_2|}{\delta}\right).$$

Hier bedeutet $|f_2|$ den absoluten Werth von f_2; da $f_2' > 0$, so ist für das Vorzeichen von τ' allein das Vorzeichen des Intervalls δ maassgebend.

a) Ist $\delta > 0$, so ist $\tau' > 0$, also die biconvexe Linse in diesem Falle collectiv; aber wenn $\delta = d + f_2 - f_1' > 0$, so ist $d > f_1' - f_2$ oder den Werth der Brennweiten einsetzend:

$$d > \frac{N' r_1}{N' - N} + \frac{N' r_2}{N' - N} = \frac{N'(r_1 + r_2)}{N' - N}.$$

Dividieren wir Zähler und Nenner durch N und setzen $\frac{N'}{N} =$ wo n den relativen Brechungsindex bedeutet, so ist

$$\tau' > 0, \quad \text{wenn} \quad d > \frac{\frac{N'}{N}(r_1 + r_2)}{\frac{N'}{N} - 1} = \frac{n(r_1 + r_2)}{n-1}.$$

b) Ist $\delta < 0$, dann ist

$$\tau' = f_2'\left(1 + \frac{|f_2|}{-|\delta|}\right) = f_2'\left(1 - \left|\frac{f_2}{\delta}\right|\right),$$

also $\tau' > 0$, wenn

$$1 > \left|\frac{f_2}{\delta}\right| \quad \text{oder} \quad |\delta| > |f_2|;$$

es ist aber

$$|\delta| = -\delta = -d - f_2 + f_1' > |f_2|$$

und

$$f_2 < 0,$$

also

$$-d + |f_2| + f_1' > |f_2|.$$

Bei negativem δ ist daher $\tau' > 0$, wenn $f_1' > d$. Doch

$$f_1' = \frac{N' r_1}{N' - N} = \frac{\frac{N'}{N} r_1}{\frac{N'}{N} - 1} = \frac{n r_1}{n-1},$$

also ist bei negativem δ nur dann $\tau' > 0$, wenn $d < \frac{n r_1}{n-1}$.

Beide Fälle zusammenfassend sehen wir, dass eine biconv Linse collectiv ist, wenn

$$f_1' - f_2 < d < f_1' \quad \text{oder auch} \quad \frac{n(r_1 + r_2)}{n-1} < d < \frac{n r_1}{n-1}$$

und dispansiv, wenn

$$f_1' - f_2 > d > f_1', \quad \text{d. h.} \quad \frac{n(r_1 + r_2)}{n-1} > d > \frac{n r_1}{n-1}.$$

Noch zwei specielle Fälle sind möglich:

$$d = f_1' \qquad \text{dann ist} \quad \tau' = 0$$

und

$$d = f_1' - f_2 \quad \text{dann ist} \quad \tau' = \infty.$$

In beiden Fällen kann man die biconvexe Linse mit gleich Recht sowohl für collectiv als für dispansiv halten; im zwei

Falle, wo $\tau' = \infty$, bildet die biconvexe Linse ein telescopisches System.

Wollen wir wissen, ob die fragliche biconvexe Linse in verkehrter Stellung collectiv oder dispansiv ist, so müssen wir das Vorzeichen von τ bestimmen aus der Formel:

$$\tau = f_1 + \sigma = f_1 + \frac{f_1 \cdot f_1'}{\delta} = f_1\left(1 + \frac{f_1'}{\delta}\right).$$

Auf ähnliche Weise finden wir, dass in verkehrter Lage die biconvexe Linse collectiv ist, wenn

$$f_1' + |f_2| < d < |f_2|$$

und dispansiv, wenn

$$f_1' + |f_2| > d > |f_2|.$$

Vergleichen wir dieses Resultat mit dem in der ersten Lage gefundenen, so können wir sagen, die biconvexe Linse ist in beiden Lagen collectiv, sobald ihre Dicke entweder grösser ist als die Summe der absoluten Werthe der beiden inneren Brennweiten (f_1' und f_2), oder geringer, als der absolute Werth der kleineren inneren Brennweite. (Vgl. SCHULLER, Math. és phys. lapok 1900, IV, p. 158.)

Biconcave Linsen.

Gegeben sind:

die Dicke der Linse . . . . . d

die Krümmungsradien der brechenden Flächen . $-r_1$ und $+r_2$

die Brechungsexponenten der aufeinander folgenden Medien . . . . . $N\,N'\,N.$

Ist

$$N' > N,$$

so ist

$$f_1 = \frac{N r_1}{N' - N} > 0; \quad f_2 = \frac{N' r_2}{N' - N} > 0$$

$$f_1' = -\frac{N' r_1}{N' - N} < 0; \quad f_2' = -\frac{N r_2}{N' - N} < 0$$

und

$$\delta = d + f_2 - f_1' > 0.$$

Wir können leicht nachweisen, dass eine biconcave Linse bei jeder Dicke dispansiv ist; denn

$$\tau' = f_2'' + \sigma' = f_2' - \frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta} = f_2'\left(1 - \frac{f_2}{\delta}\right) = f_2'\left(\frac{\delta - f_2}{\delta}\right)$$
$$= \frac{f_2'}{\delta}(d + f_2 - f_1' - f_2) = \frac{f_2'}{\delta} \cdot (d - f_1').$$

Es ist aber

$$f_2' < 0; \quad f_1' < 0; \quad \delta > 0,$$

also

$$\tau' = -\left|\frac{f_2'}{\delta}\right| \cdot (d + |f_1'|) < 0.$$

Aehnlich finden wir, dass

$$\tau = \frac{f_1}{\delta}(d + f_2) > 0,$$

weil alle in der Formel vorkommenden Grössen positiv sind; folglich bildet eine biconcave Linse bei jeder Dicke und in jeder Lage ein dispansives System.

Planconvexe Linsen.

Fallen die Strahlen auf die convexe Seite der Linse, so ist
der Krümmungsradius der vorderen Fläche . . . r_1,
der Krümmungsradius der hinteren Fläche . . . $r_2 = -\infty$.

Ist

$$N' > N,$$

so ist

$$f_1 = -\frac{N r_1}{N' - N} < 0; \quad f_2 = -\infty < 0$$

$$f_1' = \frac{N' r_1}{N' - N} > 0; \quad f_2' = \infty > 0$$

und

$$\delta = d + f_2 - f_1' = -\infty$$

$\tau' = f_2' - \frac{f_2 f_2'}{\delta}$, also ist $\tau' > 0$, wenn $f_2' > \left|\frac{f_2 f_2'}{\delta}\right|$

oder

$$1 > \left|\frac{f_2}{\delta}\right|$$

$$|\delta| > |f_2|$$

doch ist

$$|\delta| = -\delta = -d - f_2 + f_1' > |f_2|,$$
$$f_2 < 0, \quad \text{also} \quad -d + |f_2| + f_1' > |f_2|,$$

daher ist

$$\begin{aligned} \tau' &> 0, \quad \text{wenn} \quad f_1' > d \\ \tau' &< 0 \quad \text{„} \quad f_1' < d \\ \tau' &= 0 \quad \text{„} \quad f_1' = d. \end{aligned}$$

Für den Werth von τ finden wir, dass er immer negativ $\tau < 0$ ist; fallen daher die Strahlen auf die ebene Fläche, so wirkt die planconvexe Linse immer collectiv. Beide Fälle zusammenfassend können wir sagen, dass eine planconvexe Linse in jeder Stellung collectiv ist, sobald ihre Dicke kleiner ist, als die innere Brennweite der convexen Fläche, d. h. wenn

$$d < f_1'; \quad \text{doch ist} \quad f_1' = \frac{N' r}{N' - N} = \frac{n r_1}{n - 1},$$

die planconvexe Linse ist also in jeder Lage collectiv, wenn

$$d < \frac{n r_1}{n - 1}.$$

Planconcave Linsen.

Fallen die Strahlen zuerst auf die concave Fläche, so ist der Radius der vorderen Fläche . . . . . $-r_1$,
der Radius der rückwärtigen Fläche . . . . . $r_2 = -\infty$.

Ist

$$N' > N,$$

so ist

$$f_1 = \frac{N r_1}{N' - N} > 0; \quad f_2 = -\infty < 0$$

$$f_1' = -\frac{N' r_1}{N' - N} < 0; \quad f_2' = +\infty > 0.$$

Benützen wir folgende Formel der zweiten scheinbaren Focusdistanz:

$$\tau' = \frac{f_2'}{\delta}(d - f_1');$$

gegenwärtig ist

$$f_2' > 0; \quad \delta < 0 \quad \text{und} \quad f_1' < 0,$$

also

$$\tau' = -\left|\frac{f_2'}{\delta}\right| \cdot (d + |f_1'|) < 0,$$

d. h. die Linse ist dispansiv.

Weiter ist

$$\tau = \left|\frac{f_1}{\delta}\right| \cdot (d + |f_2|) > 0.$$

Folglich wirkt eine planconcave Linse bei jeder Dicke t in jeder Lage dispansiv.

Meniscuse.

Fallen die Strahlen zuerst auf die convexe Seite der Linse, so ist der Radius der vorderen Fläche . . . . . der Radius der rückwärtigen Fläche . . . . . .

Ist

$$N' > N,$$

so ist

$$f_1 = -\frac{Nr_1}{N'-N} < 0; \quad f_2 = \frac{N'r_2}{N'-N} > 0$$

$$f_1' = \frac{N'r_1}{N'-N} > 0; \quad f_2' = -\frac{Nr_2}{N'-N} < 0.$$

Es ist

$$\tau' = f_2' - \frac{f_2 f_2'}{\delta} = f_2'\left(1 - \frac{f_2}{\delta}\right),$$

also gegenwärtig

$$\tau' = -|f_2'| \cdot \left(1 - \frac{|f_2|}{\delta}\right).$$

Es sei

a) $$\delta < 0, \quad \text{d. h.} \quad d + f_2 - f_1' < 0,$$

also

$$d < f_1' - f_2,$$

dann ist

$$\tau' = -|f_2'| \cdot \left(1 + \left|\frac{f_2}{\delta}\right|\right),$$

also

$$\tau' < 0.$$

b) $$\delta > 0, \quad \text{d. h.} \quad d + f_2 - f_1' > 0,$$

also

$$d > f_1' - f_2,$$

dann ist

$$\tau' = -|f_2'| \cdot \left(1 - \left|\frac{f_2}{\delta}\right|\right).$$

Es ist also $\tau' > 0$, wenn

$$1 < \left|\frac{f_2}{\delta}\right|$$

$$|\delta| < |f_2|$$

$$d + |f_2| - |f_1'| < |f_2|$$

$$d < |f_1'|.$$

Fallen also die Strahlen auf die convexe Seite des Meniscus, so ist die Linse collectiv, wenn

$$f_1' > d > f_1' - f_2$$

und dispansiv, wenn

$$f_1' < d < f_1' - f_2.$$

Die Formel der ersten scheinbaren Focusdistanz ist

$$\tau = \frac{f_1}{\delta}(d + f_2),$$

also gegenwärtig

$$\tau = -\frac{|f_1|}{\delta}(d + |f_2|).$$

Es sei

a) $$\delta = d + f_2 - f_1' < 0,$$

d. h.

$$d < f_1' - f_2,$$

dann ist

$$\tau = \left|\frac{f_1}{\delta}\right| \cdot (d + |f_2|) > 0.$$

b) $$\delta = d + f_2 - f_1' > 0,$$

d. h.

$$d > f_1' - f_2,$$

dann ist

$$\tau < 0.$$

Fallen also die Strahlen auf die concave Seite einer concav-convexen Linse, so ist dieselbe collectiv, solange

$$d > f_1' - f_2$$

und dispansiv, wenn

$$d < f_1' - f_2.$$

Diese Resultate zusammenfassend können wir sagen, ein Meniscus ist in beiden Stellungen collectiv, wenn die Dicke der Linse kleiner ist als die innere Brennweite ihrer convexen Fläche, aber grösser als die Differenz zwischen der inneren Brennweite der convexen Fläche und der äusseren Brennweite der concaven Fläche; im entgegengesetzten Falle ist die Linse dispansiv.

Graphische Darstellung der scheinbaren Focusdistanzen.

Aendert sich bei einer optischen Linse nur die Dicke, während die Brechungsexponenten der Medien und die Krümmungsradien der brechenden Kugelflächen unverändert bleiben, so können

wir die entsprechende scheinbare Focusdistanz als eine Function der Linsendicke auch graphisch darstellen.

Wenn wir in einem rechtwinkligen Coordinatensystem auf der Abscissenaxe die veränderliche Dicke der Linse auftragen und die entsprechende scheinbare Focusdistanz zur Ordinate machen, so erhalten wir eine gleichseitige Hyperbel bezogen auf ein solches rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Axen gegen die Asymptoten der Hyperbel parallel verschoben sind.

Es ist nämlich

$$\tau' = f_2' + \sigma' \quad \text{und} \quad \sigma' = -\frac{f_2 \cdot f_2'}{\delta},$$

also

$$\sigma' \cdot \delta = -f_2 \cdot f_2'.$$

Ist die Linse in einem homogenen Medium, z. B. in Luft, so ist

$$f_2 = -\frac{N' r_2}{N - N'} = \frac{\frac{N'}{N} r_2}{\frac{N'}{N} - 1} = \frac{n r_2}{n - 1}$$

und

$$f_2' = \frac{N r_2}{N - N'} = -\frac{r_2}{\frac{N'}{N} - 1} = -\frac{r_2}{n - 1},$$

wo n den relativen Brechungsindex der beiden Medien bezeichnet

$$\left(n = \frac{N'}{N}\right).$$

Ist jetzt n, r_1 und r_2 constant, so können wir schreiben

$$\sigma' \cdot \delta = -f_2 \cdot f_2' = -\frac{n r_2}{n-1} \cdot -\frac{r_2}{n-1} = \frac{n r_2^2}{(n-1)^2} = \frac{a^2}{2} = \text{const.}$$

Aber dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten als Coordinaten; „a“ bezeichnet die halbe reelle Axe der Hyperbel, die wir aus den Constanten der Linse berechnen können, und zwar ist

$$a = \pm \frac{r_2}{n-1} \sqrt{2n}.$$

Wollen wir nicht δ und σ' zu Coordinatenaxen wählen, sondern die Dicke „d“ der Linse und die entsprechende scheinbare Focusdistanz „τ'“, so ist dieses neue Coordinatensystem gegen das vorige

parallel verschoben und die Coordinaten seines Anfangspunktes können wir aus den Gleichungen

$$\tau' = f_2' + \sigma' \quad \text{und} \quad \delta = d + f_2 - f_1'$$

bestimmen, wenn wir in dieselben $\tau' = 0$ und $d = 0$ einsetzen; die alten Coordinaten des neuen Anfangspunktes sind also

$$\underset{\tau'=0}{\sigma'} = -f_2' \quad \text{und} \quad \underset{d=0}{\delta} = f_2 - f_1'.$$

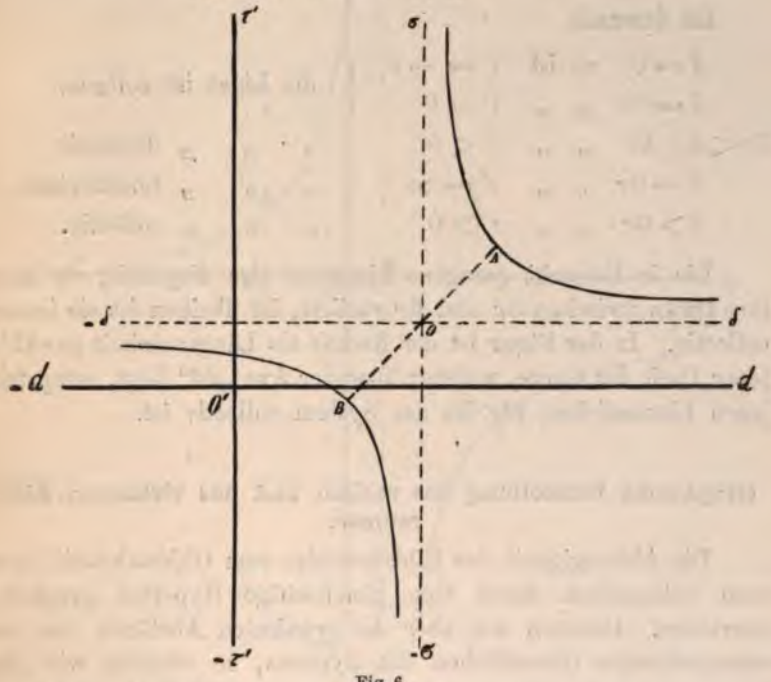


Fig. 6.

Weil wir in diesem neuen Coordinatensystem auf der Abscissenaxe die veränderliche Dicke der Linse messen und auf der Ordinatenaxe die entsprechende scheinbare Focusdistanz, so können wir mittelst der Curve auf graphischem Wege die zu jeder Linsendicke gehörige scheinbare Focusdistanz bestimmen und zwar sowohl nach Grösse als auch nach Vorzeichen, welch letzteres zu erkennen giebt, ob die Linse bei der fraglichen Dicke collectiv oder dispansiv ist.

Fig. 6 zeigt uns die Verhältnisse bei einer symmetrischen

biconvexen Linse, bei der die Krümmungsradien der beiden brechenden Flächen gleich gross sind; der relative Brechungsexponent der Linse ist gleich $n = \frac{3}{2}$ angenommen; dann kann man die Gleichung der zweiten scheinbaren Focusdistanz ($\tau' = f_2' + \sigma'$) auf folgende Form bringen:

$$\tau' = \frac{2r(d-3r)}{d-6r}.$$

Ist demnach

$d = 0$,	so ist	$\tau' = +r$	die Linse ist collectiv
$d = 3r$	„ „	$\tau' = 0$	
$3r < d < 6r$	„ „	$\tau' < 0$	„ „ „ dispansiv
$d = 6r$	„ „	$\tau' = \infty$	„ „ „ teleskopisch
$d > 6r$	„ „	$\tau' > 0$	„ „ „ collectiv.

Die in Betracht gezogene Linse ist also dispansiv, so lange ihre Dicke zwischen $3r$ und $6r$ variiert, im übrigen ist sie immer collectiv. In der Figur ist der Radius als Längeneinheit gewählt; jener Theil der Curve, welcher über der Axe „dd" liegt, entspricht jenen Linsendicken, für die das System collectiv ist.

Graphische Darstellung des reellen und des virtuellen Bildraumes.

Die Abhängigkeit des Bildabstandes vom Objectabstand kann man bekanntlich durch eine gleichseitige Hyperbel graphisch darstellen. Rechnen wir aber die erwähnten Abstände von den entsprechenden Grenzflächen des Systems, so erhalten wir eine Curve, die uns nicht nur über die Grössenverhältnisse zwischen Object- und Bildabstand Aufschluss giebt, sondern auch über die Lage des reellen und des virtuellen Bildraumes, indem jener Theil der Curve, welcher $\begin{matrix}\text{über}\\\text{unter}\end{matrix}$ der Abscissenaxe liegt, dem $\begin{matrix}\text{reellen}\\\text{virtuellen}\end{matrix}$ Bildraume entspricht.

Messen wir nämlich in einem rechtwinkligen Coordinatensystem auf der Abscissenaxe die von der ersten Grenzfläche des Systems gerechneten Objectabstände und tragen die zugehörigen, von der letzten Grenzfläche an gerechneten Bildabstände als

Ordinaten auf, so erhalten wir eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Axen des Coordinatensystems um die Grössen τ' und τ parallel verschoben sind, wie man dies aus Gleichung (4)

$$(\xi - \tau) \cdot (\xi' - \tau') = F \cdot F'$$

leicht folgern kann.

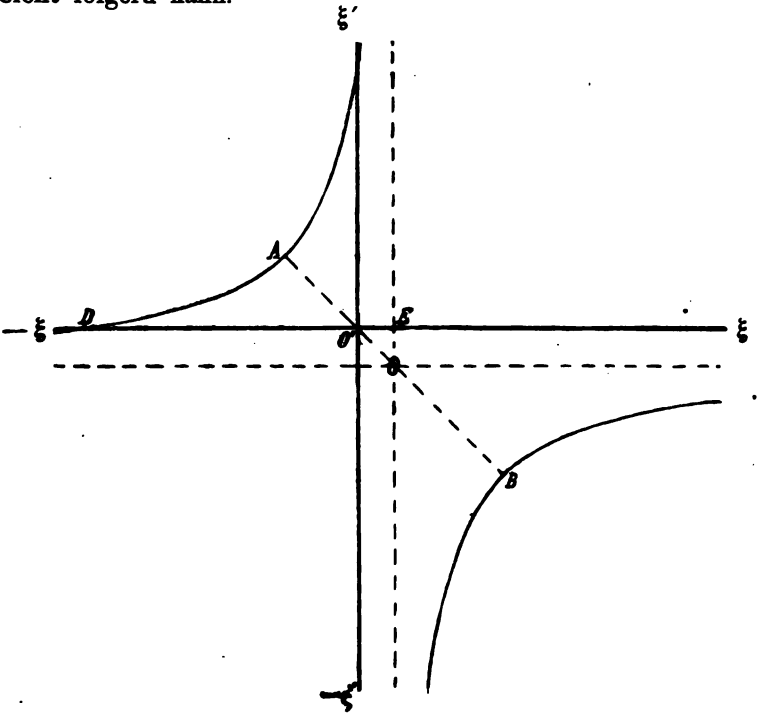


Fig. 7.

In Fig. 7 construierte ich die entsprechende Curve für eine symmetrische biconvexe Linse, bei der die Krümmungsradien der beiden brechenden Flächen gleiche absolute Grösse besitzen; der relative Brechungsexponent der Linse wurde zu $n = \frac{3}{2}$ und der Abstand der Grenzflächen von einander (d. h. die Linsendicke) gleich dem vierfachen Krümmungsradius angenommen; die gegebenen Constanten der Linse sind also die folgenden:

$$\frac{N'}{N} = n = \tfrac{3}{2}; \quad |r_1| = -|r_2| = r \quad \text{und} \quad d = 4r.$$

Durch die auf Seite 316 befindlichen Formeln erhalten wir folgende Werthe:

$$f_1 = -2r; \quad f_1' = 3r; \quad f_2 = -3r; \quad f_2' = 2r;$$
$$f = \frac{6r^2}{d-6r} = -3r; \quad f' = +3r; \quad \tau = +r; \quad \tau' = -r.$$

Das negative Vorzeichen von τ' zeigt, dass das in Betracht gezogene System dispansiv ist, trotzdem seine GAUSS'sche zweite Brennweite positives Vorzeichen besitzt.

Die Formel des Bildabstandes $(\xi - \tau) \cdot (\xi' - \tau') = F \cdot F'$ kann man nach Substitution obiger Werthe auf folgende Form bringen:

$$\xi' = \frac{\xi r + 8r^2}{r - \xi}.$$

Fig. 7 zeigt die Curve, welcher diese Gleichung entspricht, wenn der Radius als Längeneinheit gewählt wird. Da die Bildabstände von der rückwärtigen Grenzfläche der Linse gerechnet sind, so wird durch ihr Vorzeichen zugleich die physikalische Qualität des Bildes bestimmt; aus der Figur sehen wir, dass obige Linse reelle Bilder liefert, so lange das Object zwischen D- und E-Punkten liegt. Allen übrigen Objectabständen entsprechen virtuelle Bilder.

III.

In einigen Fällen führt die auf zweierlei Basis vollbrachte Classification zu demselben Resultat, insofern dann die positiven Systeme zugleich collectiv, die negativen zugleich dispansiv sind. Um dies zu zeigen, wollen wir die zweite Brennweite des Systems als Function der zweiten scheinbaren Focusdistanz ausdrücken, was sehr leicht geschehen kann, im Falle man sich auf nur aus zwei brechenden Flächen bestehende Systeme, also auf die optischen Linsen beschränkt. Ist „d" die Dicke der Linse, so ist

$$\tau' = f_2' - \frac{f_2 \cdot f_2'}{d + f_2 - f_1'} = \frac{f_2'(d - f_1')}{d + f_2 - f_1'},$$

woraus

$$\frac{f_2'}{d + f_2 - f_1'} = \frac{\tau'}{d + f_1'}.$$

Substituieren wir diesen Werth in die Formel der GAUSS-schen zweiten Brennweite:

$$f' = -\frac{f_1' \cdot f_2'}{d + f_2 - f_1'} = -f_1' \cdot \frac{\tau'}{d - f_1'} = \frac{\tau'}{1 - \frac{d}{f_1'}},$$

also ist

$$f' = \frac{\tau'}{1 - \frac{d}{f_1'}}.$$

Aus dieser für Linsen gültigen Formel folgt, dass die GAUSS-sche zweite Brennweite und die zweite „scheinbare Focusdistanz" gleiches Vorzeichen besitzen, wenn

1. $d = 0$, d. h. bei einer einzelnen brechenden Fläche oder bei unendlich dünnen Linsen.
2. $f_1' < 0$, d. h. die vordere brechende Fläche ist concav (vorausgesetzt die Linse ist optisch dichter als die Grenzmedien).
3. $f_1' > d$, d. h. das optisch dichtere Medium liegt zwar an der concaven Seite der ersten brechenden Fläche, aber die zweite Brennweite derselben ist grösser als die Dicke der Linse.

Aehnlich können wir die Gleichung

$$f = \frac{\tau}{1 + \frac{d}{f_2}}$$

ableiten, aus welcher folgt, dass f und τ gleiches Vorzeichen besitzen, wenn

1. $d = 0$; 2. $f_2 > 0$; 3. $f_2 < 0$ aber $d < |f_2|$.

Diese Resultate zusammenfassend können wir sagen, dass bei idealen Linsen, ferner bei biconvexen Linsen, sowie bei einer einzelnen brechenden Fläche die GAUSS'schen Brennweiten immer dasselbe Vorzeichen besitzen wie die entsprechenden scheinbaren Focusdistanzen; dasselbe ist auch der Fall bei allen Linsen, bei welchen die Brennpunkte beider Grenzflächen nicht im Innern der Linse liegen. In den erwähnten Fällen ist ein positives System zugleich auch collectiv ($F' > 0$ und $\tau' > 0$), ein negatives zugleich auch dispansiv ($F' < 0$ und $\tau' < 0$); man kann daher

sagen, dass in diesen Fällen das Vorzeichen der GAUSS'schen zweiten Brennweite nicht nur die Stellung der Bilder bestimmt, sondern auch entscheidet, ob der zweite Brennpunkt des Systems reell oder imaginär ist.

Bei anderen Linsen oder bei aus mehreren brechenden Flächen bestehenden Systemen decken sich hingegen diese Klassen im allgemeinen nicht mehr; A. SCHULLER hat graphisch nachgewiesen, dass man aus dem Vorzeichen der zweiten Brennweite nicht darauf schliessen kann, ob das System collectiv oder dispansiv ist; denn ein System kann collectiv sein (nämlich reellen zweiten Brennpunkt haben), trotzdem seine zweite Brennweite negativ ist, und umgekehrt: kann dispansiv sein bei positiver Brennweite.

Aus obigen Formeln und dem bisher Gesagten erhellt, dass man die Klassen der auf zweierlei Grundlage vollführten Classificationen von einander scharf unterscheiden muss: die positive und negative Brennweite entscheidet im allgemeinen nur über die Stellung der Bilder und giebt keinen Aufschluss, ob der zweite Brennpunkt reell oder virtuell ist.

Wollen wir daher die Classification optischer Systeme nach demselben Princip vornehmen wie bei einer brechenden Fläche, d. h. wenn wir der historischen Entwickelung und dem Namen entsprechend $\begin{matrix}\text{collectiv}\\ \text{dispansiv}\end{matrix}$ jenes System nennen wollen, bei welchem die parallel einfallenden Strahlen aus dem System austretend in einem $\begin{matrix}\text{reellen}\\ \text{virtuellen}\end{matrix}$ Punkte vereinigt werden, so wird die Collectivität oder Dispansivität des Systems nicht durch das Vorzeichen der zweiten GAUSS'schen Brennweite bestimmt, wie dies insbesondere ältere Lehrbücher (auch MÜLLER-POUILLET u. a.) fälschlich behaupten, sondern durch das Vorzeichen der scheinbaren Focusdistanz (die zur Berechnung derselben dienenden Formeln siehe Seite 321 u. 322).

Weil das Vorzeichen der GAUSS'schen Brennweiten über die Natur der Brennpunkte nicht entscheidet, so lassen neuere Autoren die Eintheilung der Systeme auf Grund der Qualität des zweiten Brennpunktes gänzlich fallen und führen die Classification rein

nur auf Grund des Vorzeichens der zweiten Brennweite aus und betonen dabei, dass diese Eintheilung nur über die Stellung der Bilder Aufschluss giebt (WINKELMANN, „Handbuch d. Physik" II, 1, pag. 49; auch das inzwischen erschienene „Lehrbuch d. Optik" von DRUDE, pag. 26). Gegen diese Eintheilung ist nichts einzuwenden, aber die entstandenen zwei Klassen der Systeme (Systeme mit positiver, resp. negativer zweiter Brennweite) mit den Namen collectiv und dispansiv zu bezeichnen, halte ich weder für zweckmässig, noch für physikalisch gerechtfertigt. Es ist zwar wahr, dass man vom mathematischen Standpunkte aus keinerlei Einwand dagegen erheben kann, die Systeme mit positiver zweiter Brennweite collective und jene mit negativer Brennweite dispansive zu nennen; denn diese Benennung ist vollkommen zutreffend, sobald wir die Aenderungen in der Convergenz der gebrochenen Strahlen auf die zweite Hauptebene des Systems beziehen. Jedoch vom physikalischen Standpunkte aus müssen wir die Aenderungen in der Convergenz der gebrochenen Strahlen auf die letzte brechende Fläche beziehen, welche allein für die Reellität und Virtuellität der Bilder maassgebend ist.

Die Benennung collectiv und dispansiv ist im allgemeinen vorsichtig zu gebrauchen, selbst dann, wenn man die collectiven Systeme nicht mit den positiven und die dispansiven Systeme nicht mit den negativen Systemen verwechselt; denn aus der Benennung könnte man folgern, dass ein collectives System die einfallenden Strahlen immer convergenter, ein dispansives hingegen immer divergenter mache, wie dies auch viele, ja im Falle einzelner brechenden Flächen sämmtliche mir bekannte Autoren behaupten (HELMHOLTZ, Handbuch d. phys. Opt., pag. 62—63; MÜLLER-POUILLET, 9. Ausgabe II, 1, 1, p. 155; WINKELMANN, Handbuch d. Phys. II, 1, p. 74 u. s. w.). Diese Behauptung ist aber falsch, was ich für eine einzelne brechende Fläche mathematisch beweisen will.

Zu diesem Zwecke benütze ich die bekannte Gleichung der angulären Vergrösserung:

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{x - F}{F'}.$$

In dieser Formel bedeutet u den Winkel, welchen der ein-

fallende Strahl mit der Axe des Systems einschliesst und der Scheitelpunkt dieses u-Winkel ist in einem Abstande x von der ersten Hauptebene; u' bezeichnet den Winkel, welchen der gebrochene Strahl mit der Axe einschliesst; diese Winkel sind mit positivem Vorzeichen zu nehmen, wenn der Strahl in der Richtung des Uhrzeigers um den Scheitelpunkt des Winkels gedreht werden muss, damit er den Winkelraum durchmesse; im entgegengesetzten Falle ist das Vorzeichen negativ.

1. Wenden wir die Formel zuerst auf eine brechende Fläche an, an deren concaven Seite das optisch dichtere Medium sei, also auf eine sogenannte collective Fläche, bei der bekanntlich

$$F<0;\quad F'>0\quad \text{und}\quad F'>|F|.$$

Obige Formel können wir daher auch folgendermaassen schreiben:

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u}=\frac{x+|F|}{|F'|}.$$

Analysieren wir jetzt diese Gleichung:

α) $x>0$, d. h. die einfallenden Strahlen sind convergent; die Gleichung zeigt, dass bei positivem x die Winkel u und u' gleiches Vorzeichen haben, d. h. auch die gebrochenen Strahlen sind convergent; aber es ist

$$u'\gtreqless u,$$

je nachdem

$$x+|F|\gtreqless|F'|$$

doch ist

$$F'+F=|F'|-|F|=r,$$

wo r den Krümmungsradius der brechenden Fläche bezeichnet, folglich ist

$$u'\gtreqless u,\quad \text{wenn}\quad x\gtreqless r.$$

β) $x<0$, d. h. aus einem Punkte kommende Strahlen fallen (divergent) auf die Fläche; es ist ersichtlich, dass die Winkel u und u' bei negativem x solange gleiches Vorzeichen haben, als $|F|>|x|$ und dann ist auch $|u'|<|u|$; hingegen haben die Winkel entgegengesetztes Vorzeichen, wenn $|F|<|x|$.

Auf Grund dieser mathematischen Betrachtungen können wir daher sagen, dass eine collective Brechungsfläche die convergent einfallenden Strahlen entweder mehr oder weniger convergent macht, je nachdem die verlängert gedachten einfallenden Strahlen die Axe hinter dem Krümmungsmittelpunkte schneiden oder vor demselben (also im Raume zwischen dem Scheitelpunkt und dem Krümmungsmittelpunkt der Fläche); die divergent einfallenden Strahlen werden durch die Brechung an collectiven Flächen immer weniger divergent oder auch convergent, je nachdem sie von einem innerhalb oder ausserhalb des ersten Brennpunktes gelegenen Punkte ausgehen.

2. Das zweite Medium ist wieder optisch dichter, liegt jetzt aber an der convexen Seite der brechenden Kugelfläche, also eine sogenannte Zerstreuungsfläche, bei welcher bekanntlich

$$F>0;\quad F'<0 \quad \text{und} \quad |F'|>F,$$

daher unsere Formel

$$\frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = -\frac{x-|F|}{|F'|} = \frac{|F|-x}{|F'|}.$$

Es sei

α) $x<0$, d. h. die einfallenden Strahlen sind divergent, dann haben u' und u gleiches Vorzeichen, d. h. auch die gebrochenen Strahlen sind divergent, aber es ist

$$u' \gtreqless u, \quad \text{je nachdem} \quad |F|+|x| \gtreqless |F'|,$$

doch ist

$$|F'|-|F| = |r|:$$

also ist

$$u' \gtreqless u, \quad \text{je nachdem} \quad |x| \gtreqless |r|.$$

β) $x>0$, d. h. die einfallenden Strahlen sind convergent, dann haben u und u'

gleiches / entgegengesetztes Vorzeichen, solange $|F|>x$ / $|F|<x$ und damit ist $u'<u$ / $u' \gtreqless u$.

Alles zusammenfassend können wir daher sagen: Eine collective brechende Fläche verringert immer die Divergenz von divergierend einfallenden Strahlen, die Convergenz convergent einfallen-

der Strahlen kann sie hingegen sowohl vergrössern, wie auch verringern; eine dispansive Brechungsfläche verringert immer die Convergenz convergent einfallender Strahlen, während sie die Divergenz divergenter Strahlen sowohl vermehren wie auch verringern kann.

Die Behauptung, dass eine collective Brechungsfläche die einfallenden Strahlen immer convergenter, eine dispansive immer divergenter mache als sie vor der Brechung waren, ist daher falsch.

Aehnlich kann man auch bei zusammengesetzten Systemen, z. B. bei Linsen, nachweisen, dass die Behauptung: collective Systeme vermehren die Convergenz, dispansive verringern die Convergenz der Strahlen, unhaltbar und falsch ist; streng gerechtfertigt ist daher nur die folgende Definition: parallel einfallenden Strahlen entsprechen bei einem Collectivsystem convergent austretende, bei einem dispansiven System divergent austretende gebrochene Strahlen.

18.

DIE EYLAISARTEN UNGARNS.*

Von Dr. E. v. DADAY, c. Mitglied der ungar. wissenschaftl. Akademie.

Vorgelegt der Akademie in der Sitzung vom 17. December 1900.

(Mit 8 Figuren im Text.)

Von dem mathematisch-naturwissenschaftlichen ständigen Comité der III. Klasse der ungarischen wissenschaftlichen Akademie wurde mir der Auftrag, eine Monographie der ungarischen *Hydrachniden* auszuarbeiten. Um diesem Auftrage zu entsprechen, sammelte ich in verschiedenen Theilen des Landes, damit ich über ein möglichst reiches Material verfügen könne. Obgleich ich jedoch thunlichst beflissen war, die Arbeit möglichst bald herzustellen, kann ich dennoch nicht hoffen, dieselbe in Kürze als vollendetes Ganze vorzulegen. Bei gegenwärtiger Gelegenheit beschränke ich mich, gewissermaassen als vorläufige Mittheilung auf die Schilderung einer Gattung der ungarischen *Hydrachniden*, und zwar der Arten des Genus *Eylais*, indem ich zugleich einige neue Arten beschreibe und gelegentliche Bemerkungen daran knüpfe.

Aus der Fauna Ungarns war lange Zeit nur *Eylais extendens* (O. F. M.) bekannt in dem Sinne, in welchem dieselbe bis zum Auftreten F. KOENIKE's betrachtet wurde, und zwar bis zum Jahre 1899, als R. PIERSIG aus dem Teiche der Husz-Parkes in Poprád eine gut charakterisierte neue Art unter dem Namen *Eylais bisinuosa* beschrieb. Dies veranlasste mich, mit dem Resultate meiner Sammlungen und Untersuchungen hervorzutreten,

* Dieser Gattungsname wurde in jüngster Zeit von R. PIERSIG mit *Eulais* richtiggestellt. (Das Thierreich. 13. Lief., pag. 14.)

wenngleich auch nur im Gefolge einer Aufzeichnung der bisher bekannten Arten und Fundorte.

Bevor ich jedoch zu den Details übergehe, muss ich bemerken, dass ich mich hinsichtlich der Wahl der Artcharaktere im ganzen genommen der Auffassung PIERSIG's anschliesse. Als wichtigsten Artcharakter betrachte auch ich die Form, Grösse und Structur der Augenbrillen. Die relative Grösse der Palpenglieder, sowie die in der Bewehrung mit Borsten und Dornen sich zeigende Mannigfaltigkeit derselben betrachte ich nicht und kann ich nicht als so wesentlich betrachten. In dieser Auffassung bestärkt mich der Umstand, dass ich die Anzahl und Situierung der an andern Gliedern sich zeigenden Borsten und Dornen nicht nur individuell, sondern auch an der rechten und linken Palpe eines und desselben Individuums schwankend fand. Als sehr guter Fingerzeig bei der Unterscheidung der Arten dient auch das männliche Begattungsorgan, welches jedoch erst nach dem Auskochen in Kalilauge und bei sorgsamer Präparierung sichtbar wird. Nicht selten aber kann bei der Unterscheidung der Arten auch die ganze Mundvorrichtung, insbesondere die Form und Structur des Oesophagus Aufschlüsse bieten, obgleich all diese Merkmale, wie schon PIERSIG bemerkte, zuweilen auch individuell differieren. Auch die feinere Structur der Haut, sowie die Form der Geschlechtsöffnung zeigt bei einzelnen Arten einige Verschiedenheit.

Ueber den Unterschied zwischen den Männchen und Weibchen finden sich in der Literatur bisher so gut wie keinerlei Angaben. Im Verlaufe meiner Untersuchungen gelangte ich zu der Ueberzeugung, dass zwischen den beiden Geschlechtern der *Eylais*arten ein ziemlich leicht erkennbarer Unterschied herrscht. Dieser Unterschied offenbart sich in erster Reihe in der Körpergrösse, denn nach meinen Erfahrungen ist das Männchen stets viel kleiner, als das Weibchen. Weit wichtiger und auffallender ist aber die Verschiedenheit, welche sich in der Behaarung der Füsse des Männchens und Weibchens zeigt. Während nämlich beim Weibchen das dritte bis fünfte Glied der drei vorderen Fusspaare bloss an der oberen Seite Schwimmhaare tragen, sind dieselben beim Männchen auch an der unteren Seite mit derlei Borsten bewehrt.

Verzeichniss der Arten.

1. *Eylais bisinuosa* PIERS.

Aus Ungarn zuerst von R. PIERSIG, auf Grund der im Teich des Husz-Parkes in Poprád gesammelten Exemplare im Jahre 1899 verzeichnet. Ich fand sie bei Budapest (Lágymányos), Ó-Buda, Zircz.

2. *Eylais emarginata* PIERS.

Fundorte: Csáktornya, Kolozsmonostor, Muraszerdahely. Unter den mir vorliegenden Exemplaren fand ich auch zwei Männchen.

3. *Eylais hungarica* n. sp.

Fig. 1, *a—f*.

Körper eiförmig, jedoch vorn nur wenig spitzer, als hinten. Körperlänge 3 mm, Breite 2,2 mm. Haut ungekörnt, Farbe un-

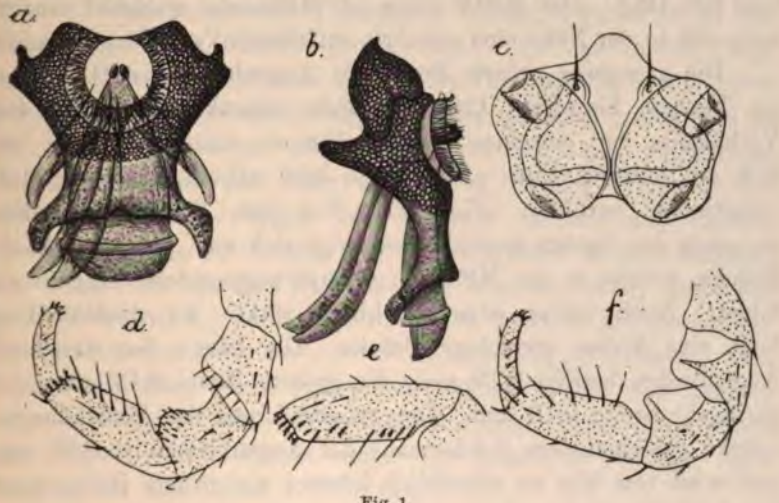


Fig. 1.

bekannt; denn es lagen mir bloss in Spiritus conservierte Exemplare vor.

Das Maxillarorgan vom Vorderrand der Mundscheibe bis zum Hinterrand 0,36 mm lang, bei 0,48 mm grösster Breite. Die Mundscheibe ist kreisförmig, mit dem grössten Durchmesser von 0,22 mm, der Umkreis derselben ist dicht porös, im übrigen

erscheint das ganze Maxillarorgan porenlos und bloss an den Fortsätzen zeigen sich einige kleinere Poren, welche eine netzartige Structur aufweisen. Die Maxillarplatte ist in der Mitte des Vorderrandes ziemlich breit, doch seicht gebuchtet (Fig. 1*a*), die an beiden Seiten der Bucht liegenden Hügelchen sind stumpf abgerundet; der Hinterrand in der Mitte schwach vertieft, die Seitenfortsätze ziemlich breit, mit der Spitze nach hinten blickend. Der Oesophagus ist schlauchförmig, von der Mundöffnung an allmählich verbreitert, im hinteren Viertel mit einem gut entwickelten Gürtel umgeben und zugleich hier am breitesten; die Länge desselben 0,4 mm, die grösste Breite 0,24 mm; der hintere Theil desselben ist stumpf abgerundet. Von der Seite gesehen (Fig. 1*b*) ist die unter der Mundscheibe gelegene Partie des Maxillarorgans etwas vertieft und einem Sattel ähnlich. Die Luftsäcke sind länger als der Oesophagus, säbelförmig, am Ende ein wenig zugespitzt, 0,43 mm lang. Das distale Ende der Mandibeln erscheint scharf, weil sich in der Nähe eine ziemlich auffallende Vertiefung befindet.

Die gesammte grösste Breite der Augenbrillen ist 0,31 mm, die kleinste hingegen 0,26 mm. Sehr charakteristisch ist das Verhältniss der einzelnen Augenbrillen zu einander, indem sie sich am hinteren Ende einander so sehr nähern, dass sie sich unmittelbar berühren (Fig. 1*c*). Vor dem Berührungspunkte zwischen den beiden Augenbrillen zeigt sich eine gut entwickelte Brücke, welche in der Mitte ein stumpf abgerundetes Hügelchen bildet. Auch hinter dem Berührungspunkte der Augenbrillen liegt eine kleine dreieckige Brücke. Die Länge der einzelnen Augenbrillen beträgt 0,19 mm, die grösste Breite 0,13 mm, die geringste Breite 0,12 mm. Die grösste Länge der Verbindungsbrücke zwischen dem Vorderrande der Augenbrillen ist 0,17 mm und wird von hier an allmählich kürzer; die grösste Breite vom Rand des Hügelchens bis zur Berührung der beiden Augenbrillen beträgt 0,025 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind nierenförmig, das hintere Ende jedoch breiter abgerundet. Die vorderen Linsen gleichen einem Kegel mit breit abgerundeter Spitze, die hinteren sind breit spindelförmig.

Die Palpen sind verhältnissmässig dick, 1,0 mm lang; die Länge der einzelnen Glieder ist folgende: die des ersten Gliedes

0,17 mm, des zweiten 0,18 mm, des dritten 0,2 mm, des vierten 0,35 mm, des fünften 0,2 mm. Das distale obere Ende des ersten Gliedes ist etwas verlängert, mit einer Borste bewehrt (Fig. 1*d*, *f*). Das zweite Glied ist gegen das distale Ende stark verbreitert, das untere Ende ziemlich vortretend, an der inneren Seite, dem Endrand entlang mit 6—7 glatten Borsten versehen (Fig. 1*d*). Das distale untere Ende des dritten Gliedes ist etwas vorstehend, stumpf abgerundet, an der inneren Seite sitzen 16—18 kurze Borsten, die glatt oder fein gefiedert sind (Fig. 1*d*). Das proximale Ende des vierten Gliedes ist dünn, das erste Drittel am dicksten, von da an gegen das distale Ende allmählich verjüngt, an der inneren Seite der rechten Palpe (Fig. 1*d*) sitzen 7 glatte und 8 kurze gefiederte Borsten; zwei der letzteren sind in der Reihe der glatten Borsten, die übrigen aber an dem distalen Endrande situiert, wogegen fünf der glatten Borsten in der Nähe des unteren Gliedrandes eine Längsreihe bilden, zwei aber in die Nähe des oberen Randes gerückt sind. An der linken Palpe stehen an der inneren Seite des vierten Gliedes (Fig. 1*e*) 6 glatte Borsten und 13 gefiederte Dornen; 4 der glatten Borsten sind in der Nähe des unteren Gliedrandes in einer Reihe angeordnet, wogegen zwei in der Nähe des oberen Randes sitzen; 2 der gefiederten Dornen liegen zwischen der zweiten und dritten, 2 aber zwischen der dritten und vierten glatten Borste, während die übrigen am distalen Endrande des Gliedes stehen, und zwar in zwei Reihen, d. i. in der inneren Reihe 3 und in der äusseren 6. An der äusseren Seite des vierten Gliedes (Fig. 1*f*) erheben sich 8 glatte Borsten, deren 6 mit dem unteren Rande eine parallel laufende Reihe bilden, während 2 am distalen Ende emporragen. Am fünften Gliede stehen innen wie aussen 3 kräftige feine Borsten, am Ende aber 4 Zähnchen.

Die Füsse sind verhältnissmässig dünn, von verschiedener Länge; der erste Fuss ist 1,73 mm, der zweite 2,12 mm, der dritte 1,29 mm, der vierte aber 2,68 mm lang. Die zwei letzten Glieder der Füsse sind unten mit glatten und gefiederten Borsten dicht besetzt.

Fundort: Félegyháza, wo das Thier in den sodahaltigen Wässern lebt; es liegt mir jedoch nur ein Exemplar vor.

Diese neue Art steht am nächsten zu *Eylais infundibulifera* KOEN., insbesondere dadurch, dass die verbindende Brücke zwischen den beiden Augenbrillen am Vorderrande ein Hügelchen mit abgerundeter Spitze bildet, unterscheidet sich jedoch von derselben dadurch, dass die Augenbrillen hinten einander berühren und dass die Palpenglieder anders beborstet sind.

4. *Eylais dubia* n. sp.

Fig. 2, *a*—*c*.

Der Körper ist eiförmig, hinten weit stumpfer abgerundet als vorn und hier ziemlich zugespitzt; die Länge 1,8—2,1 mm, die Breite 1—1,5 mm.

Die Haut erscheint fein granuliert. Farbe unbekannt, weil ich bloss in Spiritus conservierte Exemplare untersuchte.

Die Länge des Maxillarorgans beträgt vom Vorderrand der Mundscheibe bis zum Hinterrand 0,33 mm, die grösste Breite 0,31 mm.

Die Mundscheibe ist kreisförmig mit 0,2 mm Durchmesser; der Umkreis derselben ziemlich dicht mit Poren besetzt und deshalb netzartig erscheinend. Der Vorderrand des Maxillarorgans ist in der Mitte schwach gebuchtet, die an beiden Seiten der Bucht stehenden Hügel sind stumpf abgerundet, der Hinterrand gerade abgeschnitten, die Seitenfortsätze ziemlich kurz, spärlich porös. Seitlich gesehen erscheint das Maxillarorgan sattelförmig und ist hinter der Mundscheibe etwas vertieft. Der Oesophagus ist schlauchförmig, nach hinten allmählich verbreitert, das Ende ziemlich spitz abgerundet und trägt einen schwachen Cuticularring. Länge 0,3 mm, grösste Breite 0,14 mm. Die Luftsäcke sind relativ sehr kurz, das Ende derselben schlauchförmig, 0,2 mm lang.

Die grösste Breite der ganzen Augenbrille ist 0,19 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind annähernd gerade nierenförmig, an beiden Enden nahezu gleichmässig abgerundet (Fig. 2*a*); die innere Seite fast gerade, die äussere in der Mitte schwach ausgebuchtet; 0,17 mm lang, 0,085 mm breit. Die Brücke zwischen beiden Augenbrillen ist sehr kurz — 0,021 mm, — bildet vorn eine kurze, spitz zulaufende Erhöhung und ist hinten gerade ab-

geschnitten. Dieselbe ist jedoch nicht in ihrer ganzen Ausdehnung gleich breit, weil die Basis der Augenborsten eine ziemlich grosse Partie occupiert. Ihre Breite von der Kuppe der vorderen Erhöhung bis zum Hinterrande ist 0,11 mm. Die vorderen Linsen sind spitz abgerundeten, mit breiter Basis versehenen Kegeln vergleichbar, die hinteren einigermassen elliptisch. Die Augenborsten erheben sich ziemlich entfernt von dem Vorderrand der Verbindungsbrücke, ihre Basis ist kahnförmig und einestheils in den Augenbrillen, anderntheils in der Brücke fundiert.

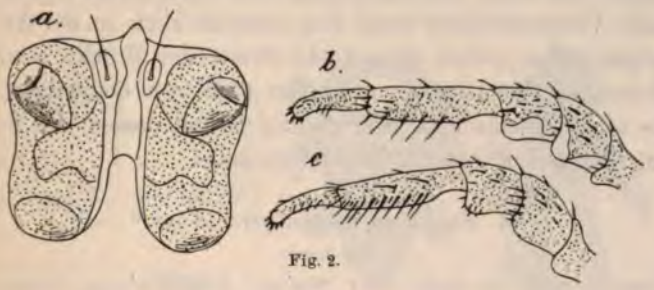


Fig. 2.

Die Palpen sind ziemlich lang und kräftig; ihre ganze Länge beträgt 0,84 mm. Die Länge der einzelnen Glieder ist folgende: erstes Glied 0,1 mm, zweites Glied 0,15 mm, drittes Glied 0,15 mm, viertes Glied 0,28 mm, fünftes Glied 0,16 mm. Das erste Glied ist gegen das distale Ende verdickt, die obere Spitze jedoch gerade geschnitten. Das zweite Glied ist dick, das distale untere Ende abgerundet, jedoch nicht vorstehend, an der äusseren Seite (Fig. 2*b*) mit mehreren glatten Borsten, an der inneren Seite, am distalen Endrande 5—7 glatte Borsten (Fig. 2*c*). Das dritte Glied ist am distalen unteren Ende abgerundet, jedoch nicht vorstehend, an der Aussenseite stehen mehrere Borsten (Fig. 2*b*), wogegen die Innenseite am distalen unteren Ende mit 7—8 glatten oder gefiederten Dornen bewehrt ist (Fig. 2*c*). Das proximale Ende am vierten Gliede ist dünn, das erste Drittel dicker, von da an gegen das distale Ende allmählich verjüngt; an der Aussenseite sind 10 glatte Borsten, deren 6 entlang des Unterrandes stehen, 4 dagegen paarweise an das distale Ende gerückt sind (Fig. 2*b*). An der Innenseite, den Unterrand entlang, sitzen

10—11 glatte Borsten und zwischen denselben zerstreut 6—8 gefiederte Dornen (Fig. 2*c*). Das fünfte Glied ist gegen das Ende allmählich verjüngt, am distalen Ende etwas gekrümmt, an der Aussen- und Innenseite mit 3—4 kräftigen Dornen und an der Spitze mit 5—7 Zähnchen bewehrt (Fig. 2*b*, *c*).

Die Füsse sind fast gleich dick von folgender Länge: der erste Fuss 1,6 mm, der zweite 1,8 mm, der dritte 1,95 mm, der vierte 2,1 mm.

Männchen fand ich nicht.

Diese Art steht der *Eylais infundibulifera* KOEN. sehr nahe. Die nahe Verwandtschaft zeigt sich hauptsächlich in der Structur der Augenbrillen, allein Länge und Breite der Brücke sowie das Hügelchen am Vorderrande derselben sind von denjenigen jener Art so sehr verschieden, dass ich auf Grund dessen die Sonderstellung der neuen Art für berechtigt halte.

5. *Eylais infundibulifera* KOEN.*

Fig. 3, *a*—*e*.

Der Körper ist mehr oder weniger kugelförmig, vorn etwas spitzer abgerundet; Länge 2,8 mm, Breite 2 mm.

Die Haut ist glatt, nicht granuliert. Farbe nicht bekannt, weil mir nur in Spiritus conservierte Exemplare zu Gebote standen.

Die Länge des Maxillarorgans beträgt vom Vorderrand der Mundscheibe bis zum Hinterrande 0,31 mm, seine grösste Breite 0,38 mm. Die Mundscheibe ist im ganzen kreisförmig, der Unterrand aber gebuchtet (Fig. 3*b*), der grösste Durchmesser 0,18 mm, der Umkreis derselben ist ziemlich dicht porös, bezw. netzartig. Der Vorderrand des Maxillarorgans ist ziemlich ausgebuchtet, die zu beiden Seiten der Bucht sich erhebenden Hügel sind spitz abgerundet, der Hinterrand wellig, und zwar liegt das Wellenthal gerade in der Mitte. Die Seitenfortsätze sind ziemlich kurz, breit, spärlich porös (Fig. 3*b*). Seitlich gesehen ist das Maxillarorgan unter der Mundscheibe schwach vertieft (Fig. 3*c*). Der Oesophagus ist schlauchförmig, im hinteren Drittel am breitesten, trägt im hinteren Viertel einen Cuticularring, das hintere Ende spitz ab-

* Von R. PIERSIG unter dem Namen *Eulais Dadayi* erwähnt. (Das Thierreich. 13. Lief., pag. 308.)

gerundet, 0,36 mm lang, bei 0,16 mm grösster Breite. Die Luftsäcke sind ziemlich kurz, schmal, schlauchförmig, 0,33 mm lang.

Die grösste Breite der ganzen Augenbrille ist 0,33 mm, die Länge der einzelnen Augenbrillen 0,21 mm, die Breite derselben 0,125 mm, ihre Aussenseite schwach gerundet, der Innenrand in der Mitte etwas vertieft, an der Basis der Augenborsten zugespitzt (Fig. 3*a*). Die Brücke am Vorder- und Hinterrand am längsten (0,14—0,22 mm), in der Mitte 0,11 mm lang. In der Mitte des Vorderrandes erhebt sich ein Hügelchen mit stumpf abgerundeter Kuppe, der Hinterrand tief ausgeschnitten, von der Hügelkuppe

Fig. 3.

bis zu der Bucht des Hinterrandes 0,17—0,19 mm breit. Die vorderen Augenlinsen gleichen stumpf abgerundeten Kegeln, die hinteren sind kahnförmig. Die Basis der Augenborsten ist kreisförmig, vom Vorderrand der Brücke abgerückt.

Die Palpen sind ziemlich kräftig, 0,96 mm lang; die einzelnen Glieder von folgender Länge: das erste 0,12 mm, das zweite 0,14 mm, das dritte 0,25 mm, das vierte 0,3 mm, das fünfte 0,15 mm. Das distale obere Ende des ersten Gliedes ist stumpf gerundet. Das distale Ende des zweiten Gliedes ist etwas vortretend, ziemlich stumpf gerundet, am inneren Endrande mit 7—9 glatten Borsten versehen (Fig. 3*d*). Das distale untere Ende des dritten Gliedes ist ziemlich vorstehend, stumpf gerundet, aussen mit einer glatten

Borste (Fig. 3*e*), innen mit 12—14 kurzen Dornen bewehrt (Fig. 3*d*). Das vierte Glied der linken Palpe trägt innen 6—7 dolchförmige und 4 gezähnte, kurze Borsten, deren 3 am distalen Ende sitzen (Fig. 3*d*), dasjenige der rechten Palpe innen mit 6—9 dolchförmigen und 6 gefiederten Dornen bewehrt, deren 4 am distalen Ende situiert sind. Das vierte Glied der rechten Palpe trägt an der Aussenseite 5—6 dolchförmige Borsten (Fig. 3*e*), dasjenige der linken Palpe ist ausserdem mit einem gefiederten Dorn versehen.

Die Füsse sind relativ dünn und lang, und zwar der erste 1,84 mm, der zweite 1,96 mm, der dritte 2,1 mm, der vierte 2,33 mm lang.

Fundort: Puszta-Bugacz bei Kecskemét. Unter den mir vorliegenden 8 Exemplaren fand ich sowohl Männchen als auch Weibchen, welche in der Structur der Augenbrillen und des Maxillarorgans mit den KOENIKE'schen vollständig übereinstimmen, allein hinsichtlich der Structur der Palpen, hauptsächlich in der Beborstung des vierten Gliedes sich von jenen ausserordentlich unterscheiden.

6. *Eylais infundibulifera* KOEN.

var. *acuta* n. var.*

Fig. 4, *a—f*.

Der Körper ist mehr oder weniger kugelförmig, vorn jedoch spitzer abgerundet als hinten. Länge 1,8—2,2 mm, grösste Breite 1,2—1,8 mm.

Die Haut ist fein granuliert. Farbe unbekannt, weil ich nur in Spiritus conservierte Exemplare besitze.

Das Maxillarorgan (Fig. 4*a*, *b*) ist vom Vorderrand bis zum Hinterrand der Mundscheibe 0,16—0,28 mm lang bei einer grössten Breite von 0,25—0,28 mm. Die Mundscheibe ist regulär kreisförmig, ihr grösster Durchmesser 0,15 mm. Der Vorderrand des Maxillarorgans bald stärker, bald schwächer vertieft, die beiden Seitenerhebungen der Vertiefung stumpf gerundet (Fig. 4*a*), der Hinterrand in der Mitte stark ausgebuchtet, beiderseits mit einem

* Von R. PIERSIG unter dem Namen *Eulais acuta Dad.* als selbständige Art angenommen. (Das Thierreich. 13. Lief., pag. 308.)

stumpf abgerundeten Hügelchen, die Seitenfortsätze sehr kurz und schmal. Der Umkreis der Mundscheibe ist dicht porös, bezw. netzartig. Seitlich gesehen ist die Maxillarplatte unter der Mundscheibe schwach vertieft (Fig. 4*b*). Der Oesophagus ist schlauchförmig, das vordere Viertel dünn, sodann plötzlich verbreitert, mit einem Cuticularring, das hintere Ende stumpf abgerundet, 0,25 mm lang bei einer grössten Breite von 0,12—0,13 mm. Die Luftsäcke sind schlauchförmig, weit kürzer als der Oesophagus, 0,18 mm lang.

Die grösste Breite der ganzen Augenbrille beträgt 0,09 bis 0,22 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind im ganzen nierenförmig, zuweilen an der Innenseite abgerundet (Fig. 4*c*); die Aussenseite aber in allen Fällen in der Mitte schwach vertieft. Länge der einzelnen Augenbrillen 0,16—0,2 mm, ihre grösste Breite 0,08—0,1 mm, das obere und untere Ende gleichmässig abgerundet. Die Länge der Brücke 0,13—0,15 mm; der Vorderrand zeigt in der Mitte ein spitzes Hügelchen und ragt zuweilen in der Nähe der Augenbrillen als eine sanfte Erhöhung empor (Fig. 4*c*), sonst indessen einfach (Fig. 4*d*); der Hinterrand ist mehr oder weniger tief ausgebuchtet, die Grenzen der Bucht zuweilen einfach (Fig. 4*d*), in anderen Fällen hingegen in der Nähe des Hinterrandes der Augenbrillen vorspringend (Fig. 4*c*). Die Breite der Brücke von der Kuppe des Hügelchens bis zu der Bucht des Hinterrandes 0,08—0,1 mm, zwischen den beiden Enden der Augenbrillen 0,14—0,16 mm. Bei einzelnen Exemplaren findet sich auch eine zur Muskelanheftung dienende Cuticularverdickung, welche eine mehr oder weniger gestreckte Eiform annimmt (Fig. 4*c*). Die vorderen Augenlinsen gleichen einem mehr oder weniger stumpf abgerundeten Kegel, wogegen die hinteren kahnförmig sind. Die Augenborsten entspringen ziemlich entfernt vom Vorderrand der Brücke, den Augenbrillen bald ferner (Fig. 4*c*), bald näher gerückt (Fig. 4*d*), die Basis in der Regel eiförmig.

Die Palpen sind ziemlich dünn, 0,71—0,73 mm lang. Die Länge der einzelnen Glieder ist folgende: das erste Glied 0,1 mm, das zweite 0,1 mm, das dritte 0,12 mm, das vierte 0,24 mm, das fünfte 0,15—0,17 mm. Das distale obere Ende des ersten Gliedes ist verlängert. Das distale untere Ende des zweiten Gliedes bildet

kein Hügelchen, ist stumpf gerundet, an dem inneren distalen Endrande mit 5—7 glatten Borsten (Fig. 4*c*). Das distale untere Ende des dritten Gliedes ist ziemlich hervortretend, stumpf gerundet, an der Innenseite mit 14—18 glatten, kurzen Dornen bewehrt (Fig. 4*e*). Das vierte Glied ist in der ganzen Länge fast gleich dick, an der Innenseite mit 15—20 (Fig. 4*e*), an der Aussenseite mit 9—10 dolchförmigen Borsten versehen, deren 6 mit dem Unterrande eine parallel laufende Reihe bilden (Fig. 4*f*). Das fünfte Glied ist schwach gekrümmt, gegen das Ende verjüngt, aussen mit 3—4, innen mit 4—5 Dornen bestanden.

Die Füsse sind relativ dünn, ihre Länge individuell mannigfach.

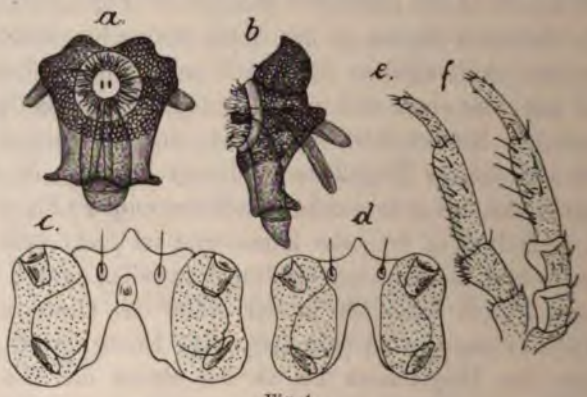


Fig. 4.

Fundort: der Velenczesee, woher mir 7 Exemplare vorliegen.

Von der KOENIKE'schen Stammform in erster Reihe durch das Hügelchen am Vorderrande der Brücke verschieden, unterscheidet es sich von derselben jedoch auch durch die Structur des Maxillarorgans, die Form des Oesophagus und die Beborstung der Palpenglieder. Erinnert übrigens durch das Hügelchen der Augenbrücke an PIERSIG's *Eylais bifurca*, welche KOENIKE als synonym von *Eylais infundibulifera* betrachtet, sowie auch an THON's *Eylais meridionalis*. Ich halte es übrigens nicht für ausgeschlossen, dass *Eylais infundibulifera var. acuta* n. var., sowie *Eylais bifurca* PIERS. und *Eylais meridionalis* THON in der That nichts anderes sind, als mehr oder weniger scharf charakterisierte Varietäten von *Eylais infundibulifera* KOEN.

7. *Eylais incisa* n. sp.

Fig. 5, *a—e.*

Körper eiförmig, vorn spitz, hinten stumpf abgerundet; 2 mm lang, 1,2 mm breit. Haut fast ganz glatt, auf dem Bauche zeigen sich jedoch einige zerstreute Körnchen. Die Farbe kenne ich nicht, weil meine Exemplare sämmtlich in Spiritus conserviert sind.

Die Länge des Maxillarorgans beträgt vom Vorderrand an gemessen 0,28—0,3 mm, die grösste Breite 0,32 mm. Der Vorderrand bildet in der Mitte eine ziemlich auffallend vertiefte Bucht, deren Seitenerhöhungen stumpf gerundet sind (Fig. 5*a*). Der Hinterrand ist gleichfalls ausgebuchtet; die Oberfläche erscheint rings der Mundscheibe reticuliert, sonst fast glatt; die hinteren Seitenfortsätze sind relativ kurz. Seitlich gesehen (Fig. 5*b*), ist die Maxillarplatte vor dem Hinterrande ziemlich vertieft. Die Mundscheibe ist vorn annähernd elliptisch, ihr grösster Durchmesser 0,17 mm, ihre grösste Länge 0,2 mm.

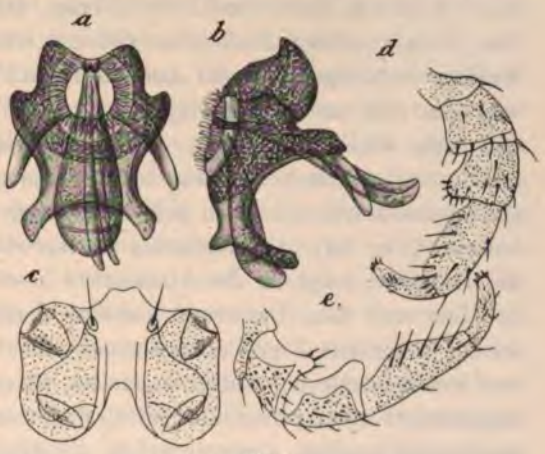


Fig. 5.

Oesophagus schlauchförmig, nach hinten allmählich verbreitert, 0,35 mm lang, die grösste Breite desselben 0,14 mm, im hinteren Viertel mit einem Cuticularring. Luftsäcke in geringem Maasse säbelförmig, das hintere Ende derselben abgerundet. Ihre Länge beträgt 0,38 mm, sie sind mithin länger als der Oesophagus.

Die Augenbrillen haben zusammen die grösste Breite von 0,28—0,3 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind im ganzen eiförmig (Fig. 5*c*), jedoch am vorderen und hinteren Ende fast gleich breit abgerundet, das Vorderende indessen dennoch spitzer, weil zur Aufnahme der Basis der Augenborsten innen etwas ausgeschnitten.

Die ganze Länge der einzelnen Augenbrillen 0,18—0,2 mm, bei der grössten Breite von 0,12 mm. Die Länge der Brücke ist in der Mitte 0,07 mm, an dem Ende der Augenbrillen 0,14 mm; der Vorderrand bildet in der Mitte ein vorspringendes Hügelchen mit abgeschnittener Kuppe, in der Mitte schwach ausgebuchtet; der Hinterrand stark eingeschnitten, gebuchtet; seine grösste Breite von der Spitze des Vorsprungs am Vorderrand bis zu dem Saum der Bucht am Hinterrande 0,14 mm. Die vorderen Augenlinsen sind stumpf abgerundeten, breiten Kegeln gleich, die hinteren spindelförmig. Die Basis der Augenborsten vom Vorderrand der Brücke ziemlich entfernt, eiförmig und in die entsprechende Vertiefung der Augenbrillen sich ziehend (Fig. 5*c*).

Die Palpen sind relativ dick, aber kurz, im ganzen 0,84 bis 0,88 mm lang. Die Länge der einzelnen Glieder ist folgende: das erste Glied 0,12—0,13 mm, das zweite 0,15 mm, das dritte 0,15—0,16 mm, das vierte 0,24—0,25 mm, das fünfte 0,18—0,19 mm. Das distale untere Ende des zweiten Gliedes ist in geringem Maasse vorspringend, an der Aussenseite mit 4—5 Borsten bewehrt, wogegen sich am distalen inneren Endrand 5—7 Borsten in einer Querreihe erheben (Fig. 5*d*). Das distale untere Ende des dritten Gliedes ist ziemlich erhaben, an der Innenseite mit 7—9 feinen gefiederten Dornen, seitlich mit zerstreuten dolchförmigen Borsten bewehrt (Fig. 5*d*). Die Basis des vierten Gliedes ist wenig dünner, als die Mitte, trägt an der Aussenseite 5—6 dolchförmige Borsten in einer mit dem Unterrand parallel laufenden Reihe (Fig. 5*e*), an der Innenseite 5 gefiederte Dornen und 6 dolchförmige Borsten, von welch letzteren 5 eine Längsreihe bilden, während die sechste abgesondert steht; einer der gefiederten Dornen sitzt zwischen der ersten und zweiten, einer zwischen der dritten und vierten dolchförmigen Borste, drei aber stehen am distalen Endrande des Gliedes (Fig. 5*d*). Das Ende des fünften Gliedes ist mit 3 bis 4 Zähnen bewehrt, an den Seiten stehen 4—5 kurze Dornen.

Die Füsse sind ziemlich dünn, von folgender Länge: der erste Fuss 1,55 mm, der zweite 1,75 mm, der dritte 1,8 mm, der vierte 1,83 mm.

Fundorte: Hidegkut und Vrdnik, je ein Exemplar.

Die neue Art steht *Eylais infundibulifera* am nächsten. Dieser

Art gleicht sie sehr in der Structur der Augenbrücke, unterscheidet sich jedoch von ihr darin, dass der Hügel auf der Brücke nicht abgerundet, sondern abgeschnitten und in der Mitte ausgebuchtet ist. Zudem ist auch die Beborstung eine andere, als bei *Eylais infundibulifera*. Ich halte jedoch die Möglichkeit nicht für ausgeschlossen, dass die neue Art in den Kreis von *Eylais infundibulifera* KOEN. gehört und etwa bloss eine auffallende, gut charakterisierte Varietät derselben ist. Diese Frage wird später, auf reichlicheres Material gestützt, durch vergleichende Untersuchungen definitiv zu lösen sein.

8. *Eylais producta* n. sp.

Fig. 6, *a—c*.

Körper in geringem Maasse eiförmig, vorn etwas schmäler abgerundet als hinten. Länge 3 mm, grösste Breite 2,4 mm.

Die Haut ist nicht granuliert. Farbe unbekannt, weil ich nur in Spiritus conservierte Stücke untersuchen konnte.

Die Länge des Maxillarorgans, vom Vorderrand der Mundscheibe gemessen 0,5 mm, seine grösste Breite 0,44 mm. Der Vorderrand der Maxillarplatte ist in der Mitte seicht gebuchtet, die zu beiden Seiten der Bucht stehenden Grenzhügel nur wenig erhaben und stumpf abgerundet (Fig. 6*a*); der Hinterrand bildet in der Mitte ein schwach zugespitztes, stumpf abgerundetes Hügelchen; die hinteren Fortsätze sind relativ kurz und dick, die Oberfläche rings der Mundscheibe reticuliert, im unteren Theile aber fast glatt, vor dem Unterrande schwach vertieft (Fig. 6*b*). Die Mundscheibe ist im ganzen kreisförmig, der untere Rand aber in der Mitte ein wenig vertieft (Fig. 6*c*), ihr Durchmesser 0,26 mm. Der Oesophagus ist im ganzen schlauchförmig, im hinteren Viertel aber eingeschnürt und hier mit einem starken Cuticularring umgeben (Fig. 6*a*), das Hinterende stumpf abgerundet. Länge 0,5 mm, grösster Durchmesser vor dem Cuticularringe 0,22 mm, in der Nähe der Mundöffnung schmäler, d. i. 0,05 mm. Die Luftsäcke sind fast gerade, gegen das Hinterende verjüngt, am Oesophagus kürzer, 0,45 mm lang. Die Spitze der Mandibeln angelförmig gekrümmt (Fig. 6*b*).

Die grösste Breite der Augenbrillen ist 0,37 mm, die kleinste

0,3 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind nierenförmig, die vordere Kuppe spitzer als die hintere, ihre Aussenseite über der Mitte vertieft, die Innenseite schwach bogig, ihre Länge 0,21 mm, grösste Breite 0,14 mm. Die vorderen Augenlinsen sind stumpf abgerundeten Kegeln gleich, die unteren breit kahnförmig (Fig. 6c). Die Brücke vorn 0,18 mm, hinten 0,16 mm lang; der Vorderrand bildet zwei Wellenhügel und zwischen denselben in der Mitte einen fingerförmigen, schmalen und spitz abgerundeten Fortsatz

Fig. 6

(Fig. 6c); ihr Hinterrand reicht bis zum unteren Ende der Augenbrillen, ist in der Mitte aber stark vertieft und bildet einen nach hinten gerichteten fingerförmigen Fortsatz (Fig. 6c); Breite von der Spitze des Fortsatzes am Vorderrande bis zu derjenigen des Hinterrandes 0,2 mm, vom Vorderende der Augenbrillen bis zum Hinterrande derselben 0,2 mm. Die Basis der Augenborsten ist eiförmig, vom Vorderrande der Augenbrücke und der Innenseite der Augenbrille entfernt.

Die Palpen sind relativ dick und lang, ihre ganze Länge 1,28 mm; die Länge der einzelnen Glieder wie folgt: das erste Glied 0,16 mm, das zweite 0,2 mm, das dritte 0,22 mm, das vierte 0,45 mm, das fünfte 0,25 mm. Das distale obere Ende

des ersten Gliedes verlängert. Das distale untere Ende des zweiten Gliedes hervorragend, hügelartig, abgerundet, an der Aussenseite spärlich behaart (Fig. 6*e*), an der Innenseite dagegen mehrere dolchförmige Borsten, deren 7—8 am distalen Endrande situiert sind (Fig. 6*d*). Das distale untere Ende des dritten Gliedes ist einfach, bildet keinen Hügel, an der Aussenseite in der Nähe des proximalen Endes stehen drei Borsten in einer Reihe (Fig. 6*e*) und an der Innenseite des distalen unteren Endes 17—19 dolchförmige Borsten (Fig. 6*d*) Das vierte Glied ist an der Basis verschmälert, im proximalen Drittel verdickt, nahezu gebuckelt, dann bis zum distalen Ende allmählich verjüngt, an der Aussenseite mit 9—10 dolchförmigen Borsten, deren 3 am distalen Endrande sitzen (Fig. 6*e*); an der Innenseite stehen 24—25 dolchförmige Borsten, deren 8 am Unterrande eine parallele Reihe bilden, 5—6 aber am distalen Endrande sitzen, während die übrigen zerstreut stehen (Fig. 6*d*). Das fünfte Glied ist gegen das Ende schwach gekrümmt und verjüngt, an beiden Seiten sitzen 4—5 dolchförmige Borsten, am Ende aber 4—5 Zähnchen (Fig. 6*d, e*).

Die Füsse sind relativ dünn und lang, und zwar der erste Fuss 2,4 mm, der zweite 2,55 mm, der dritte 2,82 mm, der vierte 3,34 mm lang. Die Fussglieder sind an der unteren Seite dicht mit dornartigen Borsten besetzt.

Fundort: Fülöpszállás, von wo mir ein einziges Exemplar vorlag.

Die neue Art steht der *Eylais infundibulifera* am nächsten, besonders der eben beschriebenen Varietät *acuta* derselben. Die Aehnlichkeit zeigt sich hauptsächlich in dem fingerförmigen Fortsatze am Vorderrande der Augenbrillen, in den Details aber, sowie in der Structur des Maxillarorgans und in der Behaarung der Palpen zeigt sich eine so bedeutende Abweichung, dass sie auf Grund dessen leicht zu unterscheiden und zu erkennen ist.

9. *Eylais latipons* Thon.

Fig. 7, *a—c*.

Körper annähernd kugelförmig, vorn spitzer abgerundet, als hinten; Länge 1,8 mm, Breite 1,2 mm.

Haut nicht granuliert. Farbe unbekannt, denn alle meine Exemplare waren in Spiritus conserviert.

Länge des Maxillarorgans, vom Vorderrande der Mundscheibe gemessen, 0,34 mm, grösste Breite 0,35 mm. Der Vorderrand ist in der Mitte ausgebuchtet, die Hügel an beiden Seiten der Bucht sind ziemlich stumpf abgerundet (Fig. 7*a*); der Hinterrand in der Mitte stark zugespitzt, die Seitenfortsätze relativ kurz, ziemlich breit. Die Oberfläche rings der Mundscheibe ist dicht reticuliert, im übrigen ziemlich spärlich und fein punktiert. Mundscheibe kreisförmig, ihr grösster Durchmesser 0,16 mm. Oesophagus schlauchförmig, nach hinten allmählich verbreitert, das Hinterende desselben stumpf abgerundet, im hinteren Viertel

Fig. 7.

mit einem breiten Cuticularring (Fig. 7*a*); Länge 0,33 mm, gegeringste Breite 0,06 mm, grösste Breite beim Cuticularring 0,2 mm. Die Luftsäcke sind säbelförmige Schläuche, gegen Ende allmählich verbreitert, kürzer als der Oesophagus, 0,31 mm lang. Seitlich gesehen ist die Maxillarplatte zwischen der Mundscheibe und der Spitze des Hinterrandes schwach vertieft (Fig. 7*b*). Das Vorderende der Mandibel ist spitz, wenig gekrümmt.

Grösste Breite der ganzen Augenbrille 0,32 mm. Die einzelnen Augenbrillen sind nierenförmig, allein das untere Ende breiter als das obere, die Aussenseite über der Mitte schwach vertieft, die Innenseite abgerundet, ihre Breite 0,13 mm, die Länge 0,2 mm. Die vorderen Augenlinsen sind einem abgerundeten Kegel gleich, die hinteren nierenförmig (Fig. 7*c*). Die Länge der Brücke am Vorderende der Augenbrillen 0,24 mm,

am Hinterende 0,11 mm. Der Vorderrand ist breit, aber seicht, der Hinterrand schmal und tief gebuchtet (Fig. 7*c*), zwischen den Grenzlinien der beiden Buchten 0,09 mm breit. Die zur Muskelanheftung dienende Cuticularverdickung ist eiförmig, in die Nähe des Vorderrandes der Brücke gerückt. Die Basis der Augenborsten läuft in Form eines breiten Bandes entlang der Innenseite der Augenbrillen, ist jedoch in der Nähe des Vorderrandes der Brücke hügelartig erhaben (Fig. 7*c*).

Die Länge der Palpen, die Structur ihrer einzelnen Glieder und bezw. ihre Behaarung konnte ich nicht beobachten, weil dieselben an meinen Exemplaren leider fehlten.

Die Füsse sind ziemlich dünn, ihre Länge verschieden, und zwar der erste Fuss 1,4 mm, der zweite 1,68 mm, der dritte 1,73 mm, der vierte 1,9 mm lang.

Die Structur des männlichen Geschlechtsorgans vermochte ich nicht zu beobachten, im allgemeinen aber ist sie gleich jener der übrigen Arten.

Fundort: Deliblát, woher ich bloss ein einziges Männchen erhielt, welches hinsichtlich der Structur der Augenbrillen, insbesondere aber der Brücke von dem durch K. THON beschriebenen ziemlich bedeutend abweicht. Dem ungeachtet habe ich dies Exemplar nicht als eigene Art beschrieben, weil ich voraussetze, dass die sich zeigenden Verschiedenheiten etwa bloss eine Folge des Geschlechtsdimorphismus sein mögen. Die sichere Identificierung oder Unterscheidung wurde übrigens durch den bedauerlichen Umstand erschwert, dass — wie erwähnt — die Palpen meines Exemplares fehlten, weil sie beim Auskochen in der Kalilauge in Verlust geriethen.

10. *Eylais longipons* n. sp.

Fig. 8, *a—e*.

Körper nahezu kugelförmig, vorn nur wenig schmäler als hinten, 1,8—2,5 mm lang und 1,4—2 mm breit.

Haut fein granuliert. Farbe unbekannt, weil ich bloss in Spiritus conservierte Exemplare besitze.

Das Maxillarorgan ist, vom Vorderrand der Mundscheibe an gerechnet, 0,35 mm lang, ihre grösste Breite 0,42 mm; der Vorder-

rand ziemlich breit und tief gebuchtet, die Hügel an beiden Seiten der Bucht stumpf abgerundet; der Hinterrand wellig, in der Mitte breit und seicht gebuchtet, die beiden Wellenhügel stumpf abgerundet, die hinteren Seitenfortsätze nach oben und innen gekrümmt. Die Oberfläche ist rings der Mundscheibe dicht reticuliert, im übrigen mehr oder weniger grob, doch spärlich granuliert (Fig. 8*a*). Die Mundscheibe ist mehr oder weniger kreisförmig, ihr grösster Durchmesser 0,3 mm. Seitlich gesehen ist zwischen dem Unterrande der Maxillarplatte und der Mundscheibe eine sattelförmige Vertiefung sichtbar (Fig. 8*b*). Das distale Ende der Mandibel erscheint infolge einer doppelten Vertiefung auffallend abgeschnürt (Fig. 8*b*). Der Oesophagus ist breit schlauchförmig, das Vorderende auffallend schmal, nach hinten stark verbreitert, der Cuticularring ins Auge fallend, beiderseits in einen angelförmig gekrümmten Fortsatz ausgehend, das Hinterende auffallend zugespitzt (Fig. 8*a*). Länge 0,45 mm, kleinste Breite 0,05 mm, die grösste Breite bei dem Cuticularringe 0,26 mm. Die Luftsäcke sind säbelförmig, ziemlich breit, am Ende zugespitzte Schläuche bildend, deren Länge 0,52 mm beträgt, folglich den Oesophagus hierin übertreffend.

Die ganze Augenbrille ist 0,47 mm breit. Die einzelnen Augenbrillen mehr oder weniger eiförmig, an beiden Enden fast gleichförmig abgerundet, ihre Innen- und Aussenseite schwach bogig, ihre Breite 0,11 mm, ihre Länge 0,18 mm. Die vorderen Augenlinsen einem stumpf abgerundeten Kegel gleich, die hinteren elliptisch. Die Brücke ist 0,26 mm lang und 0,06 mm breit; der Vorderrand in der Mitte gebuchtet, vor der Basis der Augenborsten je einen abgerundeten Hügel bildend; der Hinterrand in der Mitte auffallend bogig (Fig. 8*e*). In der Nähe des Hinterrandes der Brücke zwei runde Fleckchen zum Anheften der Muskeln. Die Basis der Augenborsten ist ziemlich auffallend eiförmig.

Die Palpen sind relativ kräftig, 1,16 mm lang. Die einzelnen Glieder haben folgende Länge: das erste Glied 0,15 mm, das zweite 0,15 mm, das dritte 0,23 mm, das vierte 0,38 mm, das fünfte 0,25 mm. Das distale obere Ende des ersten Gliedes ist verlängert (Fig. 8*d*). Das distale untere Ende des zweiten Gliedes

ziemlich gedunsen, abgerundet, am distalen inneren Endrande mit 5—6 glatten Borsten (Fig. 8*e*). Das dritte Glied den vorigen gleich, das distale untere Ende aber vorstehender, stumpf abgerundet, innen mit 7—8 glatten Borsten (Fig. 8*e*). Das vierte Glied in der ganzen Länge fast gleich dick, an der Aussenseite mit 6 dolchförmigen Borsten, nahezu paarweise in der Nähe des

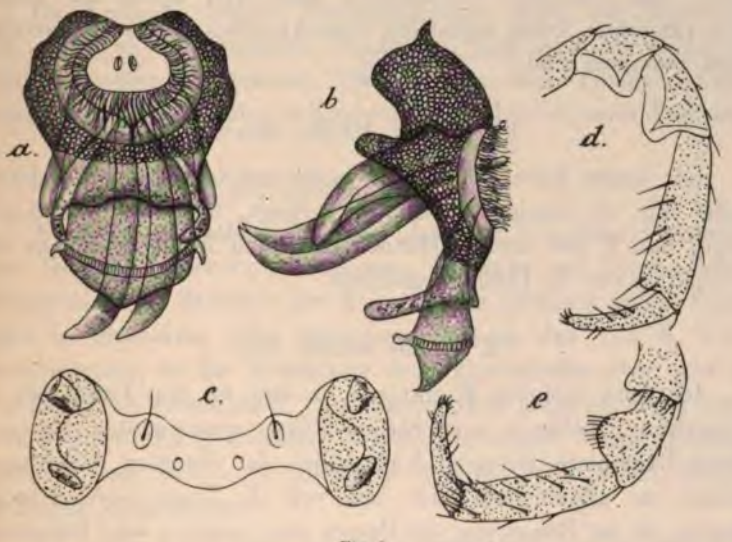


Fig. 8.

Unterrandes situiert (Fig. 8*d*), die Innenseite mit 10—11 dolchförmigen, glatten und 3 gefiederten Borsten, welch letztere am distalen Endrande sitzen (Fig. 8*e*), während die übrigen zerstreut stehen. Das fünfte Glied gegen Ende allmählich verjüngt, an den schwach gekrümmten Seiten mit 3—4 kräftigen und einigen schwächeren glatten Borsten bewehrt.

Die Füsse sind relativ dünn und lang und zwar misst der erste Fuss 1,78 mm, der zweite 2 mm, der dritte 2,21 mm, der vierte 2,5 mm.

Fundort: Szentgothárd (Mezöség, Siebenbürgen) und Török-Bálint. Ich erhielt bloss zwei Exemplare.

Die neue Art gleicht der *Eylais hamata* KOEN. und *Eylais megalostoma* KOEN. Mit der erstern stimmt sie hinsichtlich der

Structur des Oesophagus, mit der letzteren in der Form der Brücke überein. Von beiden unterscheidet sie sich jedoch durch die Structur der Brücke und die Behaarung der Palpenglieder. Ihr auffallendes Merkmal ist die Länge der Brücke, übertrifft sie doch sogar *Eylais hamata* KOEN., deren Brücke bei 4,7 mm Breite bloss 0,25 mm lang ist. Ich verschliesse mich jedoch der Möglichkeit nicht, dass die eben beschriebene neue Art, sowie die beiden KOENIKE'schen Arten eigentlich bloss Auswüchse, bezw. Varietäten eines Stammes sind.

11. *Eylais Mülleri* KOEN.

Ich kenne diese Art bisher bloss aus dem kleinen Balaton, woher mir ein einziges Exemplar vorliegt, und zwar ein 3 mm langes und 2 mm breites Männchen, dessen Augen durchaus der Abbildung von R. PIERSIG gleichen.

12. *Eylais similis* THON.

Ich fand mehrere Exemplare in dem an den Fundorten zu Félegyháza, Kőbánya und Szeged-Rókus gesammelten Material. Meine Exemplare stimmen hinsichtlich der Structur der Augenbrillen im allgemeinen mit den von K. THON beschriebenen überein, in der Behaarung der Palpen aber sind sie sehr bedeutend von denselben verschieden. Das distale untere Ende des dritten Palpengliedes trägt nämlich nur 5—7 kurze, glatte Borsten. Das vierte Glied zeigt aussen 3 dolchförmige, glatte Borsten, innen aber an einem 2 dolchförmige, glatte und 7—8 kurze, gefiederte Borsten, an einem anderen hingegen 4 dolchförmige, glatte Borsten und 3—4 gefiederte Dornen, von welch letzteren 3 am distalen Ende des Gliedes sitzen.

13. *Eylais Soari* PIERS.

Eine der häufigsten Arten, welche ich an folgenden Fundorten antraf: Csehi, Félegyháza, Kőbánya, Nádudvar, Rákos. Unter meinen Exemplaren fanden sich sowohl Männchen als auch Weibchen. Die von Csehi herrührenden Exemplare weichen von den übrigen und den von R. PIERSIG beschriebenen darin ab,

dass auf der zur Muskelanheftung dienenden Scheibe sich zwei fingerförmige Fortsätze erheben und auch die Augenbrücke zwischen den Augenbrillen auffallend schmal, nämlich bloss 0,03 mm breit ist.

14. *Eylais tantilla* Koen.

Im Verlaufe meiner Untersuchungen fand ich zahlreiche Exemplare an verschiedenen Fundorten, und zwar bei Budapest, Kolozsmonostor, Nádudvar, Török-Bálint und Tihany. Unter diesen Exemplaren fanden sich sowohl Männchen als auch Weibchen.

15. *Eylais tenera* Thon.

Es lagen mir zahlreiche Exemplare von folgenden Fundorten vor: Bugacz, Debreczen, Dorozsma, Kőbánya und Puszta-Péteri. Hinsichtlich der Structur der Augenbrillen gleichen meine Exemplare in grösserem oder geringerem Maasse den von K. Thon beschriebenen, in der Behaarung der Palpenglieder aber sind sie von denselben verschieden. Das vierte Glied trägt an der Aussenseite 4 dolchförmige Borsten, an der Innenseite 3 dolchförmige, glatte Borsten und 5—7 gefiederte Dornen, deren 3 am distalen Endrande situiert sind.

An dieser Stelle kann ich nicht unterlassen, auf die Aehnlichkeit hinzuweisen, welche bei *Eylais tantilla* Koen., *Eylais Voeltzkovi* Koen., *Eylais neglecta* Thon, *Eylais rimosa* Piers., *Eylais tenera* Thon und *Eylais similis* Thon sich in der Structur der Augenbrillen, besonders aber der Brücke zwischen denselben zeigt. Ich halte die Möglichkeit nicht für völlig ausgeschlossen, dass fernere, vergleichende Untersuchungen die Zusammengehörigkeit all dieser Arten nachweisen werden, insbesondere in jenem Falle, wenn es sicher feststeht — was mir übrigens sehr wahrscheinlich dünkt, — dass die Structur der Augenbrillen und die Behaarung der Palpen der Individuen je nach Grösse, Alter, Geschlecht und Fundort einer bedeutenden Variabilität ausgesetzt sind.

16. *Eylais triarcuata* PIERS.

Die untersuchten Exemplare gleichen den von R. PIERSIG beschriebenen in der Structur der Augenbrillen, hinsichtlich der Behaarung der Palpen aber zeigen sie einige Abweichung. An der Innenseite des vierten Palpengliedes fand ich nämlich in den meisten Fällen bloss 2 dolchförmige, glatte Borsten und 5—6 gefiederte Dornen, an der Aussenseite desselben aber 4 dolchförmige glatte Borsten und 2—3 gefiederte Dornen vor.

Fundorte: Bugacz, Debreczen, Keszthely und Szabadszállás.

19.

UEBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN ERSCHEINUNGEN DER MAGNETISCHEN DIELEKTRISCHEN UND MECHANISCHEN POLARISATION UND DIE AUS DIESEN FOLGENDEN MATERIAL-PRÜFUNGSMETHODEN.

Vortrag gehalten zu Budapest im September 1901, auf der III. Wanderversammlung des Internat. Verbandes für die Materialprüfungen der Technik.

Von Dr. MORITZ V. HOOR in Budapest.

Meine Herren!

Die Thatsache, dass die elektrischen und magnetischen Eigenschaften der Körper und die diese Eigenschaften charakterisierenden Constanten mit den übrigen physikalischen Eigenschaften in innigem Zusammenhange stehen und von letzteren beeinflusst werden, ist seit langer Zeit bekannt und sind die bisher aufgedeckten Beziehungen zwischen den verschiedenen physikalischen Quantitäten zum Ausgangspunkte mächtiger, geistreicher Theorien und wichtiger technischer Anwendungen geworden.

Besonders hervorzuheben sind die grossen Fortschritte, die unsere Kenntnisse auf dem Gebiete der magnetischen und elektrischen Erscheinungen in den letzten Jahrzehnten gemacht haben, die fast ausschliesslich den Anregungen der Praxis zu verdanken sind und ihren Anfang in industriellen Laboratorien genommen haben.

In keinem einzigen Zweige der technischen Wissenschaften sind wohl die experimentellen Erfahrungen im Laboratorium mit solcher Leichtigkeit und Raschheit zur Lösung praktischer Auf-

gaben herangezogen worden, wie auf dem Gebiete der Elektrotechnik und es ist daher begreiflich, dass in verhältnissmässig kurzer Zeit ein fast unabsehbares Versuchsmaterial zusammengetragen wurde, das nicht nur für die Elektrotechnik, sondern auch für die *anderen Zweige der technischen Wissenschaften eine unschätzbare, leider bis jetzt noch nicht genügend ausgenützte Fundgrube bildet.*

Der Umstand, dass die Untersuchungen in der Praxis gewöhnlich mit Rücksicht auf eine ganz bestimmte Aufgabe ausgeführt werden, macht die bedauerliche Thatsache erklärlich, dass von Seiten der Elektrotechniker der Zusammenhang zwischen den magnetischen und elektrischen Eigenschaften einerseits und den übrigen physikalischen Eigenschaften anderseits, besonders aber mit den mechanischen Eigenschaften, nicht mit jener Aufmerksamkeit verfolgt wurde, die vom wissenschaftlichen Standpunkte wünschenswerth gewesen wäre. Da in den elektro-mechanischen Constructionen den Anforderungen der mechanischen Festigkeit leicht genügt werden kann, anderseits in den Constructionen ein genügender Spielraum für die Anpassung an die speciellen elektrischen und magnetischen Eigenschaften der verschiedenen Constructionsmaterialien gegeben war, wurden alle einschlägigen Versuche in viel zu einseitiger Richtung fortgesetzt. Dasselbe gilt von all jenen Materialprüfungsmethoden, die mit Rücksicht auf die Anforderungen der Technik die Bau- und Constructionsmaterialien auf ihre mechanischen und chemischen Eigenschaften prüfen und die übrigen physikalischen Eigenschaften fast ganz ausser Acht lassen.

Stellt man die Versuchsergebnisse der beiden Richtungen kritisch nebeneinander, so findet man, dass die mannigfachen Beziehungen zwischen den chemischen, mechanischen, magnetischen und elektrischen Eigenschaften nicht nur von rein naturwissenschaftlichem Standpunkte, sondern auch von rein *praktischem* Standpunkte beurtheilt, eine grosse Bedeutung besitzen und nutzbar gemacht werden könnten.

Das zu Gebote stehende Versuchsmaterial ist allein schon hinreichend, um wichtige Schlüsse ziehen zu können, es sind jedoch ganz bedeutende Erfolge zu erwarten, wenn die Prüfung

der mechanischen, chemischen, elektrischen und magnetischen Eigenschaften fortan parallel und mit dem nöthigen Aufwande an experimentellen Feinheiten systematisch durchgeführt wird.

Gestatten Sie daher, dass ich näher auf diese Frage eingehe und einige concrete Folgerungen und Vorschläge an die nachfolgenden Ausführungen knüpfe.

Die Reihe der modernen Untersuchungen über die magnetischen Eigenschaften der Körper beginnt mit der grundlegenden Arbeit A. STOLETOW's, die derselbe zu Beginn der siebziger Jahre auf Anregung KIRCHHOFF's zur Untersuchung der Abhängigkeit der magnetischen Permeabilität des Eisens von der magnetisierenden Kraft an ringförmigen Probestücken ausgeführt hat. Diese Versuche sind die erste praktische Verkörperung von FARADAY's klassischen Untersuchungen und LORD KELVIN's (damals noch Sir William Thomson) und MAXWELL's theoretischen Arbeiten.

Die grundlegenden Arbeiten von WARBURG und EWING, John HOPKINSON und Lord RAILEIGH über die Erscheinungen der magnetischen Hysteresis, die klassischen Studien HOPKINSON's und KAPP's über die magnetischen Kreise der Dynamomaschinen, die Versuche ROWLAND's und endlich die zahllosen Versuche, die in elektrotechnischen Laboratorien ausgeführt wurden, haben eine ganze Reihe ganz ungeahnter Erscheinungen zu Tage gefördert, die unsere Anschauungen über die molecularen Vorgänge bei der magnetischen Polarisation wesentlich geändert und erweitert haben.

Alldiese Resultate, aber insbesondere die *mannigfachen Beziehungen zwischen mechanischen Einflüssen und magnetischen Erscheinungen*, die Veränderungen der Permeabilität unter dem Einflusse von Zug und Druck, die Nachwirkungen von Zug und Druck und überhaupt allen mechanischen Einwirkungen auf die magnetischen Eigenschaften, haben für die elektrotechnische Praxis eine gewaltige Bedeutung gewonnen, sie sind aber auch für andere Zweige der technischen Wissenschaften von grossem Werthe und meiner Ansicht nach heute bereits unentbehrlich, wenn es sich um die Aufgabe handelt, die Eigenschaften der in der Technik gebräuchlichen Bau- und Constructionsmaterialien genau zu präcisieren und diese Materialien zu beschreiben.

Aehnlich wie auf dem Gebiete der magnetischen Polarisation zeigt sich auch auf dem Gebiete der *dielektrischen Polarisation* der Zusammenhang zwischen all jenen Erscheinungen, die wir unter dem Sammelnamen „dielektrische Polarisation" zusammenfassen und den übrigen physikalischen Eigenschaften, dem Einfluss von Temperatur, mechanischen Einwirkungen u. s. w. in auffälliger Weise.

Dieser Zusammenhang ist in vielen Fällen so deutlich, dass man aus den dielektrischen Eigenschaften mit ziemlicher Sicherheit auf die mechanischen Eigenschaften, auf die Beständigkeit des Materials u. s. w., schliessen kann.

Aehnlich wie bei der Untersuchung der magnetischen Eigenschaften der Körper, haben sich die Kenntnisse über die Erscheinungen der dielektrischen Polarisation und deren Beziehungen zu den übrigen physikalischen Eigenschaften erst unter dem Druck der Praxis, besonders der Elektrotechnik, in den letzten Jahrzehnten rascher entwickelt.

Von CAVENDISH's und FARADAY's späteren grundlegenden Versuchen ausgehend, begnügte man sich anfangs, innerhalb enger Grenzen die Dielektricitätsconstanten der schlechten Leiter zu bestimmen, deren Veränderung mit Druck und Temperatur und deren Zusammenhang mit den optischen Eigenschaften zu studieren.

Lange Zeit herrschte die Ansicht, dass durch die Kenntniss der Dielektricitätsconstanten das dielektrische Verhalten der Körper vollständig charakterisiert sei.

Die Erfahrungen, die die Elektrotechnik in den letzten 15 Jahren an Condensatoren und Kabeln gemacht hat und die Versuche, die durch die Resultate der magnetischen Untersuchungen auch auf diesem Gebiete angeregt wurden, haben uns jedoch eines anderen belehrt. So z. B. haben die Untersuchungen von STEINMETZ, SWINBURNE, von H. F. WEBER und seiner Schule, die Untersuchungen von ARNÒ, HUTIN & LEBLANC, L. LOMBARDI u. s. w. unzweideutig die Existenz einer elektrostatischen Hysteresisarbeit in den schlechten Leitern, analog der magnetostatischen Hysteresisarbeit und eines damit verbundenen Arbeitsverlustes bei periodisch wechselnden elektromotorischen Kräften nachgewiesen.

Ich habe bereits in meinem Habilitationsvortrage, den ich

im Jahre 1893 an der technischen Hochschule zu Budapest gehalten habe, ausgehend von den über den Polarisationszustand und die Structur der dielektrischen und magnetischen Körper herrschenden Ansichten, der Ueberzeugung Ausdruck verliehen, dass die elektrostatische Induction in einigen besonderen Fällen unmöglich eine lineare Function der polarisierenden Kraft sein könne, d. h. mit anderen Worten: die Dielektricitätsconstante müsse sich mehr oder minder merkbar mit der polarisierenden Kraft ändern. In dieser Ansicht haben mich jene Versuche bestärkt, die ich zwecks Herstellung praktisch verwendbarer Condensatoren an verschiedenen dielektrischen Körpern in den Jahren 1893—96 mit periodisch wechselnden elektromotorischen Kräften ausgeführt habe.

Die unzweifelhafte Existenz einer elektrostatischen Hysteresis schien mir mit dem Glauben an die Unabhängigkeit der Dielektricitätsconstanten von den polarisierenden Kräften nicht vereinbar und war ich von Anfang an auf Grund des von Anderen veröffentlichten Versuchsmaterials überzeugt, dass mit Anwendung grösserer technischer Hilfsmittel bei der Untersuchung der dielektrischen Eigenschaften zwischen den charakteristischen Erscheinungen der dielektrischen Polarisation den magnetischen Polarisationserscheinungen vollkommen analoge Beziehungen aufgedeckt werden würden.

Die Versuche, die ich auf Grund des vorgelegten Programms mit Unterstützung der königl. ungarischen Akademie der Wissenschaften seit dem Jahre 1896 ausgeführt habe und deren einen Theil ich in den Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Berichten der königl. ungarischen Akademie der Wissenschaften sowie in der Elektrotechnischen Zeitschrift publiciert habe*, haben die Richtigkeit meiner Auffassung gezeigt.

Bei meinen Versuchen habe ich das Ziel verfolgt, einerseits in Anlehnung an die obenerwähnten typischen Erscheinungen der magnetischen Polarisation und ausgehend vom publicierten Versuchsmaterial, durch die Verwendung verschiedener Methoden,

* Siehe Hoor: Math. és Természettud. Értesitő XVIII, p. 268, 1900 und Hoor: Neuere Beiträge zur Naturgeschichte dielektrischer Körper. Elektrotechnische Zeitschrift XXII, p. 170, 1901.

insbesondere statischer Methoden, die analogen elektrostatischen Erscheinungen zu verfolgen, und andererseits die Beziehungen zwischen den Erscheinungen der magnetischen, elektrischen und mechanischen Eigenschaften im Allgemeinen zu untersuchen und die Frage zu studieren, in welcher Weise die elektrischen und magnetischen Eigenschaften für die moderne Materialprüfung dienstbar gemacht werden könnten.

Ich habe dabei mit Berücksichtigung der Anforderungen der Praxis innerhalb möglichst weiter Versuchsgrenzen gearbeitet und grössere Materialquantitäten, in grösseren Dimensionen als es bisher üblich war, in die Versuche einbezogen.

Ich werde später diese Resultate kurz zusammenfassen und auf jene praktischen Anwendungen hinweisen, die aus diesen Resultaten abgeleitet werden können.

Ich will hier nur kurz betonen, dass die typischen Erscheinungen der statischen und viscosen Hysteresis in den meisten Fällen in ebenso auffallender Weise auftreten und ebenso wie deren Zusammenhang mit den mechanischen Eigenschaften der Körper, mit ebenso einfachen Hülfsmitteln verfolgt werden können, als die analogen Erscheinungen der magnetischen Polarisation.

Ich habe parallel mit diesen Untersuchungen auch jene Veränderungen mit Aufmerksamkeit verfolgt, die der *specifische Leitungswiderstand* unter dem Einflusse der mechanischen, der magnetischen und der elektrostatischen Polarisation erleidet und eine Sichtung des über diesen Gegenstand publicierten Materials in Angriff genommen.

Die einschlägigen Arbeiten sind noch nicht abgeschlossen, ich will jedoch die Resultate einiger Vorversuche, sowie die bereits bekannten Resultate weiter unten zusammenfassen, aber auch hier bereits Ihre Aufmerksamkeit auf die bekannte Thatsache lenken, dass moleculare Veränderungen den specifischen Widerstand in auffälliger Weise beeinflussen.

Ich gehe nun mit Benützung der einschlägigen Literatur, sowie auch meiner eigenen Versuchsresultate zur Behandlung der typischen Eigenschaften der sogenannten *magnetischen Metalle, des Eisens, Nickels und Kobalts* und deren Legierungen mit verschiedenen anderen Metallen über und werde den Zusammenhang

dieser Eigenschaften mit den typischen mechanischen Eigenschaften dieser Metalle hervorheben.

In den sogenannten nichtmagnetischen Körpern, wie z. B. Silber, Kupfer, Zink und den übrigen Metallen, mit Ausnahme des Nickels, Eisens und Kobalts ist die magnetische Induction in einem System, soweit die Genauigkeit unserer Beobachtungsmethoden reicht, genau gleich so gross als wenn der von diesen Metallen erfüllte Raum durch Luft unter normalem Druck ausgefüllt wäre.

Die durch die magnetisierenden Kräfte und die entsprechenden Inductionen bestimmte Curve, die sogenannte Inductionscurve, ist daher für diese Körper eine *gerade Linie*. In den sogenannten magnetischen Körpern, im Eisen, Nickel und Kobalt und gewissen Legierungen dieser Metalle mit anderen Metallen weicht die Inductionscurve jedoch ganz bedeutend von der Geraden ab und zeigt mehr oder minder auffällig drei ganz genau charakteristische Theile.

Bei schwachen magnetisierenden Kräften nimmt die magnetische Induction verhältnissmässig langsam mit der magnetisierenden Kraft zu. Lassen wir die magnetisierende Kraft weiter anwachsen, so steigt die Induction von einer gewissen Grenze ab rasch an, um dann im dritten Theile der Curve bei weiter ansteigenden magnetisierenden Kräften wiederum verhältnissmässig langsamer zuzunehmen.

Die Form der Curve ist für ein gegebenes magnetisches Material *vollständig genau definiert* und kann mit der nöthigen Vorsicht mittelst der bekannten Methoden leicht aufgenommen werden.

Die magnetischen Inductionscurven des Gusseisens, des weichen Eisens, der verschiedenen Stahlsorten, des Nickels und Kobalts, zeigen ganz charakteristische Merkmale, so dass aus den Inductionscurven selbst ein Rückschluss auf die übrigen Eigenschaften des Materials, auf die Behandlungsweise, die mechanische Härte, die chemische Beschaffenheit etc., ja manchmal selbst auf die Provenienz desselben gemacht werden kann.

In Figur 1 habe ich einige solche Inductionscurven dargestellt. — Die Abscissenachse giebt die magnetisierende Kraft H,

die Ordinatenachse die entsprechende magnetische Induction B in absoluten *C.G.S.* Einheiten. I ist die Inductionscurve einer *Martin-Stahl*-Qualität der Firma Ganz & Comp., II ist die Curve einer Thomas-Stahl-Qualität der Eisenwerke zu Ózd, III die Curve einer Magnetstahlsorte, IV bezieht sich auf eine Schmiedeeisensorte, V auf weiche Eisenbleche der Styriahüttenwerke, VI auf ein Gusseisen der Firma Ganz & Comp., endlich die gestrichelte Curve auf weiches Nickel und die strichpunktierte Linie auf gehärtetes Kobalt.

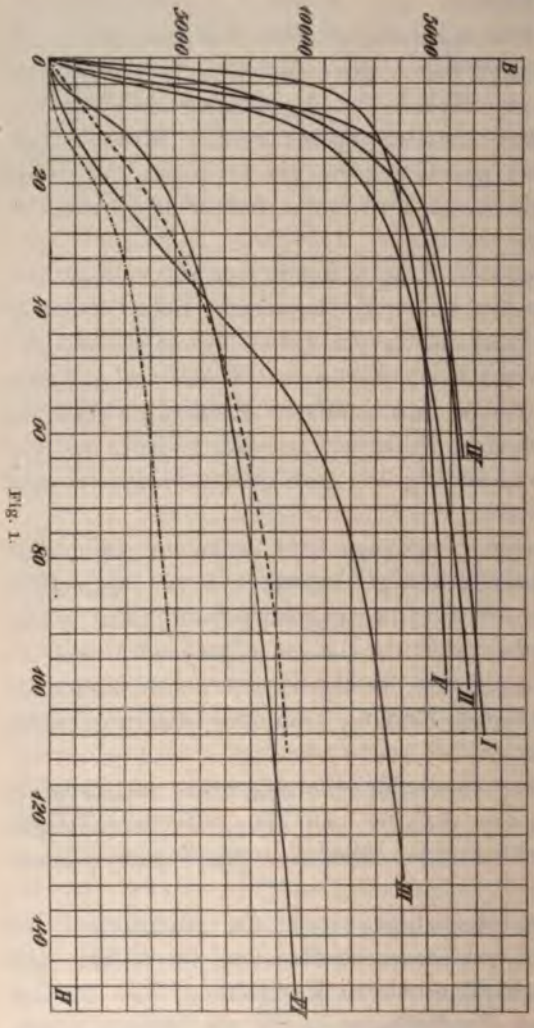


Fig. 1.

Die Curven II und IV wurden in dem unter meiner Leitung stehenden Laboratorium der Firma Ganz & Comp. von den Ingenieuren des Laboratoriums, die Curven I, III, V und VI von mir selbst aufgenommen. — Die Curven für Nickel und Kobalt sind aus Ewing's Versuchsdaten* abgeleitet.

* Siehe Ewing: Magnetic Induction in Iron and other Metals. London 1900.

Die Form dieser Curven, als auch derjenigen, die die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{B}{H} = \mu$, d. h. der sogenannten *magnetischen Permeabilität* von der magnetisierenden Kraft H darstellen ändert sich mit der Temperatur und unter dem Einflusse von mechanischen Beanspruchungen ganz bedeutend, wenn sie auch im Grossen und Ganzen die für das Material charakteristischen Eigenschaften behält.

Die Curve III ist typisch für ein mechanisch und magnetisch hartes Material, die Curve V hingegen typisch für ein sehr weiches Material. Die wesentlichen Abweichungen in der Form und den absoluten Werthen der Curve lassen uns vermuthen, dass diese Curven und die Permeabilitätswerthe eine genaue, verlässliche Skala zur Definition der verschiedenen Eisen- und Stahlqualitäten liefern können.

Im Allgemeinen findet man, dass durch die Härtung oder durch Vermehrung des Kohlengehaltes die Inductionscurven in der Richtung der Abscissenachse gestreckt werden, d. h. also für dieselben magnetisierenden Kräfte die entsprechenden Inductionen geringer werden.

Noch interessanter ist eine Vergleichung der Permeabilitätscurven und insbesondere die Vergleichung der Maximalwerthe, die die Permeabilität, d. h. $\mu = \frac{B}{H}$, bei einem gewissen Materiale, erreicht. — So ist z. B. der Maximalwerth bei weichem Eisen nahe bei 3000 gelegen, währenddem bei harten Stahlsorten das Maximum von μ zwischen 100 und 200 gelegen ist.

Im Allgemeinen nimmt die Permeabilität bei anwachsender Temperatur für dieselben magnetisierenden Kräfte zu, fällt jedoch von einer gewissen Temperatur an rasch bis zum Werthe 1, so dass oberhalb dieser Temperatur sich Eisen, Nickel und Kobalt ganz ähnlich, wie nichtmagnetische Körper verhalten. Diese Temperatur stimmt mit den *Recalescenzpunkten* der genannten Metalle überein.

Durch den Einfluss von Zugbelastungen werden die Curven in der Richtung der Abscissenachse gestreckt, so dass also unter dem Einflusse von Zug die Permeabilität für eine gegebene mag-

netisierende Kraft kleiner ist, als wenn das betreffende Versuchsstück nicht belastet wäre. Hört die Beanspruchung auf, so erreicht die Permeabilität nicht sofort ihren ursprünglichen Werth, sondern es bedarf einer mehr oder minder langen Zeit, bis die Curve ihre frühere Form erreicht. War die Beanspruchung eine genügend starke, so kehrt die Curve in ihre ursprüngliche Form überhaupt nicht mehr zurück.

Wir werden später eine analoge Beziehung bei den Veränderungen des specifischen Leitungswiderstandes unter dem Einflusse von mechanischen Beanspruchungen finden: beide Erscheinungen zeigen, dass selbst durch Beanspruchungen, die, im mechanischen Sinne genommen, unter der Elasticitätsgrenze liegen, bleibende oder zumindest länger andauernde moleculare Veränderungen im Körper hervorgerufen werden.

Werden die magnetischen Metalle über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet, so treten grössere bleibende Veränderungen der Permeabilität ein. — Die Curve II der Figur 2 giebt z. B. nach ROWLAND die Permeabilität μ als Function der Induction B für Schmiedeeisen in normalem weichen Zustande, Curve I ist die entsprechende Curve für dasselbe Material, nachdem es durch Strecken gehärtet wurde.*

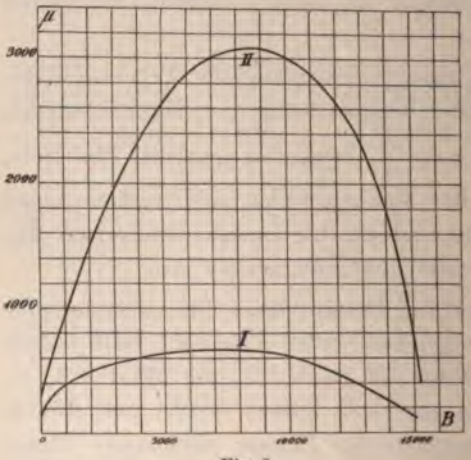


Fig. 2.

Durch Druckbeanspruchungen wird die Permeabilität im Allgemeinen erhöht, d. h. also die Inductionscurven werden in der Richtung der Ordinatenachse verschoben.

Diese Erscheinungen sind ganz allgemein bei allen magnetischen Metallen zu beobachten, jedoch ganz besonders auffällig bei Nickel und Eisen-Nickellegierungen.

---

* Siehe EWING, loco cit.

Die Curven I, II und III der Figur 3 geben nach EWING die Permeabilitätscurven für weiches Nickel, entsprechend den Druckbelastungen 0, 3,5 und 6,8 kg per mm². Die Curven IV und V geben die Permeabilität gegossenen Kobalts als Function der Induction B für Druckbelastungen vn 0 und 16,2 kg pro mm².

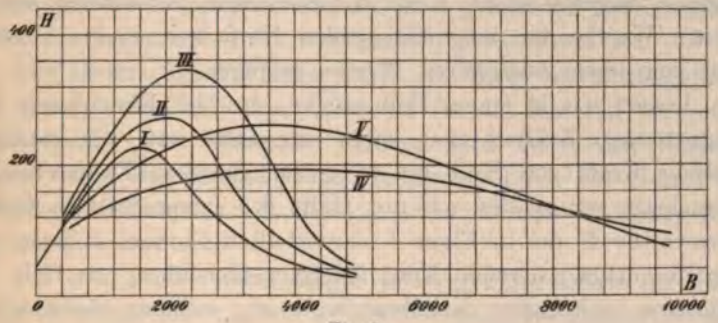


Fig. 3.

Aehnlich, wie nach den Einwirkungen von Zugkräften, sind auch nach den Einwirkungen der Druckkräfte langsam verlaufende Nachwirkungen wahrzunehmen, so dass also nach dem Aufhören der Druckbelastung die Permeabilität nicht sofort ihre ursprünglichen Werthe annimmt, sondern erst nach einer Zeit dorthin zurückkehrt. Bei höheren Belastungen treten ganz bedeutende bleibende Veränderungen auf.

Stellt man den magnetischen Versuchsergebnissen diejenigen Resultate gegenüber, die man bei der Untersuchung der mechanischen Eigenschaften desselben Materials erhalten hat, so findet man, dass im Allgemeinen die Veränderungen der Permeabilität bei grösseren Beanspruchungen um so grösser werden, je grösser die Deformation des Materials ist. Man findet aber auch, dass bleibende oder zeitweilige Veränderungen bereits bei so niedrigen Beanspruchungen eintreten, bei welchen die Deformationen noch mit keinerlei anderen Versuchsmitteln zu constatieren sind.

Diese Thatsache lässt uns vermuthen, dass durch die Untersuchung der magnetischen Permeabilität und die Aufnahme der Inductionscurven während und nach erfolgten mechanischen Beanspruchungen wichtige Daten für das Verhalten des Materials gewonnen werden können.

Die Erscheinungen der *statischen und viscosen magnetischen Hysteresis* geben uns ebenfalls ein sehr bequemes Mittel an die Hand, um die magnetischen Metalle und deren verschiedene Varietäten zu beschreiben.

Wie bekannt, ist der Werth der magnetischen Induction für dieselbe magnetisierende Kraft H verschieden, je nachdem wir zu diesem Werthe der magnetisierenden Kraft von einem höheren oder von einem niedrigeren Werthe gelangen.

Lassen wir in einem Probestücke, das der Einwirkung von magnetischen Kräften noch nicht ausgesetzt war, die magnetisierende Kraft von Null bis zu einem gewissen Endwerthe H_1 anwachsen, so erhalten wir mit Hülfe der entsprechenden Inductionswerthe B die in Figur 1 dargestellten Curven. Lassen wir nun die magnetisierende Kraft langsam abnehmen, so fällt die Induction nicht nach derselben Curve ab, sondern bleibt höher und der abfallende Theil der Inductionscurve schneidet die Ordinatenachse in beträchtlicher Höhe über dem Nullpunkte. Es ist also diejenige Induction, die im absteigenden Theile der Inductionscurve der magnetisierenden Kraft Null entspricht, von Null verschieden und wird die *remanente Induction* des Versuchsstückes genannt; sie ist eine der charakteristischen Grössen der magnetischen Metalle.

Lässt man nun von Null aus die magnetisierende Kraft in negativer Richtung anwachsen, so fällt die Induction weiter ab und es ist eine mehr oder minder beträchtliche negative magnetisierende Kraft H nothwendig, um die Induction auf Null herunterzubringen. Diese negative magnetisierende Kraft, die sogenannte *Coërcitivkraft*, ist ebenfalls eine charakteristische Grösse.

Lässt man nun die magnetisierende Kraft H weiter in negativer Richtung anwachsen, und zwar bis zu demselben Endwerthe H_1, den die magnetisierende Kraft H früher in positiver Richtung hatte, so erreicht die Induction denselben absoluten Werth B_1 auf der negativen Seite der Abscissenachse, den sie früher auf der positiven Seite erreicht hatte.

Lässt man nun H wieder gegen Null abfallen, so fällt B wiederum ab, schneidet bei $H = 0$ die negative Ordinatenachse ungefähr in derselben Entfernung, wie beim absteigenden Theile

die positive Ordinatenachse, und erreicht, wenn H wieder das positive Maximum H_1 erreicht hat, nahezu den positiven Anfangswerth B_1.

Der absteigende und aufsteigende Theil der Inductionscurven, die diesem Magnetisierungscyklus entsprechen, schliessen eine Fläche ein, die der während dieses Cyklus geleisteten *Polarisationsarbeit*, der sogenannten Hysteresisarbeit, proportional ist.

Die Grösse dieser Fläche, sowie die Form der aufsteigenden und absteigenden Inductionscurven ist für das Material sehr charakteristisch. Die Grösse der Flächen wird durch den Kohlengehalt, durch den mechanischen Härtegrad, durch den Gehalt an gewissen Metallen, so z. B. Mangan-, Chrom- und Wolframgehalt sehr stark beeinflusst.

So ist z. B. für starke Magnetisierungen die Arbeit für einen Magnetisierungscyklus in sehr weichem Schmiedeeisen ca. 10000 Erg pro cm³, in weichem Eisen ca. 16000. Für die verschiedenen Gusseisenqualitäten schwankt diese Arbeit für dieselben Magnetisierungscyklen zwischen 13000 und 30000 Erg, in weichen Stahlsorten zwischen 40000 und 60000 Erg. Claviersaitenstahl hat im ausgeglühten Zustande eine Hysteresisarbeit von 80000 bis 90000 Erg, gehärtet ca. 110—120000 Erg, Chromstahl hat in geglühtem Zustande ca. 65000 und in Oel gehärtet 167000 Erg. Wolframstahl mit 3,4 % Wolfram, 0,6 % Mangan und 0,5 % Kohle hat nach HOPKINSON eine Hysteresisarbeit von 216000 Erg pro Cyklus bei hoher Magnetisierung. Die Abhängigkeit der statischen Hysteresisarbeit w von den Inductionsgrenzen der Cyklen kann näherungsweise durch die Formel $w = \eta B^{1,6}$ dargestellt werden; η, der sogenannte Hysteresiscoefficient, ist ebenfalls eine charakteristische Grösse des Materials.

In den verschiedenen Nickelsorten schwankt die Hysteresisarbeit für starke Magnetisierungscyklen zwischen 10000 und 25000 Erg pro cm³.

Vergleicht man diese Zahlen miteinander, so ergiebt sich daraus, dass die Werthe der Hysteresisarbeit zwischen 10000 für weiches Schmiedeeisen und 216000 für harten Wolframstahl eine genaue Skala zur Charakterisierung der verschiedenen Eisen- und Stahlqualitäten abgeben können.

In Figur 4 habe ich die Hysteresiscurven für zwei verschiedene Stahlsorten der Firma Böhler im gehärteten und nicht gehärteten Zustande und einer weichen Eisensorte auf Grund der Versuche im Laboratorium der Firma Ganz & Comp. angegeben.

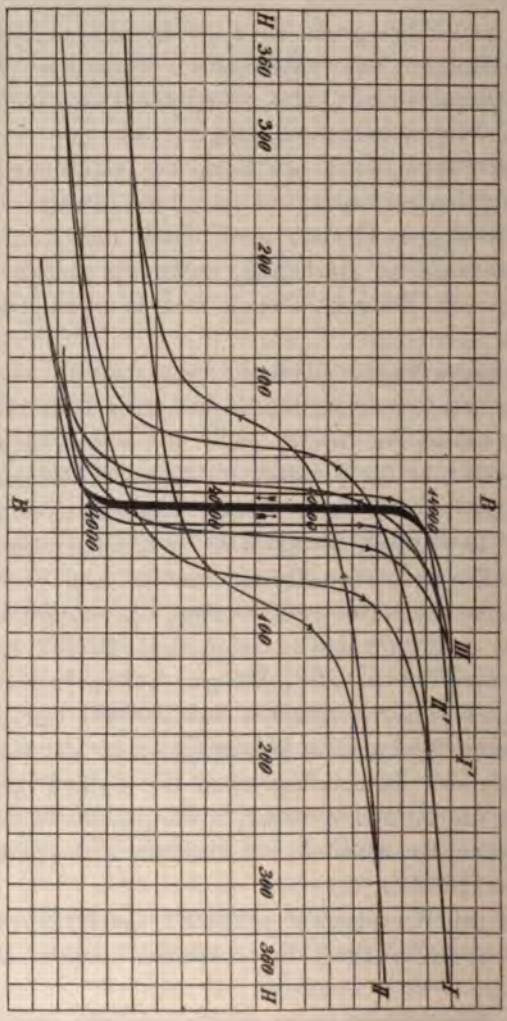


Fig. 4.

I und I_1 geben die Curven der Böhler'schen Magnetstahlmarke W. II. G. im gehärteten und nicht gehärteten Zustande, II und II'_1 die Curven für eine sehr harte Magnetstahlsorte der Firma Böhler im gehärteten, resp. nichtgehärteten Zustande.

Die Curven III, resp. die schwarz angelegte Fläche zwischen dem auf- und absteigenden Theile giebt die Hysteresisarbeit einer weichen Eisensorte.

Man sieht aus diesen Curven, dass durch die Härtung die *S*-förmigen Hysteresisflächen bedeutend vergrössert und in der Abscissenachse verzerrt werden, und die Coërcitivkraft bedeutend vergrössert wird. So z. B. ist die Coërcitivkraft für den Magnetstahl W. II. G. in weichem Zustande ca. 19, in hartem Zustande 52.

Für die andere Stahlsorte ist die Coërcitivkraft 14 und im gehärteten Zustande gleich 69 C. G. S. Einheiten. Für das weiche Eisen ist die Coërcitivkraft gleich 2.

Durch Zugbelastungen werden die Hysteresisflächen, resp. Hysteresiscurven in Richtung der Abscissenachse gestreckt und durch Druckbelastungen in Richtung der Abscissenachse gestaut, wie sich übrigens aus dem Frühergesagten ergiebt.

Das soeben Angeführte dürfte genügen, um zu zeigen, dass diese Curven ein bequemes Mittel an die Hand geben, um z. B. den Einfluss der Härteverfahren auf Stahlsorten zu studieren, den Härtegrad genau zu definieren und überhaupt die molecularen Vorgänge während der verschiedenen Beanspruchungen zu verfolgen.*

Aehnlich, wie durch Zug- und Druckbelastungen, werden auch durch Beanspruchungen anderer Art, so z. B. durch die Torsion, die Hysteresiscurven und Hysteresisflächen, und überhaupt die Inductionscurven stark beeinflusst.

Es würde zu weit führen, hier auf alle Einzelheiten einzugehen und ich will nur auf Grund der Untersuchungen NAGAOKA's in Figur 5 einige Hysteresiscurven für einen Nickeldraht von 1 mm Durchmesser zusammenstellen.

Die Abscissen geben die magnetisierenden Kräfte, die Ordinaten die Magnetisierung B.

I giebt den von Null aufsteigenden Theil und ein Stück des absteigenden Theiles der Hysteresiscurve des Nickels in nichtbeanspruchtem Zustande, II die entsprechenden Curven, wenn der Nickeldraht um 3° pro cm tordiert war; III giebt

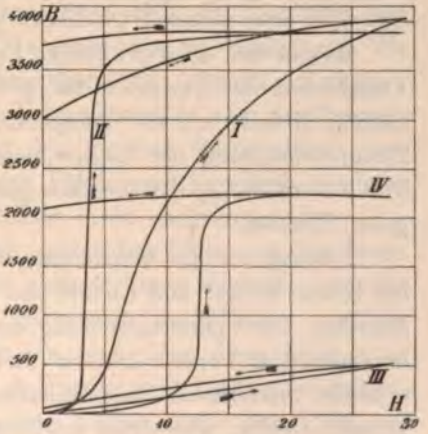


Fig. 5.

* Siehe übrigens BARUS und STROUHAL, Bulletin of the U. S. Geological Survey. 1885, Nr. 14.

die Hysteresiscurve, wenn der Draht mit 12,7 kg pro mm² Zugbelastung beansprucht war, IV giebt die Curven desselben Drahtes für die obige Zugbelastung, wenn der Draht *gleichzeitig* um 3° pro cm Länge tordiert war.

Die Nachwirkungen dieser Beanspruchungen, das Auftreten von circularer Magnetisation beim Strecken longitudinal magnetisierter Stäbe etc. und die auf diese Erscheinungen bezüglichen zahlreichen Daten geben uns ein überaus reiches Material an die Hand, auf das näher einzugehen mir der enge Rahmen dieses Vortrages verbietet. Die Erfahrung zeigt auch, dass die Grösse der magnetischen Hysteresisfläche merkbar, wenn auch in geringem Maasse, durch die Dauer des Cyklus beeinflusst wird. Diese Erscheinung, die sogenannte viscose Hysteresis, bietet jedoch vermöge der Schwierigkeiten in der Beobachtung wenig Aussicht für die praktische Materialprüfung.

Ich glaube mich mit dem Obengesagten begnügen zu können und gezeigt zu haben, dass die *Untersuchung der magnetischen Eigenschaften nicht unterlassen werden kann, wenn es sich darum handelt, ein vollständiges und präcises Bild über die mechanischen Eigenschaften der magnetischen Metalle und deren Legierungen zu entwerfen und einzelne Qualitäten genau zu definieren.*

Ausser den oben erwähnten Erscheinungen sind die cyklischen Variationen der Permeabilität gewisser Legierungen der magnetischen Metalle mit der Temperatur und endlich der Einfluss der Zusammensetzung der Legierungen auf die Grösse der Permeabilität zu erwähnen, die ebenfalls gar manche lehrreiche Fingerzeige geben können.

Ebenso wie die Erscheinungen der magnetischen Polarisation für Eisen, Nickel und Kobalt und deren Legierungen mit anderen Metallen zur Charakterisierung und Beschreibung dieser Metalle herangezogen werden können und aus diesen Eigenschaften auf typische mechanische Eigenschaften Folgerungen gezogen werden können, liefern, wie schon erwähnt, die Erscheinungen der *dielektrischen Polarisation* wichtige Beiträge zur Kenntniss der verschiedenen imprägnierten Pflanzenfaserstoffe des Holzes, Papieres, dann der keramischen Produkte, und überhaupt der sogenannten schlechten Leiter.

Ich will hier mit einigen Beispielen zeigen, welch auffallende Analogien zwischen den Erscheinungen der dielektrischen und magnetischen Polarisation bestehen und will besonders jene Beobachtungen hervorheben, die in ganz klarer Weise den Zusammenhang zwischen den mechanischen und dielektrischen Eigenschaften erkennen lassen.

Ich verweise hier auf meine oben bereits erwähnten Mittheilungen und die in diesen Mittheilungen angeführte Literatur und möchte hier nur die wichtigsten Thatsachen zusammenfassen.

Bestimmt man mittelst der bekannten Methoden den Zusammenhang zwischen der polarisierenden elektromotorischen Kraft und der dieser entsprechenden elektrostatischen Induction, so findet man, dass für die meisten dielektrischen Körper die Curve die durch die polarisierenden Kräfte und die diesen entsprechenden elektrostatischen Inductionen bestimmt ist, nahezu eine gerade Linie sei, also die Dielektricitätsconstante wirklich constant ist.

Erweitert man die Versuchsgrenzen, so findet man, dass bei einigen schlechten Leitern sich die Dielektricitätsconstante merkbar mit der Grösse der polarisierenden Kraft ändert.

Es ist a priori zu erwarten, dass sich die verschiedenen Materiale in dieser Beziehung, ebenso wie in Bezug auf die magnetischen Eigenschaften, abweichend von einander verhalten und dass die Abweichungen der Inductionscurve von der linearen Form nicht in allen Fällen mit der gleichen Bestimmtheit verfolgt werden können, ja in einigen Fällen und innerhalb gewisser Grenzen eine Abweichung überhaupt nicht nachweisbar ist.

Für den grössten Theil der schlechten Leiter ist die Form der Inductionscurve thatsächlich nahezu linear und also die Dielektricitätsconstante praktisch genommen unabhängig von der polarisierenden Kraft. Es verhalten sich also diese Körper in dieser Beziehung ähnlich wie z. B. Kupfer oder Zink, oder andere, fälschlich nichtmagnetisch genannte Körper unter dem Einflusse der magnetischen Polarisation. Es ist mir jedoch gelungen nachzuweisen*, dass es dielektrische Körper giebt, in denen die Dielek-

* Siehe Hoon, loco cit.

tricitätsconstante nicht unabhängig von der polarisierenden Kraft ist, d. h. also die dielektrische Inductionscurve von der linearen Form abweicht und im Wesen ähnlich aussieht, wie die in Fig. 1 für Eisen, Nickel und Kobalt angeführten Inductionscurven.

Ich will hier aus der langen Reihe meiner Versuche nur ein charakteristisches Beispiel herausgreifen, aus dem die Analogie der Beziehungen zwischen polarisierender Kraft und entsprechender Polarisation des dielektrischen Mediums zu den Beziehungen zwischen den entsprechenden Quantitäten im magnetischen Felde klar zu ersehen ist.

So stellen z. B. die Curven A und B der Figur 6 die dielektrische Inductionscurve mit reinem Petroleum getränkten, in der Hitze leicht gebräunten reinen Leinenfaserpapiers dar. Die Abscissen geben die polarisierende elektromotorische Kraft, die Ordinaten die diesen entsprechenden Ladungen, resp. die entsprechende dielektrische Induction. Die Curve B giebt den Anfangstheil der Curve A mit 10facher Abscissenvergrösserung. Die Curve C giebt das Verhältniss der elektromotorischen Kraft und der entsprechenden Ladungen des aus diesem Papiere hergestellten elektrischen Condensators.

Dieses Verhältniss, die *Capacität* des Condensators, ist der *Dielektricitätsconstante* (analog der magnetischen Permeabilität des Eisens) proportional. Die Form dieser Curven ist den entsprechenden Curven in der Figur 1 ganz ähnlich und sehen wir, dass die Dielektricitätsconstante oder mit anderen Worten die dielektrische Permeabilität bei niedrigen Beanspruchungen verhältnissmässig gross ist und bei ansteigender Beanspruchung beträchtlich abnimmt.

Von einer bestimmten niedrigen Beanspruchung abwärts bleibt die dielektrische Permeabilität unabhängig von der polarisierenden Kraft ziemlich constant, ja, soweit in diesem Theile der Curve eben eine genaue Beobachtung möglich ist, scheint die Permeabilität mit abfallender polarisierender Kraft etwas abzunehmen. Der Anfangstheil der Inductionscurven ist also ähnlich wie jener der magnetischen Inductionscurven der eisenartigen Metalle. Die Form dieser Curven wird durch die Temperatur, durch den Druck, durch die Beschaffenheit des verwendeten Pa-

piers u. s. w. merkbar beeinflusst, behält aber immer einen ähnlichen Charakter.

Die Bestimmung solcher Curven erfordert keinerlei besonderen experimentellen Aufwand und genügt es, aus dem zu untersuchenden Nichtleiter hergestellte Platten und Stanniolplatten als Elektroden zu einem Condensator zusammenzubauen und mittelst ballistischen Galvanometers diejenigen Ladungen zu bestimmen, die den verschiedenen elektromotorischen Kräften entsprechen.

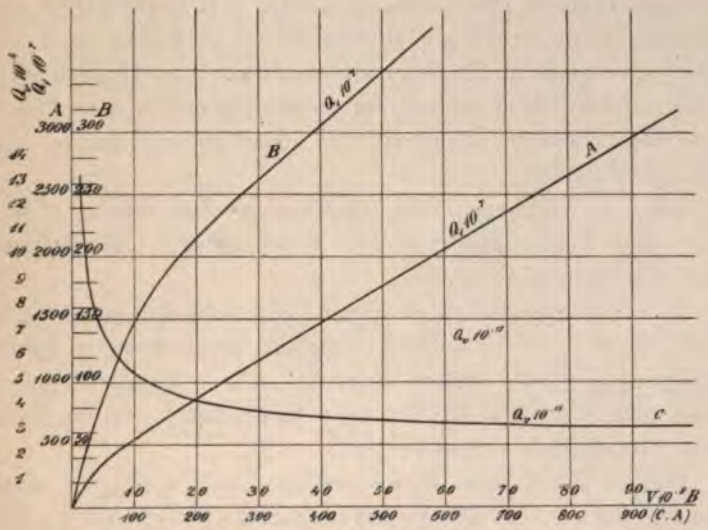


Fig. 6.

Wiederholt man diese Versuche öfter, so findet man, dass die aus den verschiedenen Versuchsserien construierten Curven sich genügend gut decken und infolge von geringen Druck- oder Temperaturvariationen sich nur sehr wenig verschieben. Ich habe jedoch gefunden, dass der Einfluss des *Vorbereitungsverfahrens*, dem das Material vor den Versuchen unterzogen worden war, wie es ja nach all dem Vorhergesagten vorauszusehen ist, ein ganz bedeutender ist. So z. B. ergiebt dasselbe Rohmaterial, dieselbe Papier- oder Holzsorte nach verschiedenen Trocknungs- und Imprägnierungsverfahren, je nachdem bei der Imprägnierung zähflüssige oder leichtflüssige imprägnierende Flüssigkeit verwendet wurde, die Luft aus dem Gewebe mehr oder minder vollständig

entfernt wurde, ganz verschiedene Resultate und ändert sich der Charakter der Curve.

Treten infolge unrichtiger Behandlung des Materials längere Zeit nach der Fabrication Veränderungen ein, so äussern sich diese durch eine Verschiebung der elektrischen Inductionscurven und sind mit Hülfe derselben auch solche Veränderungen wahrzunehmen, die durch keinerlei anderes Beobachtungsmittel nachgewiesen werden können. Es liegt also auf der Hand, die Veränderungen, die in Pflanzenfasergeweben, z. B. Papier, Holz u. s. w. auftreten, mittelst solcher Messungen zu verfolgen, und ist es sicher, dass diese Methode zur Beurtheilung der Trockenheit des Holzes, der Vollkommenheit der Imprägnierung u. s. w. viel präcisere Daten liefern wird, als die bisher gebräuchlichen Untersuchungsmethoden.

Ich bin überzeugt, dass verschiedene Industrien, z. B. die Holz- und Papierindustrien aus einschlägigen Untersuchungen einen Nutzen ziehen werden.

Es ist wahrscheinlich, dass auch für viele derjenigen schlechten Leiter, deren Inductionscurven innerhalb der bisherigen Beobachtungsgrenzen gerade Linien sind, bei sehr schwachen und sehr hohen polarisierenden Kräften eine Abweichung von der linearen Form nachweisbar sein wird.

Das Arbeiten mit sehr niedrigen polarisierenden Kräften erfordert jedoch sehr grosse Aufmerksamkeit und sind die Resultate vermöge der mannigfachen störenden Einflüsse nicht sehr verlässlich.

Die obere Grenze derjenigen Beanspruchung, der das Dielektricum unterworfen werden kann, wird durch die sogenannte Durchschlagsspannung, d. h. diejenige elektromotorische Kraft bestimmt, bei der das Dielektricum zwischen den Elektroden durchbrochen wird und in Form eines Funkens oder Bogens eine Entladung eintritt. Arbeitet man mit Beanspruchungen in der Nähe der Durchschlagsspannung, so treten störende Einflüsse auf, die die Verlässlichkeit der Resultate beeinträchtigen.

Das Arbeiten mit sehr hohen Beanspruchungen erfordert also ebenfalls besondere experimentelle Vorkehrungen und erhöhte Aufmerksamkeit, so dass derlei Untersuchungen sich in der Praxis

schwer einbürgern liessen. Es bietet sich demnach für die praktische Verwendung in solchen Fällen nur der geradlinige Theil der Inductionscurve dar, d. h. derjenige Theil, in dem die Dielektricitätsconstante von der polarisierenden Kraft unabhängig ist und es kann also allein nur der Werth der Dielektricitätsconstante, nicht aber die Form der Curve zur Charakterisierung des Materials herangezogen werden.

Der Werth der Dielektricitätsconstante ändert sich mit der Temperatur und überhaupt dem physikalischen Zustande dieser Körper ganz wahrnehmbar und erleidet grössere Veränderungen zufolge Veränderung der molecularen Beschaffenheit u. s. w. So können z. B. durch Bestimmung der Dielektricitätsconstanten des Glases und Beobachtung der Veränderung derselben diejenigen Nachwirkungen verfolgt werden, die nach der Herstellung von Glasplatten während einer mehr oder minder langen Zeit, manchmal durch Monate hindurch, vor sich gehen. Es ist klar, dass z. B. auf diese Weise leicht bestimmt werden kann, welche Glassorten und welche Arten der Behandlung sich am besten zur Herstellung von Quecksilberthermometern eignen und wird man dasjenige Material wählen, dessen Dielektricitätsconstante sich mit der Zeit am wenigsten ändert, d. h. also, dessen molecularer Zustand unverändert bleibt und bei dem Volumenänderungen gar nicht oder nur in verschwindend kleinem Maasse auftreten. Aehnlich kann die Brauchbarkeit des Glases für optische Zwecke auf diese Weise controliert werden.

Die Beobachtung der Dielektricitätsconstante giebt z. B. ein bequemes Mittel an die Hand, um die Veränderungen zu studieren, die die verschiedenen Guttapercha- und Gummipräparate durchmachen und kann der Werth der Dielektricitätsconstanten und deren Veränderung ein Maass für die Haltbarkeit und Beständigkeit dieser Materialien bilden.

Die molecularen Veränderungen in keramischen Producten können ebenfalls mittelst der Dielektricitätsconstante verfolgt werden und es ergeben sich aus dieser Thatsache und den weiter unten noch anzuführenden Erscheinungen Prüfungsmethoden, die gewiss praktische Erfolge zeitigen werden.

Eine weitere wichtige Erscheinung, die zum Ausgangspunkte

von Materialprüfungsmethoden gemacht werden kann, ist die *elektrostatische Hysteresis*, eine Erscheinung, die der magnetostatischen Hysteresis vollkommen analog ist.

Die Existenz dieser Erscheinung wurde zuerst an Condensatoren, die der Einwirkung rasch wechselnder polarisierender Kräfte ausgesetzt waren, beobachtet, und hat STEINMETZ zuerst an einigen Fällen nachgewiesen, dass die Polarisationsarbeit, die einem vollständigen Elektrisierungscyklus entspricht, $W = \beta \cdot E^2$ gesetzt werden kann, wo β ein das Material charakterisierender Werth, die *specifische elektrostatische Hysteresisarbeit* oder der *elektrostatische Hysteresiscoefficient ist* und E die polarisierende elektromotorische Kraft bedeutet.

Dieses Gesetz gilt nur näherungsweise und sind uns heute Fälle bekannt, ich selbst habe einige Beispiele gezeigt, wo die STEINMETZ'sche Formel nicht mehr gilt.

Genau so, wie die Erscheinungen der magnetostatischen Hysteresis zur Beschreibung des Materials herangezogen werden können, kann auch die einer gewissen polarisierenden elektromotorischen Kraft und Polwechselzahl entsprechende elektrostatische Hysteresisarbeit, die mit dem Wattmeter leicht gemessen werden kann, zur Beschreibung des Materials herangezogen werden und liefert, da sich die dielektrischen Körper in dieser Beziehung wesentlich von einander unterscheiden, sehr werthvolle Daten. So können z. B. durch Bestimmung der Hysteresisarbeit die verschiedenen Vorbereitungsarten von Pflanzenfaserstoffen, Imprägnierungsmethoden die Homogenität und Gleichmässigkeit des Materials geprüft werden.*

So z. B. haben geschichtete Dielektrica oder aus Theilchen mit verschiedenen Dielektricitätsconstanten zusammengesetzte Dielektrica eine viel grössere specifische Hysteresis, als die Componenten selbst. Sehr auffallend ist der Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und der specifischen Hysteresis.

* Siehe meine oben citierten Abhandlungen, dann HOOR: Ujabb adatok a dielektromos testek physikájához, (második közlemény), Math. és Természettud. Közlöny XIX., p. 332 1901, und HOOR: Neuere Beiträge zur Naturgeschichte dielektrischer Körper (Zweite Mittheilung) E. T. Z. XXII. p. 716 1901.

So zeigen meine Versuche z. B., dass alle jene *Verfahren, die die specifische Hysteresis des Dielektricums herabdrücken, zugleich auch die elastischen Eigenschaften des Materials verbessern.*

Mechanische Beanspruchungen, z. B. Druck oder Zug, beeinflussen die Hysteresisarbeit ganz merkbar und sind die nach dem Aufhören der mechanischen Einwirkungen vor sich gehenden langsamen Nachwirkungen durch die Beobachtung der Hysteresisarbeit leicht zu verfolgen. Die Erscheinung der elektrostatischen Hysteresisarbeit lässt sich übrigens nicht nur durch Messungen mittelst rasch wechselnder elektromotorischer Kräfte, sondern auch durch Beobachtung der Inductionscurven bei langsamen, Schritt für Schritt veränderten polarisierenden Kräften verfolgen.

Ich habe diese Versuche in der Weise ausgeführt, dass ich die polarisierende elektromotorische Kraft Schritt für Schritt veränderte und die diesen Veränderungen entsprechenden Inductions-, resp. Ladungsdifferentiale mittelst ballistischen Galvanometers gemessen habe. Die auf diese Weise gewonnenen Punkte wurden für den auf- und absteigenden Theil in ein Coordinatensystem eingetragen und schliessen die zwei Curven eine Fläche ein, die, abgesehen von den weiter unten zu schildernden Erscheinungen, ein Maass für die statische Hysteresisarbeit abgiebt.

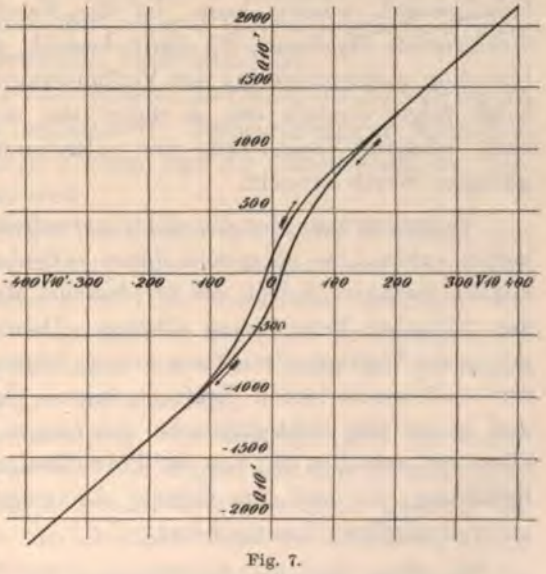


Fig. 7.

In Figur 7 habe ich die Resultate einer solchen Versuchsreihe dargestellt, die aus meiner oben citierten Abhandlung entnommen ist.

Die Figur bezieht sich auf petroleumgetränktes, gebräuntes *Leinenfaserpapier;* die Abscissen geben die polarisierende elektromotorische Kraft in Volt; die Ordinaten geben die den Abscissen entsprechenden Inductionswerthe. Die Werthe der elektromotorischen Kraft, sowie der entsprechenden Induction wurden durch Summierung der respectiven Differentiale während des Cyklus gewonnen.

Dieser Versuch ist ganz analog den allbekannten magnetischen Versuchen, für die ich in der Figur 4 einige Beispiele dargestellt habe. Allerdings ist diese Methode nicht so bequem, als die Beobachtungen der Hysteresisarbeit mittelst rasch polarisierender elektromotorischer Kräfte und dürfte daher, wenn sie auch wissenschaftlich sehr interessant ist, für praktische Zwecke kaum eine ausgedehnte Anwendung finden können.

Eine weitere wichtige Erscheinung, die zur Materialprüfung herangezogen werden kann, ist die Erscheinung der *viscosen dielektrischen Hysteresis*, die darin besteht, dass die dielektrische Induction nicht momentan den Veränderungen der polarisierenden Kraft folgt, sondern erst in mehr oder minder merkbarer Zeit nach erfolgter Veränderung der polarisierenden Kraft den endgültigen Werth erreicht.

Verändert man also die elektrisierende Kraft um einen Werth herum cyklisch, so entspricht dieser Veränderung eine mehr oder minder merkbare Arbeit, die für dasselbe Material von der Dauer der cyklischen Veränderung abhängt. Daher kommt es, dass die mit einem Wattmeter messbare Arbeit, die einer cyklisch variierenden elektromotorischen Kraft in einem Condensator entspricht und in der also elektrostatische und viscose dielektrische Hysteresisarbeit enthalten ist, von der Polwechselzahl abhängig ist, eine Erfahrung, die auf dem Gebiete der magnetischen Polarisation ein vollständiges Analogon hat.

In Bezug auf die Erscheinungen der viscosen dielektrischen Hysteresis zeigen die schlechten Leiter eine ganz besondere Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und verhalten sich in dieser Beziehung verschiedene schlechte Leiter dermaassen typisch und ist der Einfluss der Fabricationsmethoden auf ein gegebenes Material ein so auf-

fallender, dass die Heranziehung dieser Erscheinungen zur Beschreibung des Materials überaus wichtig ist.

Es würde zu weit führen, hier auf die Einzelheiten einzugehen und ich verweise auf meine mehrmals citierten Mittheilungen, die über die einschlägigen Untersuchungsmethoden eingehende Angaben und auch eingehende Versuchsresultate enthalten.

Ich will hier nur noch auf die bemerkenswerthe Thatsache hinweisen, dass der Verlauf der Nachwirkungen, also auch die Grösse der viscosen Hysteresisarbeit, nicht nur von der Qualität des Materials, sondern, wie ich gezeigt habe, auch von den Dimensionen desselben, der Schichtendicke des Dielektricums u. s. w. abhängt.

Eine analoge Erscheinung finden wir auf dem Gebiete der magnetischen Polarisation, indem, wie es schon seit geraumer Zeit bekannt, der Verlauf der magnetischen Nachwirkungen von den Dimensionen des Versuchsstückes, so z. B. vom Durchmesser eines cylindrischen Versuchsstückes, beeinflusst wird.

Ebenso finden wir, dass der zeitliche *Verlauf der Nachwirkungen* nach dem Aufhören *mechanischer* Beanspruchungen wesentlich durch die geometrischen Formen und die Dimensionen der Versuchsstücke beeinflusst wird.

All diese Beziehungen berechtigen uns zu der Hoffnung, dass eine *systematische* Untersuchung dieser analogen Beziehungen und *einschlägige Parallelversuche* nicht nur unmittelbar praktische Resultate, sondern auch wissenschaftlich werthvolle Erfahrungen und vielleicht weitere Aufklärungen über das Wesen der erwähnten Polarisationserscheinungen geben werden.

Der innige Zusammenhang, der zwischen dem *specifischen elektrischen Leitungswiderstande* der Körper und den übrigen physikalischen Eigenschaften, überhaupt dem molecularen Zustande der Körper besteht, giebt uns ebenfalls Mittel an die Hand, solche Veränderungen des Materials zu verfolgen, die auf andere Weise kaum wahrnehmbar sind. Besonders leicht sind derlei Beobachtungen bei den verschiedenen Metallen auszuführen, da deren specifischer Widerstand ohne besondere Complicationen leicht zu bestimmen ist und jederlei mechanische Beanspruchung, Zug,

Druck, Torsion etc. die Grösse des specifischen Widerstandes merkbar beeinflussen.

Es würde zu weit führen, auf Einzelheiten einzugehen und will ich mich auch hier nur auf die Anführung einiger Beispiele beschränken.

So nimmt z. B. der Widerstand der meisten Metalle und Legierungen zu, wenn diese unter der Einwirkung von Zugkräften stehen. Ebenso nimmt der specifische Widerstand zu, wenn aus den verschiedenen Metallen hergestellte Stäbe, Drähte oder Bleche, oder überhaupt Körper beliebiger Form um eine beliebige Achse tordiert werden. Nach dem Aufhören der Beanspruchung sinkt zwar der specifische Widerstand sofort, erreicht jedoch in den meisten Fällen seinen ursprünglichen Werth nicht sofort nach Aufhebung der Beanspruchung, sondern erst geraume Zeit später, manchmal erst nach Monaten, oder, wenn die Beanspruchung genügend gross war, überhaupt gar nicht mehr.

Körper, die in Bezug auf mechanische Beanspruchungen hart sind, zeigen länger andauernde Widerstandsnachwirkungen, als weiche Körper. In weichen Körpern sind die entsprechenden Veränderungen wohl grösser, verlaufen aber viel rascher. Die auf diese Erscheinungen bezüglichen Mittheilungen enthalten eben nicht allzuviel numerische Daten, doch lassen sich diese Daten auf einfache Weise ergänzen und für ein gegebenes Material die den verschiedenen Beanspruchungen entsprechenden Widerstandsveränderungen feststellen und die Nachwirkungserscheinungen verfolgen.

All diese Erscheinungen beweisen, wie sich übrigens auch aus den Erscheinungen der magnetischen Hysteresis und der Beobachtung der magnetischen Inductionscurven ergiebt, dass selbst solche mechanische Beanspruchungen bleibende oder sehr langsam verlaufende Veränderungen in den meisten Metallen hervorrufen, die weit unter der Elasticitätsgrenze (im mechanischen Sinne) des Materials liegen; diese Veränderungen sind durch Volum- oder überhaupt Dimensionsmessungen nicht nachweisbar.

Besonders lehrreich sind die Veränderungen des specifischen Widerstandes, wenn man das Material über die Elasticitätsgrenze hinaus oder überhaupt bis zur Festigkeitsgrenze beansprucht, und

habe ich z. B. gefunden, dass sich die Thatsache, dass wir uns bei einer gegebenen Beanspruchung in der Nähe der Festigkeitsgrenze befinden, in den meisten Fällen durch eine ganz bedeutende plötzliche Veränderung des specifischen Widerstandes bemerkbar macht. Ich habe übrigens gefunden, dass bei sonst gleicher specifischer Beanspruchung eines gegebenen Materials die Zunahme des specifischen Widerstandes auch von den Dimensionen des Versuchsstückes, so z. B. auch vom Querschnitte des Stabes oder Drahtes abhängt, ebenso wie der zeitliche Verlauf der Nachwirkung.

Die Veränderungen, die ein Gussstück unmittelbar nach dem Gusse, oder z. B. ein Versuchsstück unmittelbar nach dem Härten erleidet, lassen sich durch Messung des specifischen Widerstandes ebenfalls ganz leicht und continuierlich verfolgen.

Derartige Versuche zeigen, dass auch geraume Zeit nach dem Härten oder Giessen des Materials sehr bedeutende Aenderungen in der molecularen Beschaffenheit vor sich gehen.

Der Vortheil, der durch die Heranziehung von Widerstandsbestimmungen zur Verfolgung der Nachwirkungserscheinungen in den Metallen erwächst, ist in die Augen springend, und ich bin überzeugt, dass z. B. mit Hülfe des Widerstandes sich der Härtungsgrad einer gegebenen Stahlsorte viel genauer präcisieren lässt, als bis jetzt, und überhaupt die Einwirkungen der verschiedenen Härteverfahren auf eine gegebene Stahlsorte etc. mit Hülfe solcher Messungen sich viel bequemer beobachten lassen, als mittelst irgend einer anderen Methode.

Die Veränderungen, die der specifische Widerstand bei Aenderungen der Temperatur erleidet, werfen ebenfalls scharfe Streiflichter auf die Eigenschafteu der Metalle und zeigen besonders die cyklischen Variationen des specifischen Widerstandes bei cyklischen Aenderungen der Temperatur, dass solchen Temperaturänderungen auch cyklische Aenderungen im molecularen Zustande, also in den mechanischen Eigenschaften überhaupt, entsprechen.

Die plötzlichen Aenderungen des specifischen Widerstandes, die in den Recalescenzpunkten des Eisens und der verschiedenen Stahlsorten, so z. B. bei ca. 780° im weichen Eisen und bei ca. 660° im harten Stahl eintreten, zeigen deutlich, dass wir von

einschlägigen Beobachtungen und systematischen Parallelversuchen, deren Aufgabe die Verfolgung der soeben geschilderten Erscheinungen und parallel damit der mechanischen Eigenschaften wäre, sehr viel zu erwarten haben.

Es ist sehr bedauerlich, dass das in den verschiedenen wissenschaftlichen, als auch praktischen elektrischen und magnetischen Laboratorien zusammengetragene, auf die verschiedenen Metalle, keramische Producte etc., sowie z. B. Kupfer, Eisen, die verschiedenen Eisenlegierungen, Porzellan, Glas, Guttapercha etc. bezügliche ungeheuere Versuchsmaterial für die Materialprüfung bis jetzt nicht dienstbar gemacht wurde. Es ist dies um so mehr zu bedauern, da die *Untersuchung der magnetischen und elektrischen Eigenschaften der Körper ohne deren Zerstörung vorgenommen werden kann.* Es ist also möglich, ein und dasselbe Versuchsstück wiederholt denselben Versuchen und derselben Behandlung zu unterwerfen. Ebenso ist es möglich, mit Hülfe der elektrischen und magnetischen Messungen jene molecularen Veränderungen zu studieren, die z. B. verschiedene metallene Constructionsbestandtheile in *fertigen Constructionen* erleiden oder erlitten haben, ohne dass deren Demontierung nothwendig wäre. So ist es z. B. möglich, den molecularen Zustand eines in einer Construction auf Zug beanspruchten Stabes durch Beobachtung der magnetischen Inductionscurven, der Hysteresisarbeit und des specifischen Widerstandes von Zeit zu Zeit zu beobachten, oder auch continuierlich zu verfolgen.

Andererseits bedarf auch die *Elektrotechnik* dringend der Ergänzung der Versuche über die von ihr gebrauchten Materialien durch verlässliche Angaben der mechanischen und chemischen Eigenschaften und ist der Mangel verlässlicher einschlägiger Daten besonders bei der Materialbeschaffung sehr stark fühlbar.

Die eingehende Behandlung des auf die oben geschilderten Erscheinungen bezüglichen, aus fremden, sowie aus meinen eigenen Versuchen abgeleiteten Versuchmateriales würde den Rahmen dieses Vortrages über das erlaubte Maass ausdehnen und so muss ich mich auf das oben Gesagte beschränken.

Mein Zweck war, Ihnen durch Zusammenfassung vieler bekannter und einiger neuer Versuchsergebnisse zu zeigen, dass die

Einbeziehung der elektrischen und magnetischen Eigenschaften in den Bereich der Materialprüfung *nicht nur wissenschaftliche, sondern auch praktische Erfolge* nach sich ziehen muss und ich glaube, durch das hier Gesagte den Beweis für diese Behauptung erbracht zu haben.

Soll aber ein praktischer Erfolg erzielt werden, so muss das gegenwärtig zur Verfügung stehende Material durch *systematische, nach einem einheitlichen Plane ausgeführte Parallelversuche vervollständigt werden.* Diese Versuche können am zweckmässigsten in jenen Laboratorien vorgenommen werden, die für die Prüfung der Materiale der Technik eingerichtet sind, da diese Laboratorien sich ohne besonders hohe Auslagen auf elektrische und magnetische Messungen einrichten können, währenddem die meisten elektrotechnischen Laboratorien kaum in der Lage sein dürften, die elektrischen und magnetischen Versuche selbst durch Versuche über die mechanischen und chemischen Eigenschaften zu ergänzen.

Ich erlaube mir mit Berufung auf das oben Gesagte dem Congress folgende Beschlussanträge zu unterbreiten und zur Annahme zu empfehlen:

1. Der Congress wünscht, dass in Zukunft parallel mit den mechanischen Eigenschaften der Materiale nach Thunlichkeit auch die magnetischen und elektrischen Eigenschaften mit Aufmerksamkeit verfolgt und die einschlägigen Daten gesammelt und neben den Resultaten der mechanischen und chemischen Untersuchungen veröffentlicht werden.

2. Der Congress wünscht im Hinblick auf die Anforderungen der Maschinenindustrie, dass der Internationale Verband für die Materialprüfungen der Technik seine Thätigkeit auf alle in der Maschinenindustrie und besonders in der Elektrotechnik gebrauchten Constructionsmaterialien ausdehne und überhaupt bei der Prüfung der Materialien auch den Anforderungen der Elektrotechnik Rechnung trage.

3. Der Congress beauftragt den zukünftigen Vorstand des Internationalen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik, die nöthigen Schritte im Sinne der Punkte 1 und 2 einzuleiten

und eine Commission zum Studium der einschlägigen Fragen zu ernennen, deren besondere Aufgabe sein wird, die bereits publicierten einschlägigen Daten zu ordnen, ein allgemeines Untersuchungsprogramm festzusetzen und zu prüfen, in welcher Weise die magnetischen und elektrischen Eigenschaften zur Definition und Beschreibung der Materiale der Technik herangezogen werden können.

20.

DIE FRAGE DER CHOREA LARYNGIS.

Von Prof. Dr. A. ONODI, Budapest.

Vorgetragen in der Akademie der Wissenschaften zu Budapest 1899.*

Bekanntlich ist die Frage der Chorea laryngis durch die widersprechenden Auffassungen und Bezeichnungen verschiedenartiger Fälle eine so verwickelte, dass es nothwendig erscheint, eine Discussion und eine Klarstellung der Frage anzuregen.

Wir wollen zuerst eine kurze Zusammenfassung über den heutigen Stand der Lehre von der Chorea vorausschicken, welche uns Herr Dr. PILZ gütigst zur Verfügung stellte. Die Bezeichnung „Chorea" wurde ursprünglich einem Symptomencomplex beigelegt, welcher mit dem, was die Neurologen gegenwärtig unter „Chorea" verstehen, nichts als den Namen gemein hat.

Mit dieser Bezeichnung waren die Anfangs des Mittelalters auftretenden Anfälle von Tanzwuth gemeint, welche nach Art einer Epidemie einen grossen Theil der Einwohnerschaft einer Stadt befielen. Im Gegensatz zu dieser, auch „Chorea magna" genannten Neurose entwickelte SYDENHAM den Begriff der sogenannten Chorea minor (welche auch seinen Namen trägt) und bezeichnete damit eine Erkrankung, welche sich im Wesentlichen durch, vom Willen unabhängige, durchaus unregelmässige und zwecklose Zuckungen in der willkürlichen Muskulatur charakterisiert.

Gegenwärtig besitzt der Name Chorea magna eigentlich nur mehr historisches Recht, nachdem das damit bezeichnete Krankheitsbild nur eine der vielen Entäusserungen der grossen Psycho-

* Vorgelesen von Prof. SCHECH in der Wanderversammlung zu München. 1899.

neurose Hysterie ist. Wenn wir heute von „Chorea" schlechtweg sprechen, so meinen wir eine ätiologisch und prognostisch zwar sehr wenig einheitliche, klinisch wohl charakterisierte Erkrankung. Das Pathognostische der als „choreatisch" anzusprechenden Bewegungen ist der durchaus arhythmische, uncoordinierte Charakter derselben. Die choreatischen Zuckungen lassen weder ihrer Intensität noch ihrer Localisation nach irgend welche Gesetzmässigkeit erkennen, sie richten sich weder nach der cerebralen oder spinalen, noch nach der peripheren räumlichen Anordnung der von ihnen befallenen Muskelgruppen, sondern springen regellos von einem Muskelindividuum zum andern über, keine einzige gleicht der anderen. Weitere Attribute der choreatischen Zuckungen sind, dass sie vom Willen durchaus unabhängig sind, in besonders schweren Fällen coordinierte, gewollte Bewegungen ganz unmöglich machen, durch psychische Erregung, z. B. wenn sich die Kranken beobachtet wissen, an Intensität gesteigert werden, im Schlafe aber meistens cessieren.

Die Verschiedenheit der Aetiologie und des Verlaufes lässt es angemessen erscheinen, wenn man aus den unter choreatischen Eigenthümlichkeiten einhergehenden Hyperkinesen durch eine Eintheilung gewisse Formen herausgreift.

Am besten gruppiert man das Material in 3 Unterabtheilungen.

Eintheilung von LANNOIS.	Eintheilung von WOLLENBERG.
Chorea minor Sydenhamii.	Infectiöse Chorea.
Chorea chronica.	Degenerative Chorea.
Symptomatische Form der Chorea.	Choreiforme Zustände.

Dem gegenüber steht die Chorea hysterica, zu welcher die oben erwähnte Chorea magna gerechnet werden muss. Je nach den hervorstechenden Symptomen werden dann noch specielle Namen angegeben, *Ch. saltatoria*, *natatoria* u. s. w. Die wichtigsten differential-diagnostischen Anhaltspunkte sind aber nach den Lehren von CHARCOT, GOWERS, OPPENHEIM u. A. folgende: Die Zuckungen sind rhythmisch, monoton, auf bestimmte Muskelgruppen durch lange Zeit beschränkt (Ch. rhythmica sec. CHARCOT), tragen mehr den Charakter von coordinierten Bewegungen, stören

intendierte Bewegungen auffallend wenig, schwinden sogar während solcher. Ausserdem kommen natürlich in Betracht eventuelle hysterische Stigmen.

Als ein sehr wichtiges Unterscheidungsmerkmal wird endlich gegenwärtig von den meisten Neurologen die Aetiologie betont, nämlich, dass sich als ursächliches Moment hierfür die *Nachahmung* constatieren lässt. GOWERS sagt direct, dass manchmal als einziges Verdachtsmoment für die hysterische Natur der Zuckungen die imitatorische Ursache geltend gemacht werden kann. Auch die Chorea hysterica cessiert im Schlafe. Es darf aber natürlich nicht vergessen werden, dass gelegentlich bei einem und demselben Individuum beide Neurosen entweder combiniert oder einander abwechselnd vorkommen können.

Gerade so scharf wie die hysterische Chorea oder besser gesagt choreatische Formen der Hysterie von der Chorea gesondert werden, sollte man aber auch von der wirklichen die symptomatische Chorea trennen, vielleicht diesen Namen überhaupt ganz fallen lassen und die viel glücklicher gewählte Bezeichnung von WOLLENBERG *„choreiforme Zustände"* allgemein acceptieren für dergleichen Muskelzuckungen, wie sie bei Herderkrankungen etc. beobachtet werden. Kehren wir nunmehr zur echten Chorea zurück.

Was die Aetiologie der Chorea minor betrifft, so wären zunächst gewisse allgemein prädisponierende Momente zu erwähnen und zwar Alter, Geschlecht, Rasse, Heredität, Schwangerschaft etc.

Die Chorea minor befällt meist Kinder, schwächliche, blutleere Individuen. Die Heredität spielt eine untergeordnete Rolle: Bei weiblichen Individuen disponiert noch ein physiologischer Zustand zu dieser Erkrankung, nämlich die Gravidität, endlich wird Chorea manchmal bei Greisen beobachtet.

Eine hervorragende Bedeutung kommt als ätiologisches Moment dem *Gelenkrheumatismus* zu und *Infectionserkrankungen* überhaupt. WOLLENBERG bezeichnet direct (in seiner Monographie) die Chorea Sydenhamii als „infectiöse Chorea". Von anderen Infectionskrankheiten ausser dem Gelenkrheumatismus kommt in absteigender Linie in Betracht (der Häufigkeitsscala nach geordnet) *Scharlach* und *Masern*. Einen wichtigen Factor in der Aetiologie der Chorea bilden Schreck, Gemüthsalterationen und auch körper-

liche Traumen. Dagegen wird, wie erwähnt, der Nachahmung bei der Entstehung der echten Chorea minor von den meisten Autoren keine Bedeutung mehr beigelegt. Die Chorea minor wird in allen Lehrbüchern unter den Neurosen abgehandelt; schon daraus geht hervor, dass die pathologische Anatomie derselben völlig dunkel ist. Ich sehe hier natürlich ab von den Befunden bei den Herderkrankungen, welche klinischerseits choreiforme Bewegungen gezeigt hatten. Kein einziger der bisher erhobenen Befunde ist pathognostisch für die Chorea oder vermag den klinischen Symptomencomplex zu erklären.

Bezüglich der Symptomatologie können wir uns kurz fassen, nachdem wir unter der Begriffsbestimmung der Chorea schon die wesentlichen Merkmale angegeben hatten. Die continuierlichen, unwillkürlichen, unregelmässigen Zuckungen befallen vorzugsweise die Extremitäten, die Gesichts- und Zungenmuskulatur. In schweren Fällen werden auch die Augenmuskeln in Mitleidenschaft gezogen, die Kehlkopfmuskulatur und das Zwerchfell. Die Sensibilität verhält sich in allen ihren Qualitäten intact, das *Verhalten* der Reflexe ist meistens normal. Von Complicationen sind am wichtigsten und am häufigsten beobachtet die seitens des Herzens. Auf dem gemeinsamen Boden der rheumatischen Infection entwickeln sich gleichzeitig oder alternierend Chorea und Herzklappenfehler, in manchen Fällen wurde auch eine choreatische Unruhe des Herzmuskels selbst beschrieben.

Die Prognose ist bei der Chorea der Kinder fast ausnahmslos günstig. Heilung in mehreren Monaten mit Sicherheit zu erwarten. Dagegen bildet die Chorea der Schwangeren eine sehr ernste Complication, welche wiederholt zum letzten Ende führte.

Chronische (degenerative) *Chorea.* Hierher gehören Fälle von Chorea, welche in reiferen Jahren entsteht, ausnahmslos bei hereditär schwer belasteten Individuen vorkommt und unter erheblichen geistigen Störungen nach mehreren Jahren zum Tode führt.

Im Anhange müssen hier eigenthümliche Hyperkinesen erwähnt werden, für welche GOWERS die Bezeichnung des „Gewohnheitskrampfes" vorschlägt. Es sind dies eigenthümliche ticartige Bewegungen, welche man meistens bei nervösen, reizbaren Kindern (speciell bei älteren) findet und welche nach einigen Monaten

wieder schwinden. Eine gewisse hereditäre Belastung lässt sich hierbei nachweisen. Die spasmodischen Bewegungen bestehen z. B. in Augenzwinkern, zuckenden Bewegungen des Kopfes u. s. w. Die Bewegungen treten in Intervallen von wenigen Minuten auf, sind aber auch andauernd. Häufig entstehen sie durch Nachahmung: in solchen Fällen ist auch ein eigenthümlicher Husten mit laryngealem Charakter nichts Seltenes. Gewöhnlich nehmen diese Gewohnheitskrämpfe zu, wenn man die betreffenden Personen beobachtet.

Gegenüber der echten Chorea kommt wieder die *Monotonie* der Erscheinungen in Betracht, dann das Fehlen infectiöser Erkrankungen in der Aetiologie. Für Hysterie findet sich kein rechter Anhaltspunkt, doch giebt GOWERS selbst zu, dass es sehr schwer sei, in manchen Fällen festzustellen, ob man die Bewegungen nicht auf Hysterie zurückzuführen hat.

Nachdem wir den heutigen Stand von der Lehre der Chorea erörtert haben, wenden wir uns zu jenen Fällen und Ansichten, welche mit dem Namen *Chorea laryngis* in Verbindung stehen.

Im Anschluss an die vorausgeschickten neurologischen Bemerkungen über die Lehre der Chorea beginnen wir mit jenen Meinungen und Fällen, welche eigentlich mit dem Wesen der Chorea in näherer Beziehung stehen. ZIEMSSEN* äussert sich in seinem Handbuche von 1875, worauf sich auch SCHECH, GOWERS beziehen, wie folgt:

Die Chorea der Kehlkopfmuskeln, über welche bisher Beobachtungen nicht veröffentlicht sind, ist nach meiner Beobachtung eine gewöhnliche Begleiterin schwerer Chorea. Sie charakterisiert sich durch ungenügende Stärke und Dauer der Stimmbandspannung in Folge des Mangels an Coordination und an Ausdauer der Muskelcontractionen beim Act der Phonation: die Kranken sind nicht im Stande, einen Sington längere Zeit auszuhalten oder mehrere Worte nach einander ohne Unterbrechung herzusprechen. Sie brechen den Sington plötzlich ab und verschlucken von dem einzelnen Worte die letzten Silben, um zur nächsten Inspiration zu kommen. Beim Vorlesen findet ein ungewöhnlicher Aufwand

* ZIEMSSEN, Handbuch der Krankheiten des Nervensystems II. 1875.

von Muskelkraft und starke Luftverschwendung statt, so dass die Patienten rasch ermüdet werden. Dass die Stimmbandspannung beim Phonationsacte häufig eine ungenügende ist, konnte ich in einzelnen Fällen an der relativ tiefen Lage und der Monotonie der Stimme constatieren, welche mit der Besserung verschwand, um der normalen Höhenlage und Modulation der Stimme Platz zu machen. Mit dem Kehlkopfspiegel kann man die Unruhe der Kehlkopfmuskeln, die zuckenden Contractionen der Stimmbandschliesser, -Oeffner und -Spanner sehr gut übersehen.

SACHS* sagt, die laryngeale Chorea in einer uncomplicierten Form kommt ziemlich selten vor und ist durch choreiforme Bewegungen jener Muskeln gekennzeichnet, welche die Stimmbänder in Bewegung setzen. Es ist die seltenste Form der Chorea.

NICOLL** beschreibt Fälle, wo man neben einem trockenen harten Kehlkopfhusten bei der laryngoskopischen Untersuchung die Stimmbänder häufige schnelle Bewegungen von der Mittellinie nach aussen hin vollführen sah. Im Verlaufe von ein paar Wochen entwickelte sich in allen diesen Fällen eine allgemeine Chorea und mit der Heilung dieser hörte auch die laryngeale Chorea auf. NICOLL versteht unter dem Namen laryngeale Chorea eine Affection der Kehlkopfmuskeln, ähnlich der als Chorea bekannten Krankheit der anderen Körpermuskulatur. Er führt den Husten in diesen Fällen auf den Druck oder die Reizung der sensitiven Partien der Kehlkopfschleimhaut durch die unregelmässigen choreatischen Bewegungen des Larynx zurück. SCHULTZES*** constatierte bei einem 15jährigen Knaben neben Chorea der Gesichts- und Halsmuskulatur einen ungewöhnlich schnellen, beiderseits gleichmässigen Tremor verschiedener Intensität der Stimmbänder. Auch die Phonationsbewegungen werden in dieser Zeit zuckend ausgeführt und vermag der Kranke die Glottis nur auf kurze Dauer zu schliessen. GIBB† sah bei einer nervösen anämischen Frau Chorea der Kehlkopfmuskulatur. Die laryngoskopische Untersuchung zeigte die gerötheten Stimmbänder in beständiger vibra-

* Lehrbuch der Nervenerkrankungen der Kinder. 1897.

** Lancet. 1892. March.

*** Charité-Annalen. 1895.

† PILZ, Ueber Chorea, Monatschr. f. Psychiatrie u. Neurologie. 1895.

torischer und oscillatorischer Unruhe. Die Kranke gab Singultus-ähnliche Laute von sich. Die gesammte übrige Muskulatur war frei. Eine laryngoskopisch zu constatierende choreatische Unruhe der Stimmbänder bestand auch in einem von REDTENBACHER* veröffentlichten Falle von Chorea.

SPAMER** beschreibt einen Fall von Chorea bei einem $1^1/_2$jährigen Mädchen, wo alle 2—3 Minuten einmal einige Secunden lang ein schnarchendes Respirationsgeräusch zu hören war. Eine laryngoskopische Untersuchung war unausführbar. SPAMER glaubt das Respirationsgeräusch auf Rechnung zeitweiser krampfhafter Contractionen der Kehlkopfmuskeln zu setzen.

KUMICUTT*** beschreibt zwei Fälle allgemeiner typischer Chorea, wo die Töne theilweise articuliert waren und stossweise entstanden sind. Eine laryngoskopische Untersuchung war wegen der choreatischen Bewegungen unausführbar.

BOND† beschreibt einen Fall bei einem 11jährigen Knaben, wo choreatische Bewegungen der Hände und Arme vorhanden waren; er stiess in Zwischenräumen von 11 Secunden bis $1^1/_2$ Minuten plötzlich einen explosiven lauten sonderbaren Schrei aus, welcher mit heftiger Contraction des Diaphragma und Erheben des weichen Gaumens einherging. Er wird niemals während einer laryngoskopischen Untersuchung ausgestossen, aber stets unmittelbar nach Beendigung derselben.

SCHRÖTTER†† hat jene Fälle nervösen Hustens als *Chorea laryngis* bezeichnet, welche mit Contractionen in anderen Muskelgebieten einhergehen, und bei welchen er manchmal die gewöhnliche Form der Chorea dem Husten vorausgehen oder nachfolgen sah. In seinem neueren Buche††† hält er seine Ansicht aufrecht. „Es handelt sich nämlich um continuierlich oder nur in ganz geringen Intervallen stattfindende *Hustenstösse*, die sich durch einen ganz besonderen, oft beinahe musikalischen, z. B. feuerwehr-

* Monatschr. f. Psychiatrie u. Neurol. 1898.
** Wiener medic. Wochenschr. 1876.
*** SEMON's Centralblatt f. Laryng. 1888.
† SEMON's Centralblatt f. Laryng. 1896.
†† Allgemeine Wiener Zeitung. 1879.
††† SCHRÖTTER, Krankheiten des Kehlkopfes. 1892.

signalartigen Charakter und dabei durch solche Stärke auszeichnen, dass sie weithin gehört werden können". Der Kranke kann sie mitunter durch den Willenseinfluss mildern, jedoch nie vollkommen unterdrücken. Diese Erkrankung hat mit der Hysterie nichts zu thun und kommt sehr häufig bei Knaben im Alter zwischen 8 und 14 Jahren vor, die keine anderweitigen Krankheitserscheinungen darbieten und bei denen der Respirationstract entweder vollkommen gesund ist oder unbedeutende katarrhalische Veränderungen vorhanden sind. Die Hustenanfälle sistieren im Schlafe, ausserdem finden auch eigenthümliche Contractionen in anderen Muskelgebieten, Runzeln der Stirne, Schütteln des Kopfes statt. Die Krankheit recidiviert leicht und in einigen Fällen war die allgemeine Chorea vorausgegangen oder sie stellte sich nach einiger Zeit ein.

Ich erwähne noch die briefliche Mittheilung des Herrn Prof. SCHRÖTTER vom vorigen Jahre, sie lautet: „Meine Ansicht über die Chorea laryngis ist auch heute dieselbe wie damals. Man darf unter diesem Namen nur verstehen: Gegen den Willen des Kranken auftretende Muskelcontractionen hauptsächlich im Larynx mit Bildung oft eigenthümlich tönender Laute; nicht selten gleichzeitig geringere Zuckungen in den Gesichts- oder Halsmuskeln; meist jugendliche Individuen zwischen 10—15 Jahren; günstige Prognose (Dauer 3—4 Wochen), Heilung bei am besten hydropathischem Verfahren; hie und da Recidive."

In der Literatur wurden verschiedene Fälle unter dem Namen *Chorea laryngis* beschrieben. Der grösste Theil der Fälle bezieht sich auf einen reflectorischen nervösen Husten. In den von ROE* beschriebenen Fällen war lauter bellender Husten vorhanden, welcher Nachts sistierte; im Kehlkopf fand sich Hyperämie. In zwei Fällen sah MASUCCI** eigenthümlich tönende Hustenanfälle, welche Nachts cessierten. FASANO*** beschreibt zwei Fälle von Chorea laryngis im Sinne SCHRÖTTER's.

CHIARI† veröffentlicht zwei Fälle von Chorea laryngis. Ein 16jähriges Mädchen mit bellendem Husten, mit den Armen ver-

* SEMON's Centralblatt f. Laryngol. 1887.

** Ebendaselbst. *** Ebendaselbst. 1889.

† Monatsschrift f. Ohren-, Kehlkopfkrankh. etc. 1881.

schiedene unmotivierte Bewegungen ausführend. Ausserdem heftige Contraction der Bauchmuskeln und ungewöhnliche Intensität des Geräusches. Im Kehlkopf leichte Röthung des rechten Stimmbandes. Ein 13jähriger Knabe macht 50 Exspirationen in der Minute, das keuchende Geräusch ist so schwach, dass man es nur in der Nähe hört, Nachts Ruhe, choreatische Bewegungen fehlten, es waren nur die Exspirationsmuskeln betheiligt. MARKWALD* beschreibt einen Fall bei einem 13jährigen Knaben, wo ein Husten von eigenthümlich rauher Klangfarbe mit der starken Action der Exspirationsmuskeln verbunden ist. Während des Essens, Sprechens, der laryngoskopischen Untersuchung und Nachts Ruhe. Im Gesichte liessen sich Zuckungen der Muskulatur beobachten, während choreatische Bewegungen an den Extremitäten nicht vorhanden waren.

KEIMER** beschreibt einen Fall bei einem 12jährigen Knaben mit bellendem Husten, welcher Nachts cessierte, mit Zuckungen der Gesichts- und Schultermuskeln. Sprache und Gesang ungestört. Die Stimmbänder rücken mit einer schnellenden Bewegung dicht aneinander, um eben so rasch wieder aus der Phonations- in die Inspirationsstellung zu federn, welches Spiel sich während des Anfalles immer wiederholt, so dass eigentlich nur bei weit geöffneter Glottis gehustet wird. Er zählt den Fall jenen von Chorea laryngis im weiteren Sinne zu.

FARUNDARENA-LABAT*** beschreibt bei einem 20jährigen Mädchen eine reflectorische Form der Chorea laryngis. Bei Tag ständiger Husten, Nachts Ruhe, krampfhafte Bewegungen der Stimmbänder. Durch galvanokaustische Behandlung der hypertrophierten unteren Muskeln Heilung. TAMBURINI† hatte von Cocain in einem Falle Resultat. In dem Falle von PORCHER†† bei einer 40jährigen Frau traten laryngospastische Anfälle auf, mit vorhergehendem heftigem Husten. Locale Behandlung bringt Heilung. POSTHUMUS MEYJES††† beschreibt bei einem 50jährigen Mann einen typischen Fall von Chorea laryngis. Es besteht

* Deutsche med. Wochenschr. 1889. ** Ebendaselbst. 1885.
*** SEMON's Centralblatt f. Laryngol. 1892.
† Ebendaselbst. 1889. †† Ebendaselbst. 1894.
††† Monatsschr. f. Ohren-, Kehlkopfkrankh. 1892.

ständiger quälender Husten, welcher Nachts cessiert, der Husten ist dem höchst unangenehmen Laut des Seelöwen ähnlich, choreatische Bewegungen werden dabei nicht wahrgenommen. Heilung auf Antipyrin. Er bezeichnet im Gegensatze zu seinem Falle den zu erwähnenden Fall von LINKENHELD* als Chorea vocalis. Dieser Fall bezieht sich auf einen 11jährigen Jungen, wo der nur durch Schlaf und Essen unterbrochene laute krächzende Ton (ähnlich dem Blöken der Schafe) mit darauf folgendem kurzen bellenden Husten ausgestossen wird. Allmählich verbesserte sich der Zustand und trat wieder nur beim Lesen, Rechnen, Singen ein. Nachdem er etwa sechs Worte gelesen hatte, liess er das Blatt sinken, der Kopf wurde im Nacken etwas gebeugt, es erfolgte eine tiefe langgezogene In- und Exspiration und dann wurden unaufhörlich Phonationslaute ausgestossen, mit jeder Phonation trat gleichzeitig eine Zuckung im rechten Facialisgebiete auf.

WEIL** beschreibt einen Fall bei einem 17jährigen Mädchen, wo seit einem Jahre krächzende und bellende Hustenstösse in markerschütternder Heftigkeit auftraten, die Nachts sistierten. Behandlung der Nase und des Nasenrachens bringt Heilung.

SCHMIDT*** beschreibt einen Fall eines Geistlichen, bei welchem während der Predigt jede 5 Minuten ein Krampf eintrat, besonders bei dem Buchstaben o.

TOULMIN† occupiert den Ausdruck Chorea laryngis für jene Fälle, bei denen unwillkürliche Auf- und Abwärtsbewegungen des Kehlkopfes vorhanden sind, welche sowohl bei gesunden als auch bei verschiedenartig erkrankten Individuen vorkommen. In den meisten Fällen sind die Bewegungen nur während der Inspiration bei Aneurysmen, auch während der Exspiration vorhanden. Am häufigsten finden sich derartige Bewegungen bei Aneurysmen oder einfachen Dilatationen der Aorta.

SZEGÖ†† beschreibt zwei Endemien, die er mit der Chorea

* Monatsschr. f. Ohren-, Kehlkopfkrankh. 1891.
** Wiener klinische Wochenschr. 1898.
*** SEMON's Centralblatt f. Laryngol. 1887.
† Allgemeine medic. Centralzeitung. 1897.
†† Jahrbuch f. Kinderheilkunde. 1896.

laryngis in Zusammenhang bringt. In einem Mädchenwaisenhaus waren 7 Zöglinge erkrankt, von einem eigenthümlichen bellenden Husten befallen. Der bellende Laut wiederholt sich nach einander während 2—3 Exspirationen, die freien Intervalle dauern einige Minuten, zuweilen 1—2 Stunden. Die Sprache ist ziemlich klangvoll, die Respiration normal. Heilung. Seine eigenen Worte lauten: „Die eben beschriebene Affection gehört zweifelsohne in die Reihe jener Fälle, die wir mit dem Namen 'Chorea laryngis' bezeichnen." Bei dieser Endemie hebt SZEGÖ die Imitationserscheinungen hervor, die durch Isolierung der Zöglinge rasch coupiert werden könnten. Er erwähnt eine ähnliche Endemie, die er von Prof. BÓKAI erfahren hat. In einer höheren Mädchenerziehungsanstalt erkrankte ein 14jähriges Mädchen, brach in ein durch mehrere Minuten unterbrochenes, mehrmals sich wiederholendes, dem Pferdeniessen ähnliches Exspirium aus, welches von einer starken, den ganzen Körper erschütternden Tonexplosion begleitet war. Diesem ersten Falle folgten alsbald zwei andere Fälle mit ähnlichen Erscheinungen nach, der Unterschied zeigte sich nur in dem Stimmphänomen, welches in den beiden letzteren mehr dem Hundebellen glich. Die Fälle heilten. Zu Beginn des neuen Schuljahres recidivierten von den genannten drei Fällen zwei. Hierauf traten die Erkrankungen cumulativ auf, so dass alsbald 12 Mädchen afficiert wurden. Das Stimmphänomen hatte einen verschiedenen Charakter und glich bald dem Fauchen einer Gans, bald dem Gekreische eines Papageies, bald dem Wiehern des Pferdes, in den meisten Fällen jedoch dem Hundegebell. In einem der Fälle war das exspiratorische Stimmphänomen auch von einem inspiratorischen Krampf begleitet. Begann eines der Mädchen mit dem Anfalle, so wurden auch die übrigen hierdurch provociert. Es entstand dann ein wüster Lärm, nach der Aussage einer Lehrerin, als wenn die Bestien einer Menagerie aufgescheucht worden wären.

SZEGÖ erwähnt noch einen Fall, der sich auf ein 10jähriges Mädchen bezieht, welches mit der Diagnose Chorea laryngis im Spital lag; es stiess während jeder Exspiration dem Meckern des Lammes ähnliche Laute aus; dieser qualvolle Zustand wurde blos durch die Nachtruhe unterbrochen. Der Fall endete letal. PREYSZ

machte die Obduction und veröffentlichte* den Fall unter folgender Aufschrift: „Veränderungen des Vagus und Recurrens in einem Falle von Chorea laryngis".

Wir werden später diesen Fall besprechen, da wir kritische Bemerkungen sowohl zu der klinischen Beschreibung wie auch zu den pathologischen Ergebnissen und Schlussfolgerungen hinzufügen müssen. Wir haben somit das uns zur Verfügung stehende Material erschöpft und gesehen, in welch' unglaublich verschiedenen Fällen der Name Chorea laryngis gebraucht wurde. Bevor wir unsere Ansicht erörtern und das bisher Erwähnte kritisch beleuchten, wollen wir noch die einzelnen Ansichten erwähnen. KNIGHT** versteht unter Chorea laryngis die unregelmässige und unwillkürliche Function der Kehlkopfmuskeln; er unterscheidet drei Formen:

a) Es sind die Verengerer des Kehlkopfes, die Exspirationsmuskeln des Brustkorbes und des Bauches angegriffen;
b) die Kehlkopfmuskeln nehmen allein theil;
c) die Exspirationsmuskeln sind angegriffen.

ROSENTHAL*** sagt in seinem Buche, in dem er sich auf die SCHRÖTTER'sche Beschreibung beruft: „Trotz alledem ist der Name Chorea laryngis für den nervösen Husten nicht annehmbar. Insbesondere nicht deswegen, weil bei der Chorea die abnormen Bewegungen auftreten, wenn der Kranke bemüht ist, eine willkürliche Bewegung zu machen, während bei unserer Affection die Hustenstösse im Gegensatze hierzu verschwinden, sobald der Kranke phoniert. SCHECH† sagt, SCHRÖTTER bezeichnet jene Fälle nervösen Hustens, welche mit Contractionen in anderen Muskelgebieten, mit Runzeln der Stirne, Schütteln des Kopfes, Heben der Nasenflügel, Verziehen der Mundwinkel etc. einhergehen, als Chorea laryngis, zumal er öfter die gewöhnliche Form der Chorea dem Husten vorausgehen oder nachfolgen sah. Wie wir erwähnt haben, bezeichnen Andere als „Chorea" jede unmotivierte oder unwillkürliche Zuckung oder Coordinationsstörung.

* ORVOSI, Hetilap. 1898. Ungarische medicin. Presse. 1888.
** Trans. Am. Lar. Ass. 1883. *** Kehlkopfkrankheiten. 1897.
† Ebenda.

ja amerikanische Aerzte mit diesem Namen sogar respiratorischen Glottiskrampf. Es wäre daher sehr erwünscht, die Bezeichnung „Chorea“ nur auf eine ganz bestimmte Störung zu beschränken oder den Namen ganz fallen zu lassen.“

GOTTSTEIN* kommt zur Schlussfolgerung: „Wir glauben, dass es besser ist, die Bezeichnung Chorea laryngis ganz fallen zu lassen“. Unter den 18 von ihm beobachteten Fällen waren zweimal Zuckungen der Gesichtsmuskeln gleichzeitig mit dem Husten vorhanden, einmal wechselten sie mit ihm ab, einmal war der Husten mit allgemeiner Chorea combiniert, gleichzeitig hatte ein Bruder Chorea ohne Husten, zweimal litten Geschwister der Kranken an Chorea, endlich hatten zwei Geschwister von 6 und 9 Jahren gleichzeitig den Husten. In den übrigen Fällen liess sich ein Zusammenhang mit Chorea nicht nachweisen, dagegen zweimal mit Hysterie. „Wir können aber“, sagt GOTTSTEIN, „den geschilderten Husten auch nicht als choreaartige Zuckungen gelten lassen, weil das Charakteristische der Chorea in den anormalen Mitbewegungen bei der Ausführung willkürlicher coordinatorischer Actionen besteht und der nervöse Husten gerade während der Phonation schwindet.“ Im selben Sinne äussert sich SEMON**: „Völlig stimme ich mit GOTTSTEIN darin überein, dass der von verschiedenen Autoren — übrigens in sehr verschiedenem Sinne, gebrauchte Ausdruck „Chorea laryngis“ für die Affection nicht zutrifft und ganz fallen gelassen werden sollte.“

STOERK*** beschreibt die Chorea minor laryngis, bei der es unter unwillkürlichen Phonationserscheinungen zu Bewegungsäusserungen im Larynx in Form von Husten, Räuspern, Bellen, Schreien kommt.

SCHMIDT† acceptiert die Bezeichnung Chorea laryngis nur für solche Fälle, wo im Verlauf des nervösen Hustens die Symptome der Chorea im Gesicht oder an anderen Theilen des Körpers auftreten. „Nur diese allein hat man nach meiner Ansicht das Recht, Chorea laryngis zu nennen. Der Name ist nämlich von

* GOTTSTEIN, Kehlkopfkrankheiten. 1893.

** HEYMANN's Handbuch der Laryngologie. 1897.

*** Kehlkopfkrankheiten. 1897.

† Die Krankheiten der oberen Luftwege. 1894.

den meisten Autoren meiner Meinung nach mit Unrecht auch auf anderartige Fälle angewendet worden. Ich glaube, dass man besser den Namen Chorea für die nicht mit sonstigen Zuckungen verbundenen Fälle ganz fallen lässt, um so mehr, als es auch noch eine Chorea des Kehlkopfes giebt, die sich in nicht coordinierten Bewegungen der Stimmlippen äussert."

SCHMIDT hebt in der zweiten Auflage seines Buches noch hervor: „SCHRÖTTER hat z. B. auch den nervösen Husten des Pubertätsalters als Chorea laryngis beschrieben. Man kann aber unmöglich jeden nervösen Husten, z. B. denjenigen, welcher durch Fremdkörper im Ohr hervorgerufen wird, als Chorea bezeichnen, auch wenn dabei hie und da Zuckungen im Gesicht vorkommen."

B. BAGINSKY* äussert sich: „Ich muss nach meinen Beobachtungen mein völliges Einverständnis mit GOTTSTEIN aussprechen. Ich habe zunächst selbst einige Fälle von Veitstanz laryngoskopisch untersucht und bei diesen fast durchgängig keine Mitbetheiligung der Kehlkopfmuskulatur beobachtet."

Bevor wir unsere Auffassung präcisieren, wollen wir etwas eingehender den Fall von PREYSZ besprechen. Es handelt sich um die erste Veröffentlichung über die pathologischen Veränderungen des Vagus und Recurrens bei Chorea laryngis und mit dieser Diagnose letal endenden Falles.

Das 10jährige Mädchen hatte Masern und Pocken überstanden. Bei der Aufnahme wurde seitens der Angehörigen angegeben, dass bei dem Kinde vor drei Monaten Husten und Herzklopfen aufgetreten waren; seit drei Wochen ist der Zustand ziemlich unverändert. Die genauere Untersuchung der schwach entwickelten Pat. ergiebt ausser einer mässigen, nach links convexen Skoliose keinerlei physikalische Veränderung. Als prägnantestes Krankheitssymptom standen den ganzen Tag über andauernde, die Exspiration begleitende Hustenanfälle im Vordergrunde, die von ganz eigenthümlichen, ans Blöken erinnernden Tönen begleitet waren. Der Husten trat zwei-, dreimal im Gefolge je einer Exspiration auf, um sodann einer mehrere Secunden oder Minuten währenden Accalmie Platz zu geben. Unter dem Einflusse der

* Encykl. Jahrb. d. ges. Heilkunde. 1893.

Willenskraft kann, z. B. durch Sprechen, der Hustenanfall für kurze Zeit hintangehalten werden, um jedoch nachher um so heftiger einzutreten.

Im Schlafe sind all' diese Anzeichen wie weggewischt.

Noch ist ein geringfügiges Spiel der Mundmuskeln zu erwähnen, welches die Hustenanfälle begleitet.

Die laryngoskopische Untersuchung ergiebt nichts Abnormes. Das Kind sieht sehr aufgeregt aus und weint oft.

Nach 11 Tagen Spitalaufenthaltes wurde Pat. aus der Anstalt in häusliche Pflege genommen, wo sich zu den beschriebenen Symptomen alsbald heftige Kopfschmerzen gesellten; einige Tage nachher wurde das Krankheitsbild durch das Auftreten von mehrere Minuten, ja zwei Stunden andauernden und sich auf die Gesammtmuskulatur erstreckenden tonischen Krämpfen, sowie durch Hallucinationen compliciert. Während des Bestandes derselben pausierte der Husten. Am achten Tage nach dem Austritte hatte das Mädchen angeblicherweise plötzlich das Bewusstsein verloren und wurde nach weiteren acht Tagen in diesem Zustande neuerdings ins Spital gebracht. Pat. ist vollkommen apathisch, die Augen sind geschlossen, die Extremitäten unbeweglich und gegen äussere Reizwirkungen unempfindlich. Die in den Mund eingeführte Milch wird geschluckt; der beschriebene Husten besteht unverändert, doch sind die begleitenden Töne abgeschwächt.

Die Bewusstlosigkeit hielt mit kurzen Unterbrechungen bis zu dem vier Wochen später eingetretenen Tode an; in der Zwischenzeit kamen manchmal tonische Krämpfe in der Muskulatur des Rumpfes, der Extremitäten, des Gesichtes, anfänglich Stuhl- und Harnretention, beschleunigter Puls, später Lähmung der Sperrmuskeln und Schluckbeschwerden und schliesslich am letzten Tage das Ablassen des Krampfhustens zur Beobachtung.

Die zwei Tage nachher vorgenommene Obduction ergab folgenden Befund: mässiger, chronischer Hydrocephalus internus, acutes Lungenödem, Ecchymosen des Herzbeutels, kleines, offengebliebenes Foramen ovale, Fettleber und allgemeine Abmagerung.

Es wurden die Cervicalfragmente beider Nn. vagi, sowie die

beiden Nn. recurrentes zur mikroskopischen Untersuchung herangezogen.

Die mit Haematoxylin Weigert behandelten Segmente liessen folgendes feststellen:

1. Im Querschnitte des rechten Vagus sind die einzelnen Nervenfasernfascikel noch regelmässig rund und nicht zusammengefallen; auffallend ist jedoch die Ungleichheit und das Gelichtetsein der Segmentfläche, an welcher intacte, mit dunkel blauschwarz colorierter Meduflarscheide versehene Nervenfasern nur in geringer Anzahl und zumeist degenerierte Nervenfasergebiete sichtbar sind.

Die intacten Nervenfasern sind unter den degenerierten Abschnitten ziemlich gleichmässig vertheilt. Die Reticulärlücken der letzteren sind kleiner als die Quersegmente der intacten Fasern und erscheinen entweder unausgefüllt oder weisen normale, hie und da gedunsene Achsenfortsätze auf.

2. Der linke Vagus zeigt die nämlichen Veränderungen, doch giebt es da in einigen Nervenfascikeln kleine, scharf abgegrenzte degenerierte Gebiete, welche gar keine intacten Nervenfasern aufweisen.

3. Im rechten N. recurrens ist die Degeneration eine hochgradige. Im Centralfascikel sind überhaupt keine intacte Fasern vorhanden; an zwei kleineren Fascikeln ist die eine Hälfte intact, die andere vollkommen degeneriert, die Abgrenzung zwischen den beiden Gebieten überaus scharf ausgeprägt.

4. Der linke N. recurrens besteht aus zumeist intacten Fasern; stellenweise sind kleinere Degenerationsherde bemerkbar.

Die zweifache Colorierung der Segmente des linken Vagus und Recurrens mit Haematoxylin-Eosin ergiebt weder in den diffus zerstreuten, noch in den scharf abgegrenzten Degenerationsgebieten Anzeichen von Zellenanhäufung, Zellenwachsthum oder von auf Entzündung hinweisender Zelleninfiltration; stellenweise jedoch sind gedunsene Medullarscheiben mit oder ohne ebensolche Achsenfortsätze zu beobachten. Die Blutgefässe der untersuchten Nerven zeigen nichts Abnormes.

Weitere Theile des Gehirnsystems waren leider nicht zu Untersuchungszwecken erhältlich.

Szegö, der den Fall erwähnt, thut es mit folgender Einleitung: „Zuweilen nimmt die Krankheit (d. h. Chorea laryngis) auch einen ernsteren Charakter an.“ Die Todesursache war die Inanition. Wir könnten ganz ruhig zur Tagesordnung schreiten über diesen Fall, da er klinisch und pathologisch-anatomisch so unvollständig dasteht, dass er zu klinischer Verwerthung und Schlussfolgerung absolut unbrauchbar ist. Wir müssen einige Bemerkungen machen, weil der Fall deutsch publiciert wurde und in der Monatsschrift für Ohren-, Kehlkopfkrankheiten referiert wurde mit solchen Bemerkungen, die nicht ohne Correctur bleiben dürfen. Dass wir es in diesem Falle mit keiner Chorea laryngis zu thun hatten, das wird seine Motivierung in den demnächst folgenden allgemeinen kritischen Erörterungen finden. Es ist sicher anzunehmen, dass es sich um eine Erkrankung des Centralnervensystems handelte, welches leider durch die mangelhafte Obduction nicht festgestellt werden konnte. Die pathohistologische Untersuchung zeigte eine wie erwähnt hochgradige Degeneration der Vagi und der Recurrentes im grellsten Unterschiede zu dem laryngoskopischen Bilde, welches in den Bewegungen der Stimmbänder alles in Ordnung zeigt. Wir betrachten es als einfach unmöglich, dass bei den beschriebenen grossen degenerativen Veränderungen die laryngoskopische Untersuchung in den Bewegungen der Stimmbänder nichts Abweichendes constatieren konnte. Der Untersuchende ist nicht erwähnt, in der Krankengeschichte findet man am Anfang nur eine einzige Bemerkung. Es scheint daher, dass der Kehlkopf bis zum in einigen Wochen eingetretenen Tode nicht mehr untersucht worden ist. Ich habe schon erwähnt, dass der Fall auf gar keine Verwerthung Anspruch haben kann, ich befasse mich speciell mit diesem Theile des Aufsatzes, weil der Autor die normale Function der Stimmbänder bei hochgradiger Degeneration der Nervenstämme zur Basis weiterer Erklärungsversuche benutzt, die nicht ohne Bemerkung gelassen werden können. Preysz kommt zu der Schlussfolgerung, dass „die in den Recurrentes intact angetroffenen Fasern aus dem Accessorius stammende motorische, die degenerierten hingegen dem Vagus entnommene sensorische Nervenfasern sein mussten.“ Ich habe in meinen Arbeiten ausführlich mitgetheilt, wie com-

pliciert die Zusammenstellung der Recurrentes ist, wie vielfache Nervenbündel verschiedenen Ursprunges in ihnen enthalten sind, ferner dass mit der sensitiven und motorischen Innervation des Kehlkopfes der Accessorius nichts zu thun hat. Bei dieser Gelegenheit will ich die Verbindungen mit dem Sympathicus und den Herznerven nicht berühren. Ich muss nur betonen, dass nekroskopische Untersuchungen, welche nicht nach meinem Vorschlag ausgeführt werden, werthlose Daten bleiben. Nach dem heutigen Stand unserer Kenntnisse, was kann eine Untersuchung eines herausgeschnittenen Theiles des Recurrensstammes erklären?

Wollen wir den Kehlkopfbefund in vivo mit den nekroskopischen Veränderungen der Nervenbündel in Einklang bringen, so muss jeder einzelne Nerv jedes Stimmbandmuskels isoliert untersucht werden, ausserdem die Stämme der Kehlkopfnerven, der Vagi und die Verbindungen des Sympathicus und der Herznerven. Hätte PREYSZ in diesem Falle eine solche präcise Untersuchung ausgeführt, so hätte er über die Beschaffenheit der degenerierten Faserbündel urtheilen können. Wir wollen uns nicht mehr mit dieser Sache beschäftigen, da die Resultate der PREYSZschen Untersuchungen zu wissenschaftlichen Verwerthungen und Schlussfolgerungen keine Berechtigung haben. Dieser Fall ist von BAUMGARTEN* in der Monatsschrift für Ohr- und Kehlkopfkrankheiten referiert worden, bei welcher Gelegenheit Referent auch einige Aeusserungen macht. Er hält gerechtfertigt die Annahme, dass die in den Recurrentes verlaufenden sensorischen und motorischen Fasern sich verschiedentlich verhielten und die degenerierten Fasern die sensorischen waren. Er schliesst mit folgender Bemerkung: „Es ist dieser Fall daher der erste pathologische Beweis für die SEMON'sche Annahme, die physiologisch von RUSSELL und RETHY, anatomisch von ONODI bereits verfochten wird." Was den ersten Theil dieser Bemerkungen betrifft, so wiederhole ich, dass auf Grund meiner Beobachtungen und unserer heutigen Kenntnisse die nekroskopische Untersuchung, wie sie von PREYSZ ausgeführt wurde, zu Schlussfolgerungen auf die Bestimmung der Faserbündel im Recurrensstamme absolut

* 1893.

keine Berechtigung hat. Was die letztere Bemerkung BAUMGARTEN's betrifft, so scheint B. die PREYSZ'schen Resultate mit den anatomischen und physiologischen Ergebnissen von mir und RUSSELL irrthümlich in Verbindung zu bringen. Dass RUSSELL und ich physiologisch nachgewiesen haben den isolierten Verlauf der Erweitererbündel und der Verengererbündel und dass es mir beim Pferde gelungen ist, 88 cm lang die respiratorischen und die phonatorischen Bündel anatomisch zu isolieren, diese Thatsache konnte BAUMGARTEN nur irrthümlicherweise mit den PREYSZ'schen Untersuchungen in Verbindung bringen. Dieselben haben mit einander nichts zu thun. Meine Untersuchungen haben gezeigt, dass die isolierten abductorischen und die isolierten adductorischen Nervenbündel auch verschiedene Nervenbündel und speciell sensitive Faserbündel besitzen, die grösstentheils vor dem Eintritt in die betreffenden Muskeln von beiden Hauptbündeln sich abzweigen. Mit einem Worte, die Behauptung PREYSZ', dass die intacten Bündel vom Accessorius und die degenerierten Bündel vom Vagus abstammen, die ersteren motorischen, die letzteren sensitiven Nervenfasern entsprechen, hat mit den Untersuchungen von RUSSELL, ONODI und RÉTHY nichts Gemeinschaftliches, übrigens haben wir auch den Werth derselben beleuchtet. Es fällt daher der von BAUMGARTEN irrthümlich aufgestellte Vergleich und der „erste pathologische Beweis" gänzlich weg.

Die vorgeführten Fälle haben uns deutlich gezeigt, welche Verworrenheit in den Begriffen der Chorea laryngis besteht. Dieser Thatsache entsprechen jene erwähnten Aeusserungen GOTTSTEIN's, SCHECH's, SEMON's, ROSENTHAL's, BAGINSKY's, SCHMIDT's. Grösstentheils wird der Wunsch geäussert, den Namen „Chorea laryngis" fallen zu lassen oder auf entsprechende Fälle zu beschränken.

Wir haben Fälle gesehen, wo neben der Chorea auch choreatische Unruhe, choreatische Bewegungen der Stimmbänder vorhanden waren, ferner bloss auf die Stimmbandmuskeln sich erstreckend; wir haben gesehen eine ganze Reihe von Fällen von nervösem Husten, einige in Verbindung mit Chorea, mit vorausgegangener und sich einstellender Chorea. Wir haben Fälle von nervösem Husten gesehen, wo weder Chorea noch Mitbewegungen

der Gesichtsmuskeln vorhanden waren. Es sind Fälle beschrieben worden von symptomatischem und reflectorischem nervösen Husten. Es wurde die Bezeichnung Chorea vocalis aufgestellt, wo die Hustenanfälle beim Lesen auftraten. Es wurde der respiratorische Glottiskrampf, ferner der phonische Glottiskrampf mit Chorea laryngis bezeichnet. Es wurden die von den Aneurysmen fortgeleiteten Bewegungen des Kehlkopfes, die Auf- und Abwärtsbewegungen als Chorea laryngis aufgefasst. Es wurde ferner eine Endemie der Chorea laryngis beschrieben, und zuletzt der erste pathologisch-anatomische Befund der Chorea laryngis.

Diese Reihe der unglaublich verschiedenen Begriffe muss ernst anregen, die Frage der Chorea einmal endgültig zu klären und eine einheitliche Auffassung zu schaffen. Wir wollen erst die Frage beantworten, ob der Name Chorea laryngis fallen zu lassen sei, oder nur für entsprechende Fälle erhalten bleibe?

Die Autoren, die den Namen Chorea laryngis fallen lassen wollen, haben die Form jenes nervösen Hustens vor Augen gehabt, welchen SCHRÖTTER damit bezeichnet hat.

Wir fassen uns schon jetzt kurz, indem wir behaupten, dass die SCHRÖTTER'sche „Chorea laryngis" die choreatischen Attribute nicht besitzt; sie hat mit der echten Chorea nichts zu thun, es handelt sich um einen nervösen Husten, dessen Aetiologie keine einheitliche ist. Derselbe kann symptomatisch sein bei den verschiedensten Affectionen des centralen oder peripheren Nervensystems, er kann, wie bekannt, reflectorisch ausgelöst werden, er kann Ausfluss von Hysterie sein, endlich kann es sich auch um Imitationserscheinungen, um Gewohnheitskrämpfe handeln. Die Zuckungen, welche gelegentlich im Gesichte beobachtet werden, sind einfach als Mitbewegungen zu betrachten. GOTTSTEIN bemerkte schon, dass das gleichzeitige Auftreten der Bewegungen in anderen Muskelgruppen nur auf die gemeinschaftliche Ursache, „die nervöse Belastung", hinweist, ohne dass deswegen die Aeusserungen derselben als gleichartige betrachtet zu werden brauchen. Er äussert sich ferner: „wir können aber den geschilderten Husten auch nicht als choreaartige Zuckungen gelten lassen, weil das Charakteristische der Chorea in den anomalen Mitbewegungen bei der Ausführung willkürlicher coordinatorischer Actionen be-

steht und der nervöse Husten gerade während der Phonation schwindet." Diese Argumentation finden wir bei mehreren Autoren, die sich gegen die SCHRÖTTER'sche Auffassung der Chorea laryngis wenden.

Ich habe mehrere Ansichten hochverehrter Collegen brieflich eingeholt und will einige erwähnen.

SCHECH schreibt: Meiner Meinung nach sollte man den anfallsweise auftretenden oder auch continuierlich bei Tage fortdauernden und Nachts cessierenden Husten, bei dem sich keinerlei Erkrankungen der Respirationsorgane finden, als nervösen Husten bezeichnen und die meiner Erfahrung nach sehr selten dabei vorkommenden Zuckungen im Gesichte als Mitbewegung betrachten. Der nervöse Husten verdankt im Grunde doch nur einer Reizung der sensiblen Vagusäste, mag dieselbe nun vom Centrum oder der Peripherie ausgehen, seine Entstehung, worauf dann die reflectorische Action der Muskeln folgt. Der tabische Husten, die Larynxkrise, ist ja auch nur die Folge eines Reizzustandes der Medulla, der Erkrankung gewisser Nervencentren, aber niemand fällt es daher ein, von „Chorea" zu sprechen. Für ganz verfehlt halte ich es aber, jede nicht intendierte Contraction der Kehlkopfmuskeln als „choreatische" zu bezeichnen, denn dann ist Alles „Chorea", der respiratorische, der phonische Stimmritzenkrampf auch. Bei letzteren habe ich sehr starke Zuckungen in Gesichts- und anderen Muskeln gesehen."

SEMON erklärt sich im selben Sinne seiner oben erwähnten Aeusserungen.

SCHMIDT schreibt: „Was nun meine Ansicht über Chorea laryngis anlangt, so unterscheide ich zwischen nervösem Husten und Chorea, insofern als ich nur die Fälle von nervösem Husten zu der Chorea rechnen möchte, die zugleich die für die Krankheit charakteristischen klonischen Zuckungen auch an übrigen 'Theilen des Körpers' aufweisen."

SCHMIEGELOW schreibt: „Eine eigenthümliche Chorea laryngis bei einem Patienten, der sonst an wirklicher Chorea litt, habe ich noch nicht zu beobachten Gelegenheit gehabt, und dies, meine ich, sollten die einzigsten Fälle sein, wo die Bezeichnung berechtigt wäre. Dass man bisweilen bei anderen Patienten, welche

an verschiedenen nervösen Krankheiten litten, atactische und zitternde Bewegungen der Stimmlippen beobachten kann, scheint mir nicht zu berechtigen, auch in diesen Fällen den Begriff Chorea laryngis anzuwenden."

BURGER schreibt, „dass ich den Ausdruck Chorea laryngis für eine gewisse Art von nervösem Husten gar nicht gebrauche. Wenn auch mitunter choreaartige oder doch unwillkürliche Mitbewegungen im Gesichte u. s. w. dabei beobachtet werden, so trifft doch der Ausdruck für den Husten an und für sich durchaus nicht zu. Eigentlich hätte der Ausdruck nur Recht, wenn bei einer allgemeinen Chorea auch gewisse chrakteristische Erscheinungen am Kehlkopf beobachtet würden; allein in diesen Fällen braucht man für diese Larynxerscheinungen keinen eigenen Namen und da andererseits das Wort nun einmal von einigen Autoren für den nervösen Husten gebraucht wird, so glaube ich, es sei besser, den Ausdruck gänzlich fallen zu lassen."

HOPMANN schreibt: „dass ich einen der Chorea minor der Kinder ähnlichen zweckwidrigen, vom Willen unabhängigen, regellosen Zuckungszustand der Kehlkopfmuskeln so nennen würde."

ZARNICO schreibt: „Ich würde nicht jeden Husten, wenn er mit Zuckungen anderer Muskelgruppen combiniert ist oder sich bei einem Choreatiker findet, als Chorea laryngis bezeichnen, sondern von einer Chorea laryngis erwarten, dass dabei, beim Versuch zu sprechen, uncoordinierte Bewegungen an den Stimmbändern vorhanden wären."

HEYMANN schreibt, „dass man wahrscheinlich besser thut, den Namen Chorea laryngis für die der Chorea der Gesichtsmuskeln ähnliche Zuckungen des Kehlkopfes zu reservieren."

HERYNG schreibt: „Was den Namen Chorea anbetrifft, ich würde ihn ganz streichen."

MOURE schreibt: „Man hat unter dem Namen Chorea laryngis eine Reihe nervöser Störungen beschrieben, die damit nichts zu schaffen hat. Meines Erachtens nach existiert eine Form von Chorea, charakterisiert durch localisiertes muskuläres Irresein (Folie musculaire) nicht blos des Kehlkopfes, sondern auch der Inspirationsmuskeln. In der Pathologie des Kehlkopfes giebt es

zwei Arten spasmodischer Störungen der Kehlkopfmuskeln, die eine nervöser Husten mit seinen verschiedenen Formen, welcher aber nicht den Namen Chorea verdient, welchen ihr SCHRÖTTER und Andere beigelegt haben; die andere ein wirkliches Choreasymptom, übrigens viel seltener; sie betrifft zu gleicher Zeit die Constrictoren des Kehlkopfes und die Exspirationsmuskeln (bellender Husten, spasmodischer Kehlkopfschrei); diesen Ansichten (cri laryngé spasmodique) gegenüber stehen die schon erwähnte briefliche Erklärung SCHRÖTTER's, der seinen bekannten Standpunkt aufrecht erhält, SEIFFERT's und CHIARI's Mittheilungen."

SEIFFERT schreibt: „Bezüglich der Chorea laryngis stelle ich mich auf den Standpunkt SCHRÖTTER's, reserviere also diese Bezeichnung für jene Fälle von nervösem Husten, welche mit eigenthümlichen Contractionen in anderen Muskelgebieten vergesellschaftet sind."

CHIARI schreibt: „Es ist eine Art von nervösem Husten bei gesunder Schleimhaut, welcher sich durch besondere Schallentwickelung bemerkbar macht und längere Zeit andauert. Da aber diese Hustenart auch durch Hysterie und andere nervöse Affectionen hervorgerufen werden kann, so ist der Name nicht ganz glücklich gewählt. Wenn man aber nur solche Fälle Chorea laryngis nennt, bei denen keine andere Ursache zu constatieren ist, als eben choreatische Affection, die sich oft auch in anderen Muskelgebieten deutlich zeigt, so kann man gegen diese von SCHRÖTTER gewählte Bezeichnung nichts einwenden."

Wir sehen aus diesen Mittheilungen, wie verschieden die Ansichten sind, was das Wesen der Frage betrifft, die Meinungen häufen sich und begründen die Stellungnahme gegen die SCHRÖTTER-sche Auffassung.

Wir halten es für absolut nothwendig, die Bezeichnung der verschiedenen Formen des nervösen Hustens mit dem Namen Chorea laryngis fallen zu lassen, denn diese veröffentlichten Fälle haben mit der echten Chorea nichts zu thun, nichts gemein. Ich habe die verschiedenen von mir beobachteten Fälle von nervösem Husten nie mit dem Namen Chorea laryngis bezeichnet, typische Fälle, wie sie von SCHRÖTTER beschrieben wurden, habe ich ebenfalls nur als nervösen Husten aufgefasst.

Zur Illustration der den nervösen Husten begleitenden Mitbewegungen erwähne ich folgenden Fall:

Ein 13jähriges Mädchen steht unter meiner Beobachtung, wo seit langer Zeit meistens nicht laute Hustenanfälle bestehen. Der Husten, welcher manchmal auch laut ist, tritt 30mal in der Minute ein. Der Spiegel zeigt nichts Abnormales. Abwechselnd begleiten eigenthümliche Mitbewegungen den Husten, welcher nur Nachts cessiert. Zuerst war Drehen des Kopfes vorhanden, dann Zuckungen der Schultern, Runzeln der Stirn, Heben der Nasenflügel, Spiel der Lippen. Diese Mitbewegungen haben abwechselnd den Husten begleitet. Dass es sich in diesem Falle bei dem anämisch-nervösen Mädchen neben dem nervösen Husten um nach GOWERS sogenannte Gewohnheitskrämpfe handelte, steht ausser Zweifel, denn das Auftreten eines Symptomes verdrängte in kurzer Zeit gänzlich das ältere Symptom. Nur ein Symptom ist unverändert geblieben während der Krankheit, welches sich in eigenthümlicher Weise einstellt; so oft das Mädchen ihren Kaffee nimmt, zwickt sie inzwischen fortwährend die Haut ihres Halses.

Es handelt sich darum festzustellen, was wir eigentlich mit dieser Bezeichnung definieren wollen und ob dieser Ausdruck für geeignete Fälle in der Terminologie erhalten werden soll. Wir haben eingehend geschildert, was wir unter der echten Form der Chorea minor zu verstehen haben; wollen wir von einer Chorea laryngis sprechen, so müssen wir ebenfalls diese choreatischen Attribute seitens der Stimmbandmuskulatur suchen. Wir haben gesehen, dass das pathognomostische der als choreatisch anzusprechenden Bewegungen der durchaus arhythmische, uncoordinierte Charakter derselben ist. Im Kehlkopfe müssen wir die choreatische Unruhe der Stimmbänder, die regellosen, durchaus verschiedenen Zuckungen und Krämpfe der Stimmbänder antreffen; wir können gleich hinzufügen bei gleichzeitigem Vorhandensein einer allgemeinen echten Chorea minor. Es kommt erst in zweiter Linie in Betracht, ob ein Husten in den erwähnten Formen vorhanden ist oder nicht. Auf diesen Punkt kommen wir noch zurück. Im scharfen Gegensatze zu den ausführlich schon erörterten choreatischen Attributen stehen aber nicht nur die

Formen des nervösen Hustens, sondern auch die Fälle von rhythmischen monotonen Bewegungen und Zuckungen der Stimmbänder. Ich will an dieser Stelle die aus der Literatur wohlbekannten Fälle der rhythmischen und zitternden Bewegungen der Stimmbänder erwähnen, die im Zusammenhang mit verschiedenartigen neuropathischen Zuständen beobachtet wurden. Anknüpfend erwähne ich einen Fall, den ich vor einiger Zeit Gelegenheit hatte zu beobachten: ein erwachsenes Mädchen, bei der seit Juni 1898 ein fortwährender Husten vorhanden ist, welcher auch Nachts nicht cessiert und ihren Schlaf stört. Sie giebt den Laut e, ö, welcher durch den Husten unterbrochen wird, ebenso unterbricht der Husten das Sprechen und das Zählen, ihre Stimme ist sonst rein. Seit October ist ein eigrosses Lymphom links unter dem Unterkiefer; Kehlkopf, Luftröhre liegen frei. Bei der Untersuchung mit dem Spiegel sieht man den Lauten e, ö entsprechende zwei rasche nach innen gehende Contractionen der Stimmbänder, und zwar in der Minute zucken die Stimmbänder nach der Mittellinie 70mal und erzeugen so die Laute e, ö, sie werden in der Minute 10mal unterbrochen durch den Husten. Im Mediastinum ist nichts nachzuweisen.

Unter den von uns angeführten Fällen sind äusserst wenige, wo die laryngoskopische Untersuchung bei Vorhandensein einer Chorea minor die uncoordinierten Bewegungen, die choreatische Unruhe der Stimmbänder constatierte. Sie wurden beobachtet in den erwähnten Fällen von Ziemssen, Schultzen, Redtenbacher, Nicoll und Gibb. Von Sachs werden sie als die seltenste Form der Chorea bezeichnet. In den Fällen von Spamer und Kumicutt konnte wegen der choreatischen Bewegungen keine laryngoskopische Untersuchung ausgeführt werden. In dem Falle von Gibb waren alle anderen Muskeln ausser den Kehlkopfmuskeln frei, in dem Falle von Nicoll trat die Chorea minor später ein und der zuerst aufgetretene nervöse Husten endete erst mit der Heilung der Chorea.

Wir wollen unseren Standpunkt präcisieren, indem wir sagen, dass der Begriff einer laryngealen Chorea insofern besteht, dass die mit dem Kehlkopfspiegel constatierbare choreatische Bewegung der Stimmbänder gleichzeitig mit einer allgemeinen echten Chorea

minor auftritt. Und in diesen wenigen Fällen genügt die Bezeichnung der allgemeinen Chorea minor mit der Aufzählung der betroffenen Muskelgruppen, so auch der Stimmbandmuskulatur. Die Bezeichnung Chorea laryngis ist in diesen Fällen ganz und gar überflüssig. Um jeder Verwechselung aus dem Wege zu gehen, würde ich für den GIBB'schen Fall und für ähnliche Fälle, wo die choreatische Unruhe der Stimmbänder zu constatieren ist, wo aber eine allgemeine Chorea minor nicht nachweisbar, in scharfem Gegensatze zu den rhythmischen, monotonen Bewegungen der Stimmbänder, die Bezeichnung *choreiforme Bewegungen* der Stimmbänder vorschlagen. Wir würden damit den Namen Chorea laryngis, welcher bisher nur zu Verwechselungen und Irrthümern geführt hat, vollständig fallen lassen. Jene Fälle, bei welchen ein nervöser Husten vorhanden war und zu dem sich nachträglich eine echte Chorea minor zugesellt hat, werden wir als Chorea minor und nervösen Husten betrachten, in den Fällen von NICOLL, SCHRÖTER und GOTTSTEIN. Es kann eine Chorea minor mit oder ohne nervösen Husten auftreten, in den meisten Fällen ohne nervösen Husten.

Alle von uns angeführten Gründe wie die erwähnten Einwendungen gegen die SCHRÖTTER'sche Auffassung, die wir auch theilen, haben zur Folge, dass wir die Bezeichnung der Chorea laryngis für die verschiedenen Formen des nervösen Hustens ein für alle Mal verwerfen. Die einzelnen Formen des nervösen Hustens nach den verschiedenen ätiologischen Momenten und verschiedenen Erscheinungen bedürfen keiner besonderen Bezeichnung, es genügt die Kenntniss derselben. Wir haben also in den unter dem Namen Chorea laryngis veröffentlichten Fällen von SCHRÖTTER, CHIARI, ROE, MASUCCI, FASANO, MARKWALD, KEIMER, FARUNDARENA-LABAT, TAMBURINI, POSTHUMUS MEYJES, LINKENFELD, WEIL die verschiedenen Formen eines nervösen und reflectorischen Hustens und dürfen in der Zukunft ähnliche Fälle nie mit dem Namen Chorea laryngis bezeichnet werden.

Den Verwirrungen der Begriffe sind jene erwähnten Fälle zuzuschreiben, welche unter dem Namen Chorea laryngis respiratorische und phonische Glottiskrämpfe, ferner zum Theil durch

Aneurysmen veranlasste Auf- und Abwärtsbewegungen des Kehlkopfes beschreiben.

Die von SZEGÖ veröffentlichten Fälle, d. h. Endemien, sind Fälle ausgesprochenen suggestiven (hysterischen) Hustens, entschiedene Imitationserscheinungen, Gewohnheitskrämpfe und haben mit der Chorea nichts zu thun. Der von PREYSZ veröffentlichte Fall war eine letal endende schwere Erkrankung des Centralnervensystems mit vorausgegangenem symptomatischen nervösen Husten.

Ich übergebe jetzt das gesammte Material, die veröffentlichten Fälle, Meinungen, die brieflichen Mittheilungen und meinen Standpunkt und Vorschlag der Discussion, damit im Interesse sowohl der Fachcollegen wie practischen Aerzte die jetzt bestehende Verwirrung der Begriffe einmal aufhört und die nicht glücklich gewählten und gebrauchten Bezeichnungen ausgeschaltet werden.

21.

ZUR FRAGE DER NEKROSKOPISCHEN UNTERSUCHUNG DER KEHLKOPFNERVEN.

Von Prof. Dr. A. ONODI, Budapest.

Es ist eine bekannte Sache, dass in den einzelnen klinischen Fällen, wenn diese zur Section gelangen, die Untersuchung gewöhnlich sich auf die Kehlkopfmuskeln oder auf die Nervenstämme bezieht.

Ich habe in meinem Buche* in Verbindung mit einer wichtigen klinischen Beobachtung meine Untersuchungsmethode mitgetheilt. Diese bestand darin, dass wir nicht nur die einzelnen Muskeln, sondern die isolierten Endzweige des unteren Kehlkopfnerven untersucht haben. Mit dieser Methode ist es uns gelungen, das klinische und laryngoskopische Bild gänzlich zu erklären, andererseits haben wir den ersten pathologisch-anatomischen Beweis zur SEMON-Lehre erhalten, im Einklange mit unseren experimentellen Resultaten, nach welchen der isolierte Posticusnerv am frühesten seine Leitungsfähigkeit und elektrische Erregbarkeit verliert. In meinem Buche habe ich diesen Fall ausführlich beschrieben und erörtert, dass die bisherige Methode nicht geeignet ist zur Verwerthung in den pathologischen Streitfragen und ich habe bei mehreren Gelegenheiten die Herren Fachcollegen ersucht, neben den Muskeln die entsprechenden einzelnen Recurrenszweige zu untersuchen. Nur auf diese Weise kann man entscheiden, für welche Muskeln die im Recurrensstamme gefundenen degenerierten Nervenfasern bestimmt waren und im allgemeinen welcher Muskel intacte Nervenfasern erhielt. Leider, soweit mir

* ONODI, Die Innervation des Kehlkopfes. Wien 1895.

die Literatur zugänglich war, habe ich keinen einzigen Fall gefunden, wo die nekroskopische Untersuchung mit der von mir angegebenen Methode durchgeführt worden ist.

Die Untersuchungen sind zumeist unvollkommen, sie beziehen sich entweder auf die eine Seite und auf einzelne Muskeln oder auf die Nervenstämme; die vollkommene Untersuchung der einzelnen Muskeln und der einzelnen Nerven ist nicht vorgenommen worden. Neuerdings ist ein Aufsatz* erschienen, welcher in einem Falle von Chorea laryngis eine starke Degeneration der Vagus- und Recurrensstämme beschreibt, ohne dass die laryngoskopische Untersuchung irgend eine Veränderung im Kehlkopfe gefunden hätte. Auf diesen Aufsatz komme ich demnächst in einer die Frage der Chorea laryngis besprechenden Arbeit zurück. Ich erwähne diesen Fall nur deshalb, um im Allgemeinen zu zeigen, dass sowohl in den Fällen von Kehlkopflähmungen, wie auch in anderen Fällen durchgeführte Untersuchungen nicht jenen Bedingungen entsprechen, welche eine präcise klinische und pathologische Untersuchung unbedingt erfordert. Unsere neueren Untersuchungen** bringen diese Frage wieder aufs Tapet. Wir haben die verschiedenen Verbindungen der Kehlkopfnerven kennen gelernt*** und haben gesehen, dass im Recurrensstamme Nervenfasern verschiedenen Ursprunges und Charakters enthalten sind. Der obere und der untere Kehlkopfnerv tauschen zum Theil ihre Nervenfasern, ferner existieren die mehrfachen Verbindungen mit dem Sympathicus und den Herznerven. Auf Grund meiner neueren anatomischen Untersuchungen erweitere ich meine bisher angegebene Untersuchungsmethode. Es wird von nun an nothwendig sein, in den zur Section gelangenden Fällen nicht nur die Stämme des Vagus, der oberen und unteren Kehlkopfnerven, sondern die einzelnen Kehlkopfmuskeln und die peripheren, d. h. Endzweige des oberen und unteren Kehlkopfnerven einzeln, ferner die Verbindungsfäden des Recurrens mit dem Sympathicus und den Herznerven zu untersuchen. Durch diese Untersuchungsmethode

* Preysz Orvosi Hetilap. 1898.

** Die respiratorischen und phonat. Nervenbündel des Kehlkopfes. Arch. f. Lar. 1898. Bd. 7.

*** Beiträge z. Kenntniss d. Kehlkopfnerven. Arch. f. Lar. Bd. IX. S. 86.

kann einerseits eine klinische und laryngoskopische Beobachtung ihre volle Erklärung erhalten, andererseits kann sie zu werthvollen Resultaten führen, welche den Ursprung und Charakter der in dem Recurrensstamme enthaltenen verschiedenen Nervenbündel zu beleuchten im Stande sind.

Ich gebe zu, dass diese Untersuchungsmethode viel Zeit und Mühe in Anspruch nimmt, aber sie ist die einzige präcise wissenschaftliche Methode, welche die klinische Beobachtung vervollkommnet und zum weiteren Aufbau unserer Kenntnisse führen kann. Es ist selbstverständlich, dass in Fällen, wo die Untersuchung des centralen Nervensystems angezeigt, diese mit der von mir angegebenen Methode gemeinsam ausgeführt werden soll.

SITZUNGSBERICHTE.

I. In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Classe der Ungarischen Akademie der Wissenschaften lasen die nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten (anschliessend an pp. 337—343 des XVII. Bandes dieser Berichte).

Sitzung den 22. Januar 1900.

1. Ludwig Méhely (c. M.) hält seinen Antrittsvortrag unter dem Titel: „*Die Monographie der Fledermäuse Ungarns*". Vortragender hat auf Grund der vaterländischen Sammlungen die Fledermausfauna Ungarns festgestellt und nachgewiesen, dass von den bis jetzt durch die Autoren für Ungarn aufgeführten 31 Arten und Spielarten in Ungarn wirklich nur 20 Arten leben. Nach einer kritischen Würdigung der vaterländischen chiropterologischen Arbeiten fasst er die wissenschaftlichen Resultate seiner Monographie zusammen und bittet die Akademie sein mit 22 Tafeln und Originalzeichnungen illustriertes Werk herauszugeben.
2. Béla Lengyel (o. M.) führt die für die Pariser Weltausstellung bestimmten chemischen Präparate vor.
3. Andreas Högyes (o. M.) führt unter dem Titel: „*Zehnjährige Erfahrungen vom Budapester Pasteur-Institut*" seine Erfahrungen in Betreff der Verbreitung der Rabies und des Ergebnisses der antirabischen Schutzimpfungen in Ungarn vor. Aus dem reichhaltigen Datenmaterial geht hervor, dass die Rabiesansteckung an Menschen und Thieren in Ungarn von Jahr zu Jahr in grossem Maassstabe zunimmt. Die Analyse der statistischen Daten ergiebt, dass durch die antirabische Schutzimpfung in Ungarn die Verhältnisszahl der Todesfälle bei den von wüthenden Thieren Gebissenen von 13,91 % auf 0,41 % herabfiel, die Heilungsproportion sich jedoch von 86,09 % auf 99,59 % erhöhte.
4. Josef Kürschák (c. M.) bespricht den „*Rang der Determinante der inducierten linearen Substitutionen*" (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 229—230).
5. Baron Roland Eötvös legt die Arbeit von Karl Tangl vor: „*Wirkung der Magnetisierung auf den Dehnungsmodul*" (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 7—51).
6. Derselbe legt die Schrift von Géza Molnár: „*Die ungarische Skala in*

akustischer Beleuchtung" vor, in welcher die ungarische Skala in folgender Weise festgestellt wird: c, d, es, fis, g, as, h, c. Diese Skala wird auf Grund der akustischen Gesetze und der Musiktheorie gegen den Vorwurf des Barbarismus vertheidigt, indem nachgewiesen wird, dass sie diesen Gesetzen in demselben Maasse entspricht, wie jede andere Molskala.

7. Andreas Högyes (o. M.) legt die Arbeit von Franz Tangl: „*Untersuchungen aus der Physiologie des Energieumsatzes*" vor, in welcher er die Energiemenge, die einige Vögel zur Erhaltung ihres Lebens benöthigen, ermittelt.

Sitzung den 19. Februar 1900.

1. Géza Horváth (o. M.) und Alexander Mocsáry (c. M.) führen „*Die Troidessammlung des Ungarischen Nationalmuseums und den Königin Elisabeth-Schmetterling*" vor. Die Troidenschmetterlinge sind Bewohner der Tropen und zwar hauptsächlich der zwischen Asien und Australien gelegenen Inseln. Die Troidessammlung des Ungarischen Nationalmuseums, aus welcher er die prachtvollsten Exemplare zeigt, gehört zu den reichhaltigsten in ganz Europa, denn sie besitzt von den bisher bekannten 30 Troidesarten 25, unter welchen sich einige sehr seltene, sogar einige Unica, befinden. Das prachtvollste und werthvollste Stück ist der schöne, in goldiggrünen und goldgelben Farben prangende Falter, den Ludwig Biró in Neuguinea entdeckt hat und welchem Vortragende zum Andenken an unsere unvergessliche Königin den Namen „Königin Elisabeth-Falter" (Troides Elisabetha Regina) gaben, welchen einzig allein nur das Ungarische Nationalmuseum besitzt.
2. Alexander Schmidt (c. M.) spricht „*Ueber die Klassen der Kristalle*". Er zeigt, dass die Regelmässigkeit der symmetrischen Kristalle in einem einzigen Satze wurzle und dass zusammen 32 voneinander in der Symmetrie verschiedene Kristallklassen möglich sind.
3. Rudolph v. Kövesligethy (c. M.) trägt unter dem Titel: „*Die physikalische Deutung der Sterngrösse*" vor. (S. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 145—154.)

Sitzung den 19. März 1900.

1. Béla Lengyel (o. M.) trägt: „*Über das radioactive Baryum*" vor. Es ist dem Vortragenden gelungen, das Baryum radioactiv zu machen und so ist die Existenz des durch das Ehepaar Curie als *Radium* bezeichneten neuen Elementes zweifelhaft geworden. Diese interessanten Versuche sind noch im Gange.
2. Gustav Rados (c. M.): „*Beitrag zur Theorie der orthogonalen Substitutionen*" (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 231—235).
3. Joseph Fodor (o. M.) legt eine Arbeit von Ernest Schiff vor: „*Neue Daten zur Haematologie der Neugeborenen*", in welcher über die langjährigen Studien des Verfassers Rechenschaft gegeben wird, welche über das

specifische Gewicht der Neugeborenen unter der Einwirkung verschiedener Umstände unternommen wurden. Unter anderem hält er es für wahrscheinlich, dass die Nationalität auf die Zusammensetzung des Blutes Einfluss hat.

4. Alexander Mocsáry (c. M.) legt eine Arbeit von Koloman Kertész vor: „*Aus der Fliegenfauna von Neuguinea*", in welcher das Genus Automyda behandelt wird. Von den untersuchten 44 Arten waren bis jetzt nur zwei bekannt, daher sind also 42 als für die Wissenschaft neu zu betrachten; diese Fliegen hat ein Ungar, Ludwig Biro gesammelt.

Sitzung den 23. April 1900.

1. Ernest Jendrássik (c. M.) hält seine Antrittsvorlesung unter dem Titel: „*Klinische und physiologische Studien über das Gehen*", in welcher er die Resultate der mit Hülfe der *Photographie* an zahlreichen gesunden und kranken Individuen in Bezug auf die Bewegung der Körpertheile ausgeführten Untersuchungen vorlegt.
2. Béla v. Tötössy (c. M.) hält seine Antrittsvorlesung: „*Ueber die Verallgemeinerung von elementaren geometrischen Verwandtschaften*". Diese führt zunächst auf eine Verwandtschaft, welche dadurch charakterisiert wird, dass entsprechende Punkte in gleichen Entfernungen zu beiden Seiten der Axe derart liegen, dass die Entfernungen immer auf Graden durch einen im Endlichen gelegenen Punkt — den Ordnungspol — gemessen werden. Ferner führt die Verallgemeinerung zu einer Verwandtschaft, in der jedes entsprechende Punktpaar die beiden Axen der Verwandtschaft auf Strahlen durch einen festen im Endlichen gelegenen Punkt harmonisch trennt.
3. Andreas Högyes (o. M.) legt die Arbeit von Aladár Aujeszky vor: „*Ueber die antifebrische und antibakterische Wirkung des natrium lygocinatum*", nach welcher sich die Hoffnungen auf dieses Präparat als trügerisch erweisen.
4. Gustav Rados (c. M.) legt eine Arbeit von Michael Bauer vor: „*Zur Theorie der Gruppen, deren Ordnungszahl eine Primzahlpotenz ist*". Es werden einige auf die Structur dieser Gruppen bezügliche neue Sätze entwickelt.

Sitzung den 21. Mai 1900.

1. Eugen v. Daday (c. M.): „*Ueber die in den mikroskopischen Krebsen schmarotzenden Bandwurmlarven*". Vortragender bespricht die sogenannten Cercocystis Bandwurmlarven, von denen er 222 Exemplare fand, weist das Verhältniss der in den Wasservögeln schmarotzenden Bandwurmarten zu den mikroskopischen Krebsen nach. Die Wasservögel inficieren die kleinen Krebslein und diese wiederum die Wasservögel. Zur Zeit kennen wir 21 solche Krebslein, in denen sich die Cercocystislarven von 27 Bandwurmarten vorfinden. Derart behaftete mikroskopische Krebse

finden sich in den stehenden Wässern von Bugacz, Fölegyházá Vadkert und Kisujszallás; sicher schmarotzen in den dortigen Enten und Gänsen die entsprechenden Bandwurmlarven.

2. Baron R. v. Eötvös (o. M.) legt eine Arbeit von Karl Tangl vor: „*Untersuchungen über die mechanischen Wirkungen der Magnetisierung*“ (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 35—51).
3. Alois Schuller (o. M.) legt eine Arbeit von Hermann Strauss vor: „*Ueber die Klassification dioptrischer Systeme*“ (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 308—340).
4. Anton Koch (o. M.) legt die Arbeit von Emerich v. Lörenthey vor: „*Einige neue Exemplare der tertiärzeitlichen Krebsfauna Ungarns*“. Er hat mehrere Genera und Species dieser Krebse entdeckt und zwei derselben zu Ehren der Schöpfer des neuen Palastes der Königl. Ung. geologischen Anstalt: Dr. Ignatz Darányi und Andreas Semsey: Daranyia granulata und Andorina elegans benannt. Das erstere stammt aus dem oberen eozen-zeitlichen Nummulitkalk des Ofener Kleinen Schwabenberges, das zweite aus dem oberen mediterränen Kalkstein, der bei einer Kanalgrabung in der Budapester Telepigasse blossgelegt wurde. Wir kennen von keiner der beiden Arten weder lebendige noch ausgestorbene Verwandte; sie gehören beide zur Gruppe der kurzschwänzigen Krebse (Brachyuren).
5. Alexander Schmidt (c. M.) spricht unter dem Titel: „*Mineralogische Berichte*“ über die gelegentlich der Blocksbergsprengung blossgelegten Schichten und die darin enthaltenen, bis jetzt aus dieser Gegend unbekannten Mineralien. So fand er z. B. hier zuerst das Fluorit, welches in den Ofener Bergen bis jetzt nur am Kleinen Schwabenberg durch Wartha im Jahre 1884 gefunden wurde.

Sitzung den 18. Juni 1900.

1. Paul Stäckel (a. w. M.): „*Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie durch Johann Bolyai*“ (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVII, pp. 1—19).
2. Alois Schuller (o. M.): „*Sekundäre Kathodenstrahlen*“ (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVII, pp. 281—292).
3. August Franzenau (o. M.): „*Ueber das Brockenkiller Azurit*“. Besprechung des Vorkommens und der Kristallformationen dieses Minerals.
4. Isidor Fröhlich (o. M.) legt die Arbeit von Moritz Hoor vor: „*Neuere Daten zur Physik der dielektrischen Körper*“.
5. Joseph Krenner (o. M.) legt die Arbeit von Gustav Melczer vor: „*Minerale von der Insel Ceylon*“, in welcher die kristallographischen und die optischen Eigenschaften der Chrysoberylle von Ceylon, Brasilien und Takovaja (Uralgebirge), die Bestimmung des Brechungscoëfficienten des Ceyloner Sillimanits und Spinells vorgetragen werden.

Sitzung den 22. October 1900.

1. Rudolph v. Kövesligethy (c. M.): „*Der Entwickelungsgang der Himmelskörper und das Alter der Erde*". Ziel der Untersuchungen ist die Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Fixsterne; ist es möglich, diesen für die Sonne anzugeben, so ist damit auch das Alter der Erde bekannt, indem dieses unabhängig von geologischer Grundlage durch jene Zeit gegeben ist, in welcher die Masse der Sonne bis zur Erdbahn reicht. Aus vorläufigen, später durch genauere Daten zu ergänzenden Untersuchungen ergiebt sich als untere Grenze für dieses Alter 4,3 Millionen Jahre. Das wichtigste Resultat dieser Untersuchungen ist der Nachweis und die Charakterisierung intensiver Strömungen im Innern der Sonne, welche aufs engste mit der Activität derselben in Flecken-, Fackeln- und Protuberanzenbildungen verknüpft sind.
2. Karl Laufenauer (c. M.) legt eine Arbeit von Friedrich Reuss vor: „*Das Centralnervensystem des spalax typus*". Dieses in Südungarn heimische Nagethier, lebt dem Maulwurf ähnlich in unterirdischen Gängen; während jedoch der Maulwurf seine Augen gebrauchen kann, ist er gänzlich blind und dementsprechend sind bei ihm nicht nur die unter der Haut verborgenen Augen, sondern auch die mit dem Sehnerven verbundenen Gehirnpartieen stark verkümmert.
3. Alexander v. Mágócsy-Dietz (c. M.) legt eine Arbeit Johann Tuzson's vor: „*Der Tarnóczer versteinerte Baumstamm*". Diesen Baum hat Franz Kubinyi im Jahre 1837 bei Tarnócz (Nógrader Comitat) entdeckt und mit Johann Szabó beschrieben. Moriz Staub und Dr. Johann Felix trachteten seinen Speciescharakter zu bestimmen, letzterer hat ihn dem fossilen Genus Phityoxylon Kr. zugezählt. Nach Tuzson ist dieser, durch seine Masse grosses Aufsehen erregende Stamm kein fossiler, solche Bäume können nur auf Grund der Anatomie der jetztzeitlichen Bäume bestimmt und ihrem System eingefügt werden. Nach ausführlicher Beschreibung des Fundortes, den Tuzson als den ursprünglichen Entstehungsort ansieht, giebt er eine präcise anatomische Beschreibung des Stammes und schliesst daraus, dass zu seinen Lebzeiten in der Gegend die Jahreszeiten ähnlich wie heute wechselten. Nach den anatomischen Zeichen ist der Baum den Pinusarten zuzuzählen und zwar unter dem Namen: Pinus Tarnóczensis.

Sitzung den 19. November 1900.

1. Julius König (o. M.) theilt unter dem Titel: „*Ueber ein Grundproblem der Theorie der algebraischen Grössen*" einige neue Definitionen und Sätze seines neuen Buches über algebraische Grössen mit.
2. Eugen Daday (c. M.) legt eine Arbeit Zoltán Szilády's vor: „*Die Crustaceen des Retyezát*" (s. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 71—97).

3. Karl Laufenauer (c. M.) legt eine Arbeit Paul Ranschburg's vor: „*Mnemometerapparat zur Untersuchung der Gedächtnisskraft*", in welcher ein nach den Plänen des Verfassers durch den Präcisionsmechaniker des Leipziger Wundt'schen Laboratoriums: E. Zimmermann ausgeführter neuer Apparat vorgeführt wird. Dieser Mnemometer stellt mit mathematischer Genauigkeit die physikalischen Verhältnisse fest, unter denen der zu weckende Reiz auftritt, ferner die Zahl der geweckten Reize, und die Zeitdauer, die das Individuum benöthigt, damit ihm z. B. ein vorhin gemerktes Wort im Moment, wo er sich dessen erinnern will, „einfalle". Verfasser theilt weiterhin seine mit dem Apparat an Kindern, Erwachsenen, Kranken und Gesunden ausgeführten Versuche mit, nach welchen die Abnahme des Gedächtnisses in erster Reihe am Wortgedächtniss zu merken ist. Z. B. merken sich in derselben Zeit von 15 Worten: Schulkinder: 9, ungebildete Erwachsene: 8,5, Gebildete: 10, Nervenschwache: 5,5, Paralytiker: 1.

Sitzung den 17. Dezember 1900.

1. Ludwig Winkler (c. M.) hält seine Antrittsvorlesung unter dem Titel: „*Die Löslichkeit der Gase in Wasser*". Vortragender hat ein Verfahren bezüglich der Absorption des Oxygens im Wasser festgestellt, nach welchem die Resultate sich wesentlich von denen Bunsen's unterscheiden. Er wandte danach seine Methode auch auf andere Gase: so auf Hydrogen, Luft, Nitrogenoxyd, Kohlenstoffoxyd, Methan und Ethan an und fand auch bei diesen von Bunsen's Experimenten abweichende Resultate. Seine Versuche haben infolge der grossen Verhältnisse der Agentien sehr verlässliche Daten ergeben.
2. Julius Farkas (c. M.): „*Allgemeine mechanische Principien*".
3. Ludwig Méhely (c. M.): „*Ueber einige Cardinalsätze der Zoologie*". Es werden die schädelanatomischen Verhältnisse der durch L. Biró eingesandten Frösche, welche noch nie bei Wirbelthieren gesehen wurden, besprochen, ferner unter ihnen Froscharten bekannt gemacht, die sich von den andern ganz verschieden entwickeln, indem sie ihre sehr grossen Eier nicht ins Wasser legen und die junge Brut ganz fertig aus dem Ei hervorkriechen lassen. Eine dieser Arten hat Vortragender zu Ehren ihres Entdeckers Ephenophryne Biróí benannt. Wir haben bei ihnen mit der ursprünglichen Entwickelungsart der Frösche zu thun.
4. Eugen Daday (c. M.) bespricht unter dem Titel: „*Die ungarländischen Eylaisarten*" die unsere Wasser bevölkernden Milben. Von dem Genus Eylais waren bis jetzt nur zwei vaterländische Arten bekannt; der Vortragende fand dagegen deren 16, unter welchen 5 ganz unbekannt, 11 auch in andern Ländern Europas verzeichnet sind. Math. u. Naturw. Ber. Bd. XVIII, pp. 341—364.

II. Die Fachsectionen der Königlichen Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft hielten in den Jahren 1899 und 1900 zwanglose Sitzungen, deren Protokolle in folgendem, anschliessend an die diesbezüglichen Berichte pp. 326—344 des XVI. Bandes dieser Berichte mitgetheilt werden.

A) Fachconferenz für Zoologie.

Sitzung den 13. Januar 1899.

1. Stephan Ratz bespricht einige interessante *Helminthiasisarten*, namentlich *Simondsia paradoxa*, *Hystrichis tricolor*, *Guathostomata hispidum*.
2. Eugen Daday zeigt den *Cysticercus* eines in der Wüste Gobi gesammelten untergeordneten Krebschens.

   Eugen Vángel weist darauf hin, dass Broun in seinem „Klassen und Ordnungen" betitelten Werk 22 solche Taeniaarten erwähnt, deren Cysticercus in untergeordneten Krebsen lebt.

Sitzung den 3. Februar 1899.

1. Coloman Kertész legt seine auf Grund des Stoffes des Genuensischen Museums entstandene Arbeit über die *Cleitamiaarten von Neuguinea* vor. Aus diesem Genus waren bisher 5 Arten bekannt, zu denen sich jetzt 3 neue gesellen, nämlich *Cl. similis*, *Cl. Roederi*, *Cl. Gestroi*.

   Derselbe zeigt die aus der Sammlung Ludwig Biró's verarbeiteten Fliegenarten, unter denen sich mehrere neue befinden. Als die interessanteste Art bezeichnet er die *Scenopinus Biróí* genannte neue Art, da die Familie der Scenopiniden von diesem Gebiet bisher unbekannt war. Nicht minder interessant ist die *Asyntona Doleschalli* O. S. genannte Fliegenart, welche Ostensacken, der das Genus und die Art aufstellte, nur auf Grund der Zeichnung Doleschall's beschrieb, infolge dessen sich viele Fehler in die Beschreibung einschlichen. Ludwig Biró sandte aus Amboina mehrere Exemplare dieser Fliege und auf Grund dieses berichtigt und ergänzt Vortragender die Beschreibung der Art.

   Derselbe legt auch eine Arbeit Ludwig Biró's unter dem Titel „Tischgemeinschaft bei den Fliegen" vor, in welcher dieser aus der Biologie des *Omnatius minor* Dol. und der *Desmometopa minutissima* v. d. Wulp. interessante Beiträge mittheilt.
2. Eugen Vángel trägt über die Verlassenschaft Ladislaus Traxler's vor. Er bespricht den Inhalt der zurückgelassenen Manuskripte. Er erwähnt, dass er die Schwammsammlung, 40 Stück, zum Andenken erhielt, während die Muschelsammlung im Besitze des ungarischen Nationalmuseums ist.

3. Géza Horváth liest die neuesten Briefe Ludwig Biró's aus Simbang vor und theilt in Zusammenhang damit einige interessante Beobachtungen des Forschers mit.

Sitzung den 3. März 1899.

1. Eugen Csiki hält „*Ueber zwei ungarische Chrysomelidagattungen*" einen Vortrag und zeigte die ungarischen Vertreter des *Orsodacne* Latr. und *Adoxus* Kirby-Genus. Von der Gattung *Orsodacne* kommen in Ungarn 2 Arten mit je 6 Speciesvariationen vor, die bisher in den meisten Sammlungen verwechselt wurden. Bisher beobachtete er die folgenden Formen: *Orsodacne cérasi* Linn., *v. limbata* Ol., *v. lineola* Lac., *v. melanura* Fabr., *v. Duftschmidi* Wse., *v. cantharoides* Fabr., *v. glabrata* Panz., *v. flava* Csiki (var. a. Weise), *v. nigricollis* Oliv., *v. marginata* Csiki, *v. humeralis* Latr., *v. coerulescens* Duft., *v. croatica* Weise.

Von den Erwähnten ist die *var. marginata* Csiki eine neue Abart, für welche der neben dem Seitensaum und der Naht der Flügeldecken sich hinziehende, breite, bläulich-metallschimmernde Saum charakteristisch ist. Die bisher bekannten Fundorte dieser Abart sind Hermannstadt (Coll. Csiki et Fuss) und das Comitat Szörény (Pável).

Von der Gattung *Adoxus* Kirby kommen in Ungarn ausser dem *A. obscurus L.* und *var. villosulus* Schrnk. noch zwei Abarten vor, nämlich die *var. epilobii* Weise und *var. Weisei* Heyd. Vortragender bemerkt, dass Weise neuestens nachwies, dass statt dem *A. vitis* Fabr. der Name *villosulus* Schrnk. zu gebrauchen ist, da der Fabricius'sche Name bisher aus Irrthum gebraucht wurde, und er nichts anderes ist, als das Synonym des Männchens des *Cryptocephalus coryli* Linn.

2. Dr. Géza Horváth bemerkt hierauf, dass jener traubenverheerende Käfer, der bisher allgemein *Eumolpus vitis* genannt wurde, im Sinne des vorher Gesagten in der wissenschaftlichen Literatur von nun an *Adoxus obscurus L. var. villosulus* Schrnk. genannt werden muss. Es wäre jedoch übertrieben, wenn wir diesen Namen auch in die populäre ökonomische und ampelologische Literatur übertragen wollten. Die Gepflogenheit sanctificierte hier schon den Namen *Eumolpus vitis*; es würde daher nur Verwirrung machen, wenn man statt diesem Namen, der unter den Weinbauern schon überall verbreitet und verständlich ist, nun auf einmal einen neuen gebrauchen wollte. In diesem Falle muss das Princip der wissenschaftlichen Priorität den Erfordernissen des praktischen Lebens weichen. So ist es auch in einigen anderen Fällen. So z. B. müsste man die traubenverheerende Filloxera bei strenger Anwendung der wissenschaftlichen Ausdrücke *Phylloxera vitifoliae* Fitch. nennen; und dennoch kommt sie in der Literatur allseits als *Phylloxera vastatrix* Planch. vor. Der älteste wissenschaftliche Name der Blutlaus ist: *Myzoxylus laniger* Hausm.; deshalb wird sie aber in der ökonomischen Literatur doch immer als *Schizoneura lanigera* Hausm. vorkommen.

3. Joseph Jablonowski spricht „*Ueber die Ausrottung des Apfelschaben betreffende einfache Versuche*". Er zählt die alten Schutzmethoden auf und bespricht auch jene, die durch die amerikanischen Obstbauern sich auch in Ungarn sehr verbreitete, nämlich das Bespritzen mit Arsensalzen. Von der Lebensweise des Apfelschaben ausgehend, weist er nach, warum dieses Vorgehen in der Praxis keinen guten Erfolg hat und bezeichnet die zu befolgende richtige Methode. Die Richtigkeit dieses theoretisch abgeleiteten Vorgehens bewies er dann auch durch seine eigenen Versuche. Das Vorgehen besteht darin, dass man einen einfachen Stroh- oder Heustrick an den Stamm des Baumes bindet, in den die Raupe des Apfelschaben sich einnistet und theilweise sich dort einpuppt, theilweise dort überwintert. Die auf diese Weise zusammengelockten Raupen wirft man dann im Winter sammt den Strick in das Feuer.
4. Béla Krécsy zeigt den kleinen, ausgestopften Alligator, den er im vorigen Jahr der Fachconferenz lebendig gezeigt hat.

Sitzung den 7. April 1899.

1. Adolf Lendl betrachtet in seinem „*Ueber die Verwandtschaft der langbeinigen Spinne*" betitelten Vortrag die Skorpionform für einen Urtypus der Arachnoideen, aus dessen Entartung und Weiterentwicklung die *Telyphonus-* und *Phrynusformen* hervorgingen. Zu den letzteren gesellen sich später einerseits die langbeinigen Spinnen, andererseits die Vogelspinne und die eigentlichen Spinnen. Die Pseudoskorpionen sind nach der Meinung des Vortragenden in naher Verwandtschaft mit den Telyphoniden, so sehr, dass man sie einfach Microtelyphonus nennen könnte. Die *Galcodeniden* können aber überhaupt aus keiner der hier angeführten Arachnoideengruppen abgeleitet werden, doch haben sie sich, da übrigens ihr Arachnoideentypus unverkennbar ist, der Meinung des Vortragenden nach in einer anderen Reihe entwickelt und stehen nun isoliert im weiten Kreise der Arachnoideen. Die Urform der Arachnoideen, der Skorpion, kann auf ausgestorbene, versteinerte Formen zurückgeleitet werden, welche unter dem Namen *Palaeostraca* zusammengefasst werden.

Vortragender begründet und erklärt diese Ansichten durch das Vergleichen von Typen aus den einzelnen Gattungen und unterwirft hauptsächlich die Körperschnitte und Extremitäten einer eingehenden Untersuchung.

Sitzung den 12. Mai 1899.

1. Ernst Csiki hält einen Vortrag „*Ueber Ungarns Donaciinen*", indem er diese charakterisiert und auch einen historischen Rückblick giebt. Dann geht er auf die einzelnen Arten über und erwähnt, dass in Ungarn 3 Gattungen mit 26 Arten und 9 Abarten vorkommen. Die *Donacia fennica* Payk. muss aus unserer Fauna gestrichen werden, da dieses nördliche Thier bei uns nicht vorkommt und dasjenige, welches man bisher

dafür gehalten, nichts anderes ist, als die *Donacia Malinovskyi* Ahr. var. *arundinis* Ahr. Neue Formen sind in unserer Fauna: *Donacia simplex F. var. pulcherrima* Hummel und *Plateumaris scoicea L. var. micans* Pasz., die erste aus Zala-Tapolcza (Redl), letztere aus Hermannstadt (Csiki, Fuss) und aus dem Banat (Fuss).

2. Eugen Daday schildert die Entwicklung der Bandwürmer und charakterisiert dann den *Cysticercus* und die *Cercocystis*. Er zeigt und beschreibt die in dem mongolischen *Diaptomus asiaticus* Ulj. und den ungarischen *Diaptomus spinosus* Dad. und den *Paracondona Hungarica* Dad. Arten vorkommenden Cercocysten, von denen er 5 neue unter den folgenden Namen vorweist: *Taenia* Zichyi, *Echinocotyle* Linstowi, *Echinocotyle polyacantha*, *Drepanidotaenia* Rátzi und *Drepanidotaenia mesacantha*.

Sitzung den 13. October 1899.

1. Vorsitzender giebt in warmen Worten der Trauer über das Ableben Victor v. Mihalkovics' Ausdruck.
2. Géza Entz bespricht Ernst Haeckel's „Kunstformen der Natur" betiteltes Werk und macht hierzu verschiedene Bemerkungen. Er überblickt alle jene Wirkungen, welche bei Thieren die verschiedenartigen Schönheiten der Form, der Farbe etc. hervorbringen. Er bespricht auch die Darwin'sche Selectionstheorie und den sexualen Dimorphismus, deren Bedeutung er auf ein Minimum reduciert.
3. Ludwig Aigner legt sein Werk „*Die Geschichte der Schmetterlingskunde in Ungarn*" vor.
4. Derselbe spricht „*Ueber die letzte Stunde der Raupen*" und erwähnt seine Beobachtung, dass die Raupen der *Macroglossa* vor der Einpuppung sich mit einer zu unbestimmbarem Zweck dienenden Flüssigkeit einschmierten.
5. Eugen Daday zeigt ein Exemplar der *Cucullia fraudatrix* Evers., das er in den ersten Tagen des August 1899 zu Semesnye, im Comitat Szolnok-Doboka sammelte. Diese Schmetterlingsart erwähnte in der ungarischen Fauna zuerst Emerich Frivaldszky, sie stammt aus der Gegend von Futak, aus Beél im Comitat Bihar und aus Nagyág in Siebenbürgen. Das Semesnyeer Exemplar ist im ungarischen Nationalmuseum das erste aus Ungarn.

Sitzung den 3. November 1899.

1. Julius Madarász legt das erste Heft seines „*Ungarns Vögel*" betitelten Werkes vor und erwähnt einige interessante Angaben aus der Avifauna Ungarns.
2. Zoltán Szilády spricht über „*Die Crustaceen der Retyezáter Seen*". Als interessantere erwähnt er: *Diaptomus Tatricus*, *Alona intermedia*, *Branchipus diaphanus* und *Daphnia alpina* Dad.; er entdeckte auch das bisher unbekannte Männchen der letzteren. Auf die Schilderung der Lebensverhältnisse übergehend, weist er nach, dass sich die Fauna der Qualität

der Seen gemäss vertheilt und dass man vom Standpunkte des Bodens, der Beständigkeit und des geographischen Ursprunges am Retyezát vier Seeentypen unterscheiden kann, welche auch jede ihre eigenen Crustaceenarten haben. Es ist interessant, dass in diesen Seen nicht specielle alpine, sondern sich leicht acclimatisierende gewöhnliche Arten vorkommen.

Sitzung den 3. December 1899.

1. Ludwig Aigner liest die „Schmetterlingsbeobachtungen" Stephan Nécsey's vor.
2. Alexander Gorka hält unter dem Titel „*Beiträge zur morphologischen und physiologischen Kenntniss der Darmröhre der Coleopteren*" einen Vortrag, worin er nach Mittheilung der Geschichte dieses Gegenstandes und der Untersuchungsmethoden über seine eigenen, im zoologischen Institut der Budapester Universität gemachten Untersuchungen berichtet. Seine Ergebnisse fasst er in den folgenden Sätzen zusammen:
   1. Vom anatomischen Standpunkt ist die Darmröhre der Käfer nach drei, resp. vier Typen beschaffen, und zwar nach: a) sarcophagem, b) necrophagem, c) phytophagem und d) coprophagem Typus. Für die Speiseröhre der Sarcophage ist das gleichzeitige Vorhandensein des Kropfes und des Proventriculus und die Kurzheit des Mitteldarms charakteristisch. Die Merkmale der Darmröhre der Necrophagen sind: das Vorhandensein des Proventriculus, die Kurzheit des Mitteldarms und die auffällige Länge des Darmendes. Der Kropf (ingluvies) fehlt immer. An der Speiseröhre der Phytophagen ist der Proventriculus nie entwickelt, während die mittlere Speiseröhre stark entwickelt ist. Die Verdauungsorgane der Coprophagen endlich sind nach dem Typus der Phytophagen nnd Necrophagen entwickelt, je nachdem sie betreffs der Nahrung dem Einen oder dem Anderen näher stehen; selbstständige Kennzeichen besitzen sie also nicht.
   2. Vom histologischen Standpunkt: a) Die Wand der Darmröhre besteht aus vier Schichten, nämlich: aus der Muskelschichte, dem Grundepithel, der Epithelschichte und der Chitinschichte. b) Die Peritonialschichte fehlt. Statt dem umgeben lockere Bindegewebsfasern die Darmröhre. c) Die Chitinschichte ist in der ganzen Darmröhre vorhanden; also auch im Mitteldarm, doch hat sie hier eine poröse Structur. d) Die mit dem Mitteldarm verbundenen drüsenartigen Gebilde sind nicht bloss Drüsen, sondern auch epithelregenerierende Organe. e) Die im Mitteldarm sich befindenden Epithelschichten sind gegen das Lumen zu mit einem aus Stäbchen bestehenden Band versehen, der aus Chitin ist.
   3. Vom physiologischen Standpunkt: a) Die Aufsaugung geht an den Necrophoren wahrscheinlich im letzten Drittel des Mitteldarms und im oberen Viertel der Enddarmröhre vor sich. b) Die Malpighischen Gefässe enthalten ausser der Harnsäure bei den Carabus und Necro-

phoren auch Albumine. c) Der Inhalt der Malpighischen Gefässe ist von alkalischer, oder selten von neutraler Reactionswirkung, doch giebt sie nie eine säuerige Reaction.

3. Dr. Coloman Kertész zeigt ein Exemplar der *Aulacocephala* Brauer genannten Neuguineanischen Fliegenart, das in dem von Loria gesammelten und vom genuesischen Museum zur Bestimmung ihm gesandten Stoff vorhanden war. Aus dem Aulacocephala-Genus waren bisher zwei Arten bekannt, welche die Zoologen in die Familie der Oestriden einreihten und auch Brauer in seiner bekannten Monographie über die Oestriden im Rahmen dieser Familie beschrieb. Vortragender bemerkt ferner, dass aus der australischen Region bisher kein einziger Repräsentant dieser Familie bekannt war und die Meinung allgemein ist, dass die Familie der Oestriden in dieser Region gar nicht vorkommt. Diese Ansicht wird auch durch die Thatsache bekräftigt, dass man den neuen Repräsentanten des genannten Genus aus verschiedenen morphologischen Gründen in die Familie der Oestriden gar nicht einreiht, sondern in die durch Brauer-Bergenstamm aufgestellte *Trixa*gruppe der Muscaria schizometopa.

Er zeigt noch aus der neuesten Sendung Ludwig Biró's die *Phytalmia cervicornis*- und *alcicornis*arten, einen Repräsentanten des *Achias*genus, die *Diopsis*- und *Merodon*arten und damit in Verbindung die *Tuxaphora furcifera*- und *Bolbamyia inequipes*arten aus Bolivien, die durch ihre sonderbare Form, ihre wunderlichen Auswüchse sämmtlich zu den auffallenden Fliegen gehören.

4. Géza Horváth zeigt die farbige Zeichnung eines Hermaphroditen der *Lycaena Bellargus*. Diesen interessanten Schmetterling fand Coloman Jámbory am Ofener Adlersberg am 30. Juni 1899.

Cornelius Chyzer bemerkt, dass er einen Hermaphroditen der *Xysticus*-spinne besitzt; Spinnenhermaphroditen sind bisher nur 3 bekannt.

Nach der Kenntniss Coloman Kertész' fand man bisher unter den Fliegen bloss 3 Hermaphroditen.

B) Fachconferenz für Botanik.

Sitzung den 11. Januar 1899.

1. Alexander Mágócsy-Dietz legt Ladislaus Hollós' „*Schuppen aus dem Kaukasus*" betitelte Arbeit vor. Hollós war Mitglied der Décsy'schen VI. Kaukasusexpedition, es bewog ihn hauptsächlich sein reges Interesse für Pilze zur Theilnahme an dieser Expedition. Während seines Aufenthaltes im Kaukasus sammelte er sehr viel Pflanzen, besonders eine Menge von Pilzen, darunter die *Bovista Debreczeniensis*.
2. Moritz Staub hält „*Ueber die in einem Jahr zwei- oder dreimal blühenden Pflanzen*" einen Vortrag. Er macht schon seit mehr als 30 Jahren Beobachtungen und Aufzeichnungen über diesen Gegenstand. Auf Grund der

vorgelegten Angaben erklärt er die Thatsache, dass das zweite Blühen der Pflanzen keine unregelmässige, sondern eine natürliche Erscheinung ist, welche rein nur darin begründet ist, dass die Pflanzen sich den biologischen Verhältnissen anpassen, welche Eigenschaft wir unter den Pflanzenüberresten der Kretazeit reichlich vorfinden. In jenem Zeitalter der Erde nämlich, aus dem die Kretagebilde stammen, herrschte auf der ganzen Erde das tropische Klima und in jener Zeit blühten die in ihrem Typus seither verhältnissmässig wenig veränderten Dicotyledonen, ähnlich den heutigen tropischen Pflanzen, in der That zweimal. So ist das zweite Blühen der Pflanzen eine ihrer ursprünglichen Eigenschaften, welche die von den tropischen Gegenden in das gemässigte Klima gebrachten Pflanzen mehr oder weniger beibehielten, und welche sich dann äussert, wenn es die wechselnden Umstände der Witterung zugeben. Das diesbezügliche Verhalten einiger Pflanzen ist besonders auffallend, da auch das Abweichen von der normalen Jahrestemperatur in geringerem Maasse sie zur zweiten Blüthe bringt, ja sogar manche in regelmässigen Zeiträumen ihre zweiten Blüthen oder auch Früchte treiben.

Carl Schilberszky, der mit den Ursachen dieser Frage schon seit langer Zeit beschäftigt ist, empfiehlt besonders den wilden Kastanienbaum zum Gegenstande eines Studiums. Es kam wiederholt vor, dass in Budapest der wilde Kastanienbaum an trockenen, heissen Sommern im Juli und August sein Laub verlor und kurze Zeit darauf im September oder October voll Blüthen stand. Eine interessante Reihe des Grades der diesbezüglichen Empfindsamkeit verrathen auch die in einer Reihe stehenden Bäume während mehrerer Jahre. Die Feuchtigkeit des Bodens und der Luft behindert das zweite Blühen. Häufig kann man hingegen das zweite Blühen zwischen den strahlenden Mauern der Häuser oder am Rande offener Strassen beobachten, wo sie beständig der Sonnenwärme ausgesetzt sind.

3. Aladár Richter berichtet über die botanischen Ergebnisse der neuesten asiatischen Reise des Grafen Eugen Zichy. Durch diese Reise wurde das ungarische Nationalmuseum durch 75 schön präparierte Pflanzen bereichert.

An das *Delphinium Consolida* der ungarischen Flora erinnert z. B. das *Delphinium laxiflorum*; an das *Aconitum Anthra* das *Aconitum barbatum*, während die *Gentiana cruciata* dort durch die *Gentiana macrophylla* Gmel. ersetzt wird. In der Zichy'schen Sammlung sehen wir *Dianthus plumarius, Gnaphalium dioicum, Rosa cinnamomea, Adeuophora liliifolia* Ledeb. forma nova; *dasycarpa* (calyce I hispido), *Vaccinium Vitis Idaea* und *Gentiana adscendens* Gmel.

Am auffallendsten war unter ihnen das in grosser Zahl gesammelte *Gnaphalium Leontopodium* (*Leontopodium alpinum* Cass.), von dem bisher geglaubt wurde, dass seine Heimat in den mitteleuropäischen Alpen ist. Die in Ledebour's Flora Rossica aufgezählte grosse Zahl („Habitat in

omni Sibiria altaica") und die vielen aus Burgaltai (Mongolien) mitgebrachten Exemplare der Zichy-Expedition lässt jedoch den Schluss ziehen, dass der eigentliche geographische Mittelpunkt der Verbreitung des *Leontopodium alpinum* die altaische Gegend Sibiriens ist.

Sitzung den 8. Februar 1899.

Den Gegenstand der Sitzung bildet das Andenken Friedrich v. Hazslinszky's, dessen Alexander Mágócsy-Dietz in warmen Worten gedachte.

Sitzung den 8. März 1899.

1. Eugen Bernátsky besprach H. Bruchmann's „*Ueber die Prothallien und Keimpflanzen mehrerer europäischer Lycopodien*" betiteltes Werk, worin der Verfasser die Prothallienverhältnisse des Lycopodium clavatum, annotinum, complanatum und selago näher beleuchtet. Vortragender erwähnt dass auch er eines der Prothallien vor einigen Jahren in der Hohen Tátra vorfand.
2. Carl Schilberszky legt eine Abhandlung Martin Pétehfi's unter dem Titel „*Ein neues vaterländisches Astomum*" vor.
3. Ludwig Thaisz legt Johannes Wagner's „*Neuere Beiträge zur ungarischen Flora*" betitelte Arbeit vor, in welcher der Verfasser die Kenntniss der ungarischen Flora um einige interessante Beiträge bereichert.
4. Ludwig Thaisz spricht „*Ueber die anatomische Untersuchung der Kerne und über die verschiedenen Präparierungsmethoden*".
5. Alexander Mágócsy-Dietz legt das folgenderweise betitelte Heft vor: „*Index florae Szamosujvariensis*", ediderunt: Simeon Kovrig et Josephus Ornstein. 1899.

Sitzung den 12. April 1899.

1. Eugen Bernátsky spricht unter dem Titel „*Crocus reticulatus in der ungarischen Tiefebene*" über die Acclimatisation dieser Safranart im lockeren Boden der Tiefebene und über die dadurch erlittene morphologische Entartung. Ausserdem erwähnt er, dass er unlängst in der Nähe des Budapester Franzstädter Bahnhofes ein Exemplar der *Fussilago farfara* fand, obgleich diese Pflanze gewöhnlich nur in nassem, lehmigem Boden gedeiht. Moritz Staub fand das erwähnte Vorkommen der Pflanze auf Grund der wechselnden geologischen Verhältnisse des Bodens gerechtfertigt.
2. Alexander Mágócsy-Dietz legt der Fachconferenz eine Arbeit von Ladislaus Hollós über *Morchella tremelloides* (Vent.) vor. Der fruchttragende Theil der im sandigen Boden des Kecskeméter Szt.-Lörincz- und Nyirwaldes wachsenden Spitzmorchel ist kugelartig, gräulichweiss und an den Rändern durchschimmernd und gebrechlich. Ihre Windungen sind dicht und zerzaust, verbreiten sich über den ganzen fruchttragenden Körper und geben dem Hut eine erdbeerartige Oberfläche. Dem Verfasser

fiel es auf, dass die fruchttragende Schichte oft gänzlich fehlt, während Sporen nur im oberen Viertel des Schlauches zu finden sind. Durch eingehende Studien gelang er zur Voraussetzung, dass in diesem Fall ein Parasit den Körper des Pilzes verstellt und zur irrigen Unterscheidung neuer Arten (Morchella crispa) Gelegenheit giebt. Ueber die Natur des Parasiten kann er vor der Hand keinen Aufschluss geben, doch vermuthet er, dass hier der Hypomyces cervinus, H. hyalopus und vielleicht auch der H. epicoccum die Morchella esculenta verstellen, was zur Unterscheidung der Morchella tremellosa und M. tremelloides Anlass gab.

3. Carl Schilberszky legt Martin Péterfi's „*Einige Beiträge zur laubigen Moosflora Ungarns*" betitelte Abhandlung vor. Péterfi hatte die Gelegenheit, während der Revision der reichen Barth'schen Sammlung einige theilweise für Siebenbürgen, theilweise für ganz Ungarn neue laubige Moose kennen zu lernen und gehörig — abweichend vom Sammler — zu determinieren.
4. Ludwig Thaisz hält „*Ueber die auf die mikroskopische Untersuchung der Kerne bezüglichen Präparierungsmethoden*" einen Vortrag. Während der Untersuchung der Kerne ergab sich, dass ausschliesslich Kernquerschnitte keinen ausreichenden Grund zur Unterscheidung der Arten und Genera geben und deshalb ausserdem das Verfertigen von Oberflächenschnitten üblich wurde. Seit dem ersten diesbezüglichen Versuch Sempelowski's bietet nur das Höhnel'sche Verfahren einen ausreichenden Erfolg. Vortragender modificiert dieses Verfahren auf die Weise, dass er die Kerne erst in Wasser, dann in stärkerer oder schwächerer Kalilauge kocht, ablagern lässt und die Lauge mit Essigsäure neutralisiert und in einer weiteren Eprouvette schüttelt. Von der vernichteten Kernhülle lösen sich auf diese Weise schöne, zusammenhängende Schichten ab. Vortragender geht hierauf auf die diagnostische Wichtigkeit der auf solche Weise gewonnenen Flächenschnitte über, indem er die Früchte der Schirmblüthenpflanzen bespricht.

Sitzung den 10. Mai 1899.

1. Alexander Mágócsy-Dietz legt eine „*Neue Beiträge zur Kenntniss der Pilze Ungarns*" betitelte Abhandlung von Ladislaus Hollós vor.
2. Carl Schilberszky legt Martin Péterfi's „*Beiträge zur Laubmoosflora Ungarns*" betitelte Arbeit vor.
3. Alexander Pollák hält unter dem Titel „*Die Drainierung und die Wurzeln der Bäume*" einen Vortrag.

Sitzung den 17. October 1899.

1. Eugen Bernátsky theilt unter dem Titel „*Ueber die Pflanzen der Nyírség*" seine floristischen und pflanzengeographischen Erfahrungen mit und erklärt das Vorkommen in der Nähe der Sümpfe der Nyírség in den Wäldern von Zsömböly und Nyír-Bátor beobachteten Pflanzen.

2. Carl Schilberszky legt Adolf Fanta's *„Beiträge zur Kenntniss der karpellomanen Mohnköpfe"* betitelte Abhandlung vor und zeigt die unweit Stuhlweissenburg gewachsenen unregelmässigen Mohnköpfe, aus welchen der Verfasser auch reife Kerne sandte, damit sie für wissenschaftliche Zwecke gezüchtet werden.
3. Alexander Mágócsy-Dietz legt eine von Johannes Fábry verfasste Abhandlung unter dem Titel *„Ein anonymer Botaniker"* vor, in welcher dieser viel interessante Daten über das zu Zeiten Michael Szilinczky's herrschende didaktische System mittheilt. Er hebt besonders die in den vierziger Jahren gemachten phenologischen Forschungen Michael Szilinczky's hervor.

Sitzung den 8. November 1899.

1. Präsident Julius Klein theilt der Fachsection mit, dass der Decan der philosophischen Facultät der Universität ihm in einer amtlichen Zuschrift mittheilte, dass die philosophische Facultät mit Dank erfüllt jenen pietätvollen Act zur Kenntniss nahm, dass Alexander Mágócsy-Dietz das aus den Spenden der Fachsection angefertigte Bild des Universitätsprofessors weiland L. Jurányi im Directoratssaale des botanischen Instituts der Universität würdig untergebracht hat, und er aus diesem Anlass der botanischen Fachsection sowie dem Professor A. Mágócsy-Dietz seinen Dank ausspricht.
2. Eugen Bernátsky trägt seine Beobachtungen unter dem Titel *„Die anatomische Bestimmung der heimischen Polygonatumarten"* vor.

   Im Juni 1899 fand Vortragender eine Polygonatumart, die wegen des Mangels an Blüthen, sowie ihres getrockneten Zustandes halber schwer zu bestimmen war. Es war nicht zu ergründen, ob die gefundene Art *P. officinale, P. latifolium* oder *P. multiflorium* sei. Die Ursache äusserte sich theilweise auch in der mangelhaften Diagnose der bestimmenden Bücher; aus diesem Grunde versuchte er die Pflanze anatomisch zu bestimmen.

   Er stellte fest, dass die drei genannten Arten auf Grund der Blattepidermis leicht zu bestimmen sind. Die Epidermiszellen der *P. officinale* sind nahezu so breit, als lang, diejenigen des *P. multiflorium* sind zwei-, dreimal, sogar auch viermal länger, als sie breit sind; die Seitenwände der Epidermiszellen des *P. latifolium* sind winkelig und sehen wie Bruchlinien aus. Die in Frage stehende ist also ein Exemplar des *P. multiflorium*, was umso interessanter ist, als diese Art in der ungarischen Tiefebene sozusagen unbekannt ist.
3. Ferdinand Filarszky spricht über *„Eine interessante Form der Fichte"* und erwähnt einen im Káposztafalva befindlichen Wunderbaum, auf den er während seiner vorjährigen Ausflüge aufmerksam gemacht wurde. Dieser Wunderbaum ist ein selten schöner Fall von Kladomanie oder Blastomanie und hat halb eine normal entwickelte, halb eine gänzlich

abweichende, rein säulenhaft gebildete, dichoptische Form. Es ist das eine seltene Abart der *Picea excelsa* Link, „lusus columnaris Carrière" genannt, die bisher bloss aus der Schweiz bekannt ist, in nicht mehr als sechs Exemplaren.

Vortragender zeigt auch das gelungene Bild und einige getrocknete Aeste des Baumes, welch letztere er dem oberen, kladimoniösen Theil des Baumes entnahm. In Verbindung hiermit berichtet er auch über C. Schröter's „*Vielgestaltigkeit der Fichte*" (Zürich 1898) betiteltes Werk, in welchem der Autor die längst bekannte Variabilität der Fichte systematisch bespricht und die verschiedenen Fichtenformen in drei Gruppen theilt. In der Gruppe der *Lusus* behandelt er auch den *Lusus columnaris*, bei welchem die Illustrationen sehr an das Abbild des Káposztafalvaer Wunderbaumes erinnern.

4. Alexander Mágócsy-Dietz spricht unter dem Titel „*Riesenbovisten*" über die Etymologie der Benennungen *Lycoperdon giganteum* = *Lycoperdon Bovista* = *Globaria Bovista* Quélet und zeigt die dem botanischen Institut der Universität gesandten mächtigen Exemplare, von denen das grösste und schwerste aus Marosnémeti stammt und frisch 9 kg, getrocknet 340 gr wiegt. Die übrigen sind aus Felső-Nyárad und Neusatz.
5. Carl Schilberszky legt eine Mittheilung Ladislaus Bikkal's über die unregelmässige Birnenfrucht vor. Er zeigt die Photographie einer unregelmässigen Birne, aus der ersichtlich ist, dass die Entartung sich aus überzähligen Fruchtblättern und deren unregelmässigen Vertheilung entwickelte.
6. Carl Schilberszky legt Martin Péterfi's „*Bryologische Skizzen aus Siebenbürgen*" betitelte Abhandlung vor.

Sitzung den 13. December 1899.

1. Árpád Kardos bespricht einen interessanten Fall der Verflachung und Verkrümmung der Aeste der *Picea excelsa*.
2. Ludwig Fialowsky legt Béla Kontur's „*Der Ungar und die Botanik*" betitelte Abhandlung vor. Der Verfasser sammelte im Comitat Békés unter dem Volke einige hundert Pflanzennamen. Viele der Benennungen bedeuten heute andere Pflanzen, bei denen Vortragender den Grund oder die Weise der Sinnveränderung zu erklären versucht. Es giebt in dieser Sammlung auch solche Namen, die in der Litteratur bisher unbekannt waren. Der Verfasser citiert ferner diesbezügliche Anfangszeilen von Volksliedern und Gedichten, theilt Orts- und Personennamen mit und erwähnt schliesslich zahlreiche Sprichwörter, welche von der Schärfe der Pflanzenbeobachtung des Volkes Zeugniss geben
3. Carl Schilberszky bespricht unter dem Titel „*Die Moniliakrankheit der Fruchtbäume, vorzüglich des Weichselbaumes*" die parasitische Wirkung des *Monilia fructigena* genannten Pilzes, indem er sich am eingehendsten mit der im Stadium der Blüthe sich offenbarenden Verheerung befasst.

4. Ludwig Thaisz erstattet unter dem Titel „*Floristische Mittheilungen aus dem Comitat Krassó-Szörény*“ über drei neue Pflanzen aus dem genannten Comitat Meldung, und zwar: *Salvia silvestris L.* (S. nemorosa + pratensis), *Salvia dumetorum* Andrz. und *Glyceria plicata*. Gegenüber einer früheren Publication Victor Janka's beweist er, dass die *Trochiscanthes nodiflora* Koch in Ungarn nicht vorkommt.
5. Alexander Mágócsy-Dietz stellt die seitens des botanischen Institutes der Universität auf der Pariser internationalen Ausstellung auszustellenden originalen anatomischen plastischen Pflanzenmuster und pflanzenmorphologischen sowie biologischen Blüthenschnitte zur Schau, die er grösstentheils in dem unter seiner Leitung stehenden Institut nach den Präparaten seines seligen Vorgängers, des Professors Jurányi, anfertigen liess.

C) Fachconferenz für Chemie-Mineralogie.

Sitzung den 31. Januar 1899.

1. Ignaz Pfeifer bespricht unter dem Titel „*Studien über das Reinigen des Kesselwassers*“ die Methoden, mit denen man die Härte des Wassers bis auf den möglichst schwächsten Grad verringern kann.
2. Julius Weszelszky spricht unter dem Titel „*Die titrimetrische Bestimmung der Bromiden neben Chloriden und Jodiden*“ darüber, wie man das in geringer Menge vorkommende Brom neben Chlor und Jod zu Bromat umgestalten und das entstehende Product dazu benützen kann, um mittelst des aus dem Kaliumjodid abgeschiedenen Jodes auf die Menge des Bromes zu schliessen.
3. Sigismund Bernauer berichtet über die Beschlüsse der Commission, welche die Fachconferenz entsandte, um nach dem Durchstudieren der vom königl. ungarischen Minister für Agricultur über die öffentlichen chemischen und mikroskopischen Stationen herausgegebenen Verordnung alle jene Bemerkungen zusammen zu fassen, welche sie dem Minister vorzulegen für geeignet erachtet.

Sitzung den 28. Februar 1899.

1. Ludwig Ilosvay bespricht unter dem Titel „*Ueber ein neueres Reagensmittel des Ozons*“ die Abhandlung G. Ellwein's und Th. Weyl's, derzufolge die Phenylendiamine in laugigem Medium nur auf Einwirkung von Ozon eine gelbe oder gelbliche, in manchem Falle burgunderrothe Farbe annehmen, hingegen solche Farben auf Einwirkung von Hydrogenperoxyd oder salpetrige Säure nie, auf Einwirkung von Oxygen aber nur nach längerer Zeit annehmen. Wenn die Phenylendiamine ihre Farbe in laugigem Medium auch auf Einwirkung von sehr dünnem Ozon ändern würden, wären wir im Besitze eines Reagensmittels, womit wir das Vorhandensein des Ozons in der Luft auch bei Hydrogenperoxyd und salpetriger Säure nachweisen könnten.

Ilosvay's Versuche ergaben, dass, wenn das Ozon in grosser Menge vorhanden, die Untersuchung mit Phenylendiaminen überflüssig ist; wenn aber die Menge des Ozons gering ist, so ist die Untersuchung unsicher.

2. Ludwig Winkler spricht über „*Die Bestimmung der Menge der in natürlichen Wässern gelösten Gase*" und zeigt einen selbsterfundenen Apparat, mittelst welchem man binnen kurzer Zeit, mit weniger Mühe und ohne kostspielige Einrichtungen präcise Erfolge erzielen kann.

Sitzung den 25. April 1899.

1. Ludwig Ilosvay weist in seinem Vortrag über „*Die Darstellung von ammoniahaltiger Cuprolösung mit Hydroxylamin*" nach, dass man aus verschiedenen ammoniahaltigen Cuprisolösungen mit Hydroxylamin schnell eine gänzlich farblose Cuprolösung darstellen kann, welche im Vergleich zum Acetylen sehr empfindlich ist. Mit dem im Leuchtgas vorhandenen Acetylen kann man in einigen Secunden eine schöne Reaction erzielen. Durch das Hydroxylamin kann das Kupfer aus der Cupriverbindung in kurzer Frist in die Cuproform gebracht werden, und umgekehrt kann die Cuprolösung mit Luft geschüttelt wieder zur Cupriverbindung umgestaltet werden.
2. Ludwig Winkler spricht unter dem Titel „*Die Bestimmung des Calciums und Magnesiums in natürlichen Gewässern durch Kaliumoleat*" über sein eigenes Vorgehen, mittelst welchem man die Bestimmung der Härte des Wassers viel präciser und schneller vollziehen kann als bisher.

   Ignatz Pfeifer, Jakob Szilasi und Siegmund Bernauer bezweifeln die Vorzüglichkeit dieser Methode und hauptsächlich Bernauer hält die Wartha'sche Methode für viel präciser und viel rascher.

   Ludwig Ilosvay meint, dass die Anhänglichkeit, welche die Franzosen in ihrer Hydrotimetrie dem ölsäuerigen Kalium, resp. dem Natrium gegenüber beweisen, die Ueberzeugung wachrufen, dass das Winkler'sche Vorgehen nicht gänzlich verworfen werden kann, und stellt diesem eine schöne Zukunft in Aussicht.
3. Die Fachconferenz entsendet in das Internationale Atomgewichtbestimmungscomité unter dem Präsidium Carl v. Than's die Mitglieder Ludwig Ilosvay, Béla v. Lengyel, Julius Tóth und Vinzenz Wartha.

Sitzung den 30. Mai 1899.

1. Wilhelm Glancz beschreibt in seinem Vortrag „*Ueber die Analysierung eines St. Gottharder Adulars*", wie man nach Jannasch mit Bor Silicate erforschen kann.
2. Ludwig Winkler ergänzte seinen im April gehaltenen Vortrag mit der Bemerkung, dass, wenn das Wasser gehörig verdünnt ist, mittelst Kaliumoleats die gesammte Härte bestimmt werden kann.
3. Joseph Nuricsán bespricht die *Daten der Analyse der Tusnáder Mineralwässer*, hauptsächlich die der Quellen Fókút, Rezsö und Mikes.

4. Julius Weszelszky legt Richard Windisch's „*Die Versuche behufs Darstellung der Propylendisulfilsäure*" betitelte Abhandlung vor.

Sitzung den 31. October 1899.

1. Vinzenz Wartha spricht in seiner „*Neuere Methoden der Schwefelsäurefabrication*" betitelten Abhandlung über die Art und Weise, mittelst welcher man aus Schwefeldioxyd und Oxygen Schwefeltrioxyd, resp. Schwefelsäure darzustellen versucht. Die ersten Versuche versprachen wenig Erfolg. Seitdem man aber erkannte, dass das Erhitzen der Mischung von Schwefeldioxyd und Oxygen schädlich ist, da die zur Beihülfe angewandte Hitze Dissociation verursacht, und es klar wurde, dass die Reactionshitze für sich dazu genügt, dass die beiden Gase bei Vorhandensein einiger Körper von contacter Wirkung sich in ihrer ganzen Masse vereinigen, kann der Gang der Fabrication für gesichert betrachtet werden.
2. Gustav Buchböck hält einen Vortrag über „*Die Wirkung des Mediums auf die Reactionsgeschwindigkeit*" und spricht darüber, wie die Reactionsgeschwindigkeit des Carbonylsulfids in den verschiedene Säuren und Salze enthaltenden Lösungen sich verändert und gelangt zu dem Schluss, dass die Reactionsgeschwindigkeit des Körpers im Grossen genommen im verkehrten Verhältniss zur inneren Reibung des Mediums steht.

Sitzung den 28. November 1899.

1. Emerich Szarvasy theilt unter dem Titel „*Die elektrolytische Darstellung der Induline*" mit, dass er, indem er salzsäueriges Anilin in geschmolzenem Zustand elektrolysierte, die folgenden Producte erhielt: Indulin, Anilinomdulin, Indulin 6B und Azophenin. Das bei der Elektrolyse freiwerdende Chlor hat eine diazolierende Wirkung, indem die Azoverbindung und die Salzsäure aufeinander wirken und erst Azodiphenin, dann hieraus eine zu den Indulinen gehörige Farbe entspringt.
2. Ludwig Winkler hält einen Vortrag über „*Die Bestimmung der in natürlichen Wässern gelösten Gase*", in welchem er angiebt, wie man einerseits das gesammte Kohlendioxyd, andererseits das Oxygen und das Nitrogen möglichst rasch und doch genügend pünktlich bestimmen kann. Aus dem bekannten Gewicht der natürlichen Wässer entfernt er das Kohlendioxyd durch Salzsäure, mittelst Wärme, sammelt es über Quecksilber, und das Volumen bestimmend berechnet er das Gewicht. Das Oxygen und Nitrogen entfernt er durch aus Calcit mit Salzsäure dargestelltem Schwefeldioxyd und sammelt die entfernte Gasmischung in einer mit Natriumhydroxyd gefüllten Messungsröhre; das Natriumhydroxyd verschlingt das Kohlendioxyd, das Oxygen und Nitrogen aber nicht. Deren Volumen bestimmend, lässt er das Oxygen von laugiger Pyrogallollösung verschlingen, während das Nitrogen zurückbleibt.

Sitzung den 21. December 1899.

1. Alexander Kalecsinszky theilt die Methoden mit, mittelst welcher er den *Wasserwerth des Kalorimeters* zu bestimmen pflegt.
2. Joseph Krenner spricht im Zusammenhang mit einem *bolivianischen Jamesonit* über die verschiedenen sulfantimonsäurehaltigen Minerale und lenkt durch das Aufzählen der auf dem Jamesonit vorkommenden mehrartigen Minerale die Aufmerksamkeit auf die Wachsamkeit, welche die Auswahl des bei den Mineralanalysen gebrauchten Stoffes benöthigt, wenn wir aus den Daten der Analyse auf die Formel des Minerals einen Schluss ziehen wollen.
3. Joseph Loczka theilt die Daten der Analyse eines *bolivianischen und cornwallischen Jamesoniten* mit. Aus diesen ergiebt sich für den bolivianischen Jamesoniten die Formel: $6\,Pb \cdot 2\,FeS \cdot 5\,Sb_2S_3$; für den cornwallischen aber: $4\,PbS \cdot FeS \cdot Sb_2S_3$.

D) Fachconferenz für Physiologie.

Sitzung den 24. Januar 1899.

1. Dr. Samuel Beck legt das Resultat seiner in Gemeinschaft mit Dr. Béla Fenyvessy im pharmakologischen Institut gemachten Arbeiten unter dem Titel „*Ueber das Aufsaugen des Ichthyols durch die Haut; Beiträge zur Lehre der Hautresorption*“ vor. Mit Rücksicht auf den ausserordentlich verbreiteten Gebrauch des Ichthyols in den verschiedenen Zweigen der Medicinalwissenschaften, besonders aber bei der Heilung der Hautkrankheiten, erscheint es für nothwendig zu ergründen, ob dieses Mittel, an der Haut angewandt, von dort aufgesogen wird.

   Die Versuche beweisen, dass das Ichthyol durch die gesunde Haut des Hundes aufgesogen wird, woraus man hinsichtlich der Physiologie und der Heilung der Haut den Schluss ziehen kann, dass die gesunde Haut nicht bloss sich verflüchtigende oder das Epithel lösende Stoffe, sondern auch solche durchdringen, welche, wie das Ichthyol, sich in Wasser und Fett gut lösen.
2. Dr. Paul Hári theilt in seinem Vortrag „*Ueber das Aufsaugen des Eisens im Magen und im Duodenum*“ mit, dass es ihm gelang, das Aufsaugen des als Medium eingegebenen Eisens im Magen des Hundes nachzuweisen.

Sitzung den 28. Februar 1899.

1. Dr. Béla Fenyvessy theilt seine mit *Nebennierenexcerpten* bewerkstelligten Versuche mit. Vor allem bespricht er die physiologische Bedeutung der Nebennieren und illustriert deren Unentbehrlichkeit durch die schweren Folgen der Nebennierenvertilgung. Dann spricht er über die chemische Zusammensetzung des erwähnten Organes, fasst die Resultate der bisherigen Forschungen zusammen und vergleicht sie mit seinen Versuchen.

Mittelst letzteren gelang es ihm, den specifischen Wirkungsstoff der Nebennieren von den übrigen abzusondern und deren physiologische Wirkungen einzeln zu studieren. Es stellte sich auf diese Weise heraus, dass die lähmende, vergiftende Wirkung der Excerpte durch die Nebenstoffe verursacht wird, die Wirkung des specifischen Wirkungsstoffes des Sphygmogenins, aber sehr wohl auf die Organe der Blutcirkulation zu beschränken ist. Der Umstand, dass das Sphygmogenin in der Vene der Nebenniere zu finden ist, beweist, dass dieser Stoff thatsächlich die Ausscheidung dieses Organes ist, dass also die Nebenniere in der That eine innere Ausscheidung vollführende Drüse ist.

Nach der Schilderung der vergiftenden Wirkung der Nebenniere beschreibt er die Wirkung des Sphygmogenins auf die Blutcirkulation. Das Zusammenziehen der Gefässe rührt von der Wirkung auf die glatten Muskelelemente her. So stellte es sich heraus, dass die intravenose Injection des Sphygmogenins sehr lebhafte Darmbewegungen verursacht und zwar direct durch die Wirkung auf die Muskelelemente, was dadurch erwiesen wird, dass die Ausschliessung der Nervenbahnen des Darmsystems das Eintreffen der Wirkung nicht beeinträchtigt. Demnfolge kann man es als bewiesen betrachten, dass die physiologische Rolle des Sphygmogenins darin besteht, dass es den Ton der glatten Muskelzellen, namentlich den der Organe der Blutcirkulation, aufrecht erhält, und es ist anzunehmen, dass wir der Entartung der Nebenniere bei der Erklärung von Symptomen der Herzschwäche, welche sich bei gewissen Infectionskrankheiten einzustellen pflegen, eine Rolle zuerkennen müssen.

Endlich bespricht er die antitoxische giftbindende Rolle der Nebennieren.

Sitzung den 14. März 1899.

Dr. Eugen Pólya führt in seinem Vortrag über „*Die Anatomie des Hallenwinkels beim normalen und beim glaucomösen Auge*“ aus, dass er im normalen menschlichen Hallenwinkel keinen Bandapparat vorfand, bloss in einem einzigen Fall, bei einem $2\frac{1}{2}$ Jahre alten Kinde war das lig. pectinatum Hueck und das Fasersystem des Fontana'schen Raumes entwickelt; die Form des Hallenwinkels wechselt je nach dem Grade der Entwickelung des elliptischen Theiles des Ciliarmuskels: bei emmetropem Strahlenmuskel ist er breit, gewölbt, bei hypermetropem Strahlenmuskel spitz und eng, bei myopem endlich rund und sehr weit. Nach diesen Formen des Hallenwinkels kommt die Schliessung nach verschiedenen Mechanismen zu Stande. Von 23 anatomisch untersuchten glaucomösen Augen war der Winkel in 20 Fällen typisch verschlossen.

Sitzung den 18. April 1899.

1. Gustav Oláh referiert unter dem Titel „*Neue Methoden der psychologischen und physikalischen experimentalen Forschung krankhafter Geisteszustände*“

über die bisherigen Resultate seiner noch andauernden Forschungen in der staatlichen Irrenanstalt zu Angyalföld (in Budapest). Gegenwärtig sind in der Anstalt hauptsächlich in zwei Richtungen Versuche im Gang. Eine der Aufgaben ist in grösserer Menge Daten zu sammeln zur Lösung der Frage, ob der Kniesehnenreflex in seinem weiteren Verlaufe nach der Auslösung durch Einwirkung von Gehirnzuständen beeinträchtigt wird und inwiefern. Von der Reflexbewegung selbst und den darauf folgenden kleineren Bewegungen machte er auf dem Myografion Aufnahmen und fand, dass die verschiedenen krankhaften Gehirnzustände auf die Bewegungen nach dem Kniereflex auf das verschiedenste einwirken. Er zeigt die von den verschiedenen Krankheitsformen aufgenommenen Kniereflexcurven und gelangt zu dem Resultat, dass die auf diese Weise aufgenommenen Kniereflexcurven vom diagnostischen Standpunkt aus eine bedeutende Zukunft haben. Der andere Theil der Beobachtungen bezieht sich auf die Gedankenassociation der Geisteskranken. Vortragender stellte 100 Worte fest, auf welche die untersuchten Geisteskranken auf verschiedene Weise associiert frei gewählte andere Worte sagen. Die Art der Association zeigt bei den einzelnen Krankheitsformen wesentliche Unterschiede. Betreffend die Theorie der Ideenassociation meint Vortragender, dass man, die anatomische Ursache psychologischer Vorgänge suchend, sich hüten muss, psychologische Begriffseinheiten in die Anatomie zu bringen. Es giebt Ideen und eine Ideenassociation, aber bloss auf der Schultafel. In den Gehirnzellen sind keine Ideen aufgehäuft, sowie den Tasten des Klaviers kein musikalischer Begriff innewohnt. Auch die allerelementarste Idee ist ein auf hunderttausenden von Zellen zugleich angeschlagener Akkord, welche auf andere Weise angeschlagen im Bewusstsein eine andere Idee hervorbringen. Die Ideenassociation aber ist das zeitliche Aufeinanderfolgen der daraus sich ergebenden Akkorde.

2. Joseph Aboxyi theilt in seinem Vortrag: „*Die Anwendung des Kautschuks in der ärztlichen Praxis*“ die Daten bezüglich der Entdeckung des Kautschuks mit, beschreibt dessen physische und chemische Eigenschaften und hebt seine Wichtigkeit in der ärztlichen, namentlich in der dentistischen Praxis hervor.

Sitzung den 16. Mai 1899.

1. Paul Ranschburg hält über „*Psychophysiologische Untersuchungsmethoden*“ einen Vortrag, in dessen Rahmen er das neue psychophysiologische Laboratorium auf der Klinik des Professors Laufenauer schildert. Die Methoden sind theilweise physiologischer, theilweise physikalischer Natur. Von den physiologischen Apparaten dienen die meisten, so der Mosso'sche Plethysmograph (Rauminhaltsmesser), der Sphygmomanometer (Blutdruckmesser); die neuestens modificierten Marey'schen Pulsations-, Athmungs- und Herzschlagschreibapparate, der Muskelarbeitmesser (Ergograph) zur

Untersuchung der, die psychischen Prozesse begleitenden organischen Entartungen. So kann man mit ihrer Hülfe z. B. jene Veränderungen erforschen, die in Begleitung der Empfindungen und Erregungen in Athmen, im Herzen und in den umliegenden Adern, sowie in der Innervation der willkürlichen Muskulatur vorkommen.

Die andere Gruppe bilden die im engeren Sinn genommenen psychophysikalischen Methoden. Diese dienen theilweise zur fortsetzungsweisen Messung der Dauer der geistigen Arbeit, wonach aus der Zahl der auf je 5 Minuten fallenden geistigen Leistungen die für eine Leistung erforderliche Mittelzeit festgestellt wird. Theilweise wird aber die besondere Dauer jeder einzelnen Leistung mittels pünktlicher Präcisionsapparate gemessen. Zu solchen Untersuchungen, mittels welcher z. B. die einfachen und zusammengesetzten Reaktionen, die mathematischen Operationen, die Dauer der Ideenassociationen erforscht werden können, ist das Hipp'sche Chronoskop erforderlich, mittels dessen wir die erwähnten Prozesse mit einer Pünktlichkeit von Tausendstelsecunden messen können. Es sind ferner zur Aufnahme gewisser Reize Apparate nöthig, welche so construiert sind, dass die auf sie einwirkenden (Hör-, Seh- und andere) Reize im Augenblick ihrer Wirkung zugleich einen elektrischen Strom verursachen, der den Zeiger des Chronoskopes in Bewegung setzt, schliesslich Reactionsapparate, die im Augenblick der auf den Reiz gegebenen Reaction den elektrischen Strom unterbrechen und hierdurch den Zeiger der Uhr zum Stillstand bringen. Auf diese Art messen wir die Zeitdauer zwischen dem Reiz und der sich einstellenden Reaction mit einer Pünktlichkeit von Tausendstelsecunden. Ausserdem benöthigen wir einen Fallapparat, mit dessen Hülfe wir den Wechsel des die Uhr bewegenden und des unterbrechenden Stromes controllieren und mittels eines Rheostates regulieren. Vortragender zeigt alle diese Apparate während ihrer Function und macht auf die eventuell zu begehenden Fehler und auf die Art ihrer Vermeidung aufmerksam.

Sitzung den 3. Oktober 1899.

1. Vicepräsident Franz Hutyra gedenkt in warmen Worten des verstorbenen Präsidenten der Fachsection Victor v. Mihalkovics. (S. den Nekrolog Bd. XVII, p. 357 dieser Berichte.)
2. Karl Schaffer weist in seinem Vortrag über „*Die Technik und die Demonstration der Schnitte des grossen Gehirns*“ auf den Umstand hin, dass der Anatom des gesunden, aber auch des kranken Gehirnes an vollständigen Gehirnen gemachte Schnitte benöthigt; die in der Hemisphärensubstanz bemerkbaren Verhältnisse der Gehirnentwicklung und der secundären Entartung sind nur auf unversehrten Schnitten des grossen Gehirns sichtbar. Zur Herstellung von so grossen Schnitten dienen besonders construierte Mikrotome; die Herstellung der Schnitte muss mit besonderen technischen Kniffen angestellt werden. Vortragender arbeitet mit einem

von der Wiener Firma Reichert gelieferten grossen Mikrotom, welches zum Schneiden unter Wasser eingerichtet ist; und bereitet das zum Schneiden bestimmte Material auf die folgende Art vor. Er härtet das möglicherweise frisch herausgenommene Gehirn in einer 20proc. Formalinlösung, so dass es schon in einigen Tagen so hart ist, dass es mittels eines flachen, an beiden Rändern scharfen Messers in zwei Theile geschnitten werden kann (in horizontaler wie auch in frontaler Richtung), zu dem Zwecke, dass die Flüssigkeit das Hirn besser durchdringe. In ca. 2 Wochen kommt das Gehirn in eine 5proc. Bichromatlösung; noch zweckmässiger ist es, wenn die Behandlung durch Bichromat für später bleibt, wenn die Schnitte schon fertig sind. Nach einer entsprechenden Härtung durch Formol schneiden wir das Gehirn in Stücke von 2 cm Dicke und tauchen sie zuerst in Spiritus, dann in eine Mischung von Alkohol, Aether und Wasser, schliesslich in dünnes, später in dichtes Celloidin. Die Durchtränkung der 2 cm dicken grossen Hirnscheibe mit Celloidin ist in drei Wochen beendet; nun kleben wir die Hirnscheibe mittels Celloidin auf einen breiten gerippten Zinkgrund. Hierauf füllen wir das Becken des Mikrotoms mit Wasser und das Schneiden kann begonnen werden. Schnitte von 40 μ können auf diese Weise leicht hergestellt werden; dünnere hält Vortragender für überflüssig. Der Schnitt schwimmt im Wasser, von wo wir ihn mittels Papier herausfischen. Die an dem Papier haftenden Schnitte legen wir auf mit Spiritus reich getränktes Flusspapier. Von da legen wir den Schnitt sammt dem Papier in ein mit Farbe gefülltes, flaches Gefäss und der Schnitt macht sämmtliche Phasen des üblichen Weigert'schen haematoxylenigen oder anderen Färbens durch, immer am Papier liegend. Das nach dem Färben wohl ausgewaschene Präparat thun wir sammt dem Papier wieder in absoluten Alkohol und achten darauf, dass der Schnitt 3—4 Stunden darin verbleibt, dass er von dem carboligen Xylol nicht zusammenschrumpfe. Nachdem wir ihn getrocknet, giessen wir in Xylol aufgelösten canadischen Balsam auf das Präparat und schliessen es endlich mit einer dünnen Glasplatte ab

Sitzung den 21. November 1899.

1. Dr. Joseph Guszman hält unter dem Titel „*Ueber die Morphologie der Oberfläche des Gehirns*“ einen Vortrag, in welchem er vor allem jene pünktlichen Forschungen schildert, die an Gehirnen solcher Individuen gemacht wurden, die grosse geistige Fähigkeiten hatten. Der Zweck dieser Forschungen war, dass jene hervorragende geistige Wirksamkeit, die jemandem im Leben eigen war, nach seinem Tode mit den eventuellen morphologischen Eigenheiten der Oberfläche des Gehirns in Einklang gebracht werde. Die Reihe der Forschungen eröffnete Rudolf Wagner in Göttingen. Seinen Forschungen folgten etwa 20 Jahre später ebenfalls in Deutschland diejenigen Bischof's und Rüdinger's. Solche Forschungen machten ferner M. Duval, Hervé, Manouvrier und Chud-

zinski in Frankreich, John Marshall in England und neuestens Gustav Retzius in Schweden. Auf diese Weise untersuchte auch Daniel Hanemann das Gehirn Helmholtz'. Im Zusammenhang mit diesen Forschungen zeigt Vortragender das Gehirn eines früh verstorbenen genialen Tonkünstlers, dessen Oberfläche er eingehend untersuchte. Interessant wird diese Untersuchung auch dadurch, dass das Gehirn eines Künstlers noch nie der Gegenstand solcher Forschungen war. Im vorliegenden Falle verdient hauptsächlich der sogenannte lobulus parietalis inferior Beachtung, welche Fläche Eberstaller eingehender umschrieb und dessen Grenzen die folgenden sind: vorn der sulcus retrocentralis transversus, sulcus retrocentralis, medial der sulcus interparietalis, hinten der sulcus occipitalis transversus und lateral der Anfangstheil des aufwärtssteigenden Zweiges der fossa Sylvii und des sulcus temporalis I et II. Auf derselben Fläche der rechten Hemisphäre fand Vortragender die folgenden Verhältnisse vor: der ramus ascendens fossae Sylvii hat direkt im sulcus retrocentralis seine Fortsetzung, es fehlt hier also die diesen gewöhnlich umgebende erste Bogenwindung (gyrus supramarginalis) und darum muss die zweite und dritte Bogenwindung (gyrus angularis et g. parietalis inf. post.) die vorhandene grosse Fläche mit ihrer ausserordentlichen Grösse allein ausfüllen. Die auf der gewöhnlichen Stelle befindliche Partie des gyrus angularis ist verhältnissmässig von kleiner Ausdehnung, doch sitzt darauf noch ein ausserordentlich grosses, viereckiges Gewinde, dessen mediale Grenze der sulcus parietalis bildet und somit kann dies als der Zusatz des gyrus enormis betrachtet werden. Der gyrus parietalis post. inferior hat die gewöhnliche Form. Eine sehr interessante Abweichung war noch auf der linken Hemisphäre auf dem sulcus frontalis inferior, auf dem ramus ascendens anterior fossae Sylvii und auf dem gyrus frontalis inferior. Dies sind die hauptsächlichsten auffallenden und interessanten Formationen der Oberfläche des untersuchten Gehirns. Die hauptsächlichsten Abweichungen sind also auf dem lobulus parietalis inferior und dies ist die Fläche, auf welcher auch auf den neuestens untersuchten Gehirnen Helmholtz' und des Astronomen Hugo Gülden einige Abweichungen sichtbar waren und welche Fläche auch Eberstaller als in Entwicklung begriffen bezeichnete. Vortragender demonstrierte das Bild des Gehirns auch durch Photographien und Diapositive.

2. Dr. Paul Ranschburg und Rudolph Bárut halten unter dem Titel „*Exacte Forschungen über die Psychophysiologie der Greise*" einen Vortrag. Ranschburg mass mit präcisen Apparaten und Methoden erst an jungen Leuten die Zeitdauer der verschiedenen einfacheren und complicierteren geistigen Thätigkeiten, dann untersuchte er in Gemeinschaft mit Bárut die Zeitdauer derselben geistigen Thätigkeiten an 13 60—80jährigen körperlich gesunden Greisen im Ofner Armenhaus. Zur Grundlage der Untersuchung diente eine Messung mit der Pünktlichkeit von etwa 4500 Tausendstelsecunden. Die Durchschnittszahlen ergaben folgendes Resultat:

	bei Greisen	bei Jungen	Differenz
Dauer der einfachen Gehörsreactionen . .	193 Sec.	152 Sec.	21 Proc.
„ „ zusammengesetzten Gehörsreact.	368 „	249 „	32 „
Reine psychische Dauer der Unterscheidung und des Wählens	175 „	97 „	44 „
Reactionen des Lesens (Sehens) einsilbiger Worte	924 „	757 „	18 „
Reactionen der Addierung einziffriger Zahlen	1366 „	1113 „	17 „
Reine Zeitdauer der Addierung	342 „	376 „	10 „
Dauer elementarer Urtheilsreactionen . .	1330 „	1047 „	21 „
Reine Zeitdauer elementarer Urtheile . .	355 „	289 „	19 „
Reactionen freier Ideenassociierungen . .	2447 „	1459 „	40 „
Reine Zeitdauer freier Ideenassociierungen	1523 „	701 „	54 „

Es ist also ersichtlich, dass die Dauer der sämmtlichen Reactionen bei Greisen um 17—40 Proc. länger ist, als bei jungen Leuten. Die einzige Ausnahme ist die Dauer der Addierung einziffriger Zahlen, wobei wir, nach Abziehen der zum Lesen benöthigten Zeit, bei Greisen eine kürzere Dauer erhalten, als bei den Jungen. Die Ursache davon liegt theils in der früheren Beschäftigung (Krämer, Wirth etc.) der untersuchten Greise, theils im niederen geistigen Niveau der untersuchten jungen Leute (Wärter). Die grösste Differenz ist bei der reinen Zeitdauer freier Ideenassociierungen zu beobachten: 54 Proc. auf Kosten der Greise. Die Untersuchungen beweisen, dass, obwohl unter den Jungen auch solche zu finden sind, deren geistige Handlungen langsamer sind, als diejenigen des einen oder anderen Greises, doch die Schnelligkeit der geistigen Thätigkeiten im 60.—80. Lebensjahre eine gewisse gesetzmässige Abnahme verräth.

3. Adolf Szili zeigt einen interessanten Fall der „*Haarbildung unter der Bindehaut des oberen Augenlides*", daran die Ansicht Eugen Szili's knüpfend, wonach der Ursprung des Gebildes auf das Epithel der Meibomschen Drüsen zurückzuführen ist.

Sitzung den 19. Dezember 1899.

1. Ludwig Thanhoffer demonstriert unter dem Titel „*Ueber die Anwendbarkeit der Projectionsapparate*" nach kurzer historischer Einleitung die in dem unter seiner Leitung stehenden II. anatomischen Institut befindlichen Projectionsapparate. Der eine stammt von der Wiener Firma Plössl, der andere von Zeiss aus Jena. Beide Apparate sind zur Projection von Photographieen, undurchsichtigen Gegenständen und mikroskopischen Apparaten gleichmässig geeignet. Jeder der Apparate hat seine guten und üblen Eigenschaften. Der Plössl'sche Apparat eignet sich ausgezeichnet zur Projection mikroskopischer Präparate und Photographieen; der Zeiss'sche ist zu mikroskopischen Projectionen weniger geeignet,

doch ist er hinsichtlich der Projection undurchsichtiger Gegenstände unübertrefflich. Der Zeiss'sche Apparat demonstriert grosse Gegenstände, menschliche Körperdurchschnitte, ganze Schädelschnitte, Pflanzen, kleine lebende Thiere etc. mit der grössten Pünktlichkeit in ihrer natürlichen Farbe und Plasticität, verzehrt weniger Strom, seine Anwendbarkeit ist viel einfacher und der Apparat selbst ist auch viel billiger.

Sitzungen im Jahre 1900.

A) Fachconferenz für Zoologie.

Sitzung den 5. Januar 1900.

1 Ernest Csiki zeigt in seiner „*Käfer aus der neuguineäischen Sammlung von Ludwig Biró*" betitelten Vorlesung zehn verschiedene in die Familie der *Endomychidaen* gehörige Arten. Unter diesen sind neu: das *Encymon Ercinae*, die *Saula Birói* und der *Stenotarsus Birói*. Interessant sind noch die bisher nur in je einem Exemplar gekannten und aus Neu-Guinea beschriebenen *Beccaria Wallacei Gorh.* und *papuensis Gorh.*-Arten, an die sich der *Dryastites borneensis* Friv. anreihte, welchen Johann Frivaldszky aus der Insel Borneo beschreibt, wo ihn Johann Xántus gesammelt hat; Ludwig Biró fand ihn aber auch am Singapore.

Derselbe bespricht unter dem Titel: „*Neue Endomychidaen in der Sammlung des Nationalmuseums* 6 Arten, nämlich die folgenden: *Mycetina cruciata o. balcanica* (Balkan), *chycetina montana* (Ostindien, Dasjiling); *Prycherus elegans* (Kamerun, Lehrdorf), *Haploscelis nitidus* und *madagassus* (Madagaskar); *H. nossibianus* (Nossi-Bé).

2. Eugen Daday bespricht die Resultate, die durch das Studium des im Bugayer See gesammelten mikroskopischen Materials erreicht wurden. Der See befindet sich im Besitze der Stadt Kecskemét. Er notierte im ganzen 69 Arten, von welchen 58 auch in andern Gegenden des Landes gedeihen, 11 Arten sind jedoch bisher nur von hier bekannt. Unter diesen Arten befinden sich auch neue, nämlich: die *Paracandona hungarica* und die *Lymnicythere hungarica*.

3. Géza Entz macht die „*Études sur la Faune des mares salées de Lorraine*" (Paris 1899) betitelte Abhandlung M. R. Florentin's bekannt, welche anknüpfend an die Behandlung der lothringischen Kochsalzseen sich mit der bisher noch nicht gelösten Frage beschäftigt, woher diejenigen Seeprotisten stammen, die aus den Salzseen in Algier, Lothringen, Siebenbürgen und Süditalien bekannt sind? Diese Frage lösend beschäftigt er sich zuerst mit der Entstehung der Binnensalzseen und gelangt zu dem Resultat, dass ausser den südrussischen Limanen, welche Meerüberreste sind, die anderen Binnenlandsalzseen, und zwar die algierischen, lothringischen und siebenbürgischen Binnenwässer lokaler Entstehung sind, deren Fauna keinesfalls oceanischen Ursprungs sein kann, sondern aus von

süssen Wässern eingewanderten und unter der Wirkung des Salzwassers verwandelten Arten besteht. Was die Entstehung der siebenbürgischen Salzseen betrifft, so hat Florentin jedenfalls Recht, aber Vortragender findet die Erklärung des Ursprunges der Fauna für nicht annehmbar und trachtet durch ausführliche Erörterungen zu beweisen, dass die Seeprotisten der Salzwässer in gewissem Sinne zur relicta fauna gehören. Es ist nach seiner Auffassung nicht nur hypothetisch, sondern anders gar nicht denkbar, als dass das Meer in jenen Gebieten, in welchen jetzt Salzwässer sind, nach seinem Rückzug oder nach seiner Abnahme kleinere oder grössere Salzseen zurückgelassen hat, in welchen diejenigen Protisten, die sich an die veränderten Verhältnisse gewöhnen konnten, ihre Existenz fortsetzten und sich so eine relicte Fauna entwickelte, zu deren Seeprotisten sich immer mehr und mehr süsswässerige Einwanderer gesellten. Diese zurückgelassenen (relicta) Seen trockneten zwar mit der Zeit aus, aber bei ihrem Austrocknen entstanden schon aus dem in den tieferen Theilen der Salzgebiete angesammeltem Regenwasser oder aus den vom Salzboden entspringenden Quellen Salzseen nicht zurückgelassenen Ursprunges, welche indirect oder direct ihre Seeprotisten aus den relicten Seen empfingen.

Eugen Csiki erinnert hieran anknüpfend an die südrussischen Limanen, die ihr Wasser noch jetzt aus dem Schwarzen Meer bekommen. Beim Kaspischen See ist nur das untere Zweidrittel Meer, das obere Drittel ist das Wasser der Wolga. Von den mittelasiatischen Wässern fand er nur das Cherminczagan salzig, welches ein Bodenwasser ist.

Nach Josef Mallász können die Dévaer Salzpfützen keine Relicten sein, da hier das aus dem Berge sprudelnde Wasser das Salz auflöst.

Sitzung den 9. Februar 1900.

1. Stephan Rátz bespricht aus Neu-Guinea stammende Eingeweidewürmer. Er spricht über die Isolierung der Cestraenarten und über die *Ichthyotaenien*. Er macht die *Ichthyotaenia Birói*, die *Icht. saccifera* und die *Icht. tonocephala* bekannt, die sämmtlich neu sind.
2. Géza Horváth spricht über den *Pterichlorus longipes* und führt dessen grosses Eierlegen vor.
3. Eugen Daday liest seine Vorlage über den *Carassius bucephalus* vor, in welcher er constatiert, dass diese Art, wie sie in unserm Lande vorkommt, J. Heckel beschrieb.

Ludwig Méhely bemerkt, dass Smitt im Jahre 1895 diese Art als synomym bezeichnete und dass er auch in dieser Richtung vorwärtsschritt.

Kornélius Chyzer erzählt, wie er zur Uebersetzung der J. Heckel'schen Arbeit gelangte und empfiehlt, dass unsere Ichthyologen den Hévvizer See besuchen mögen und so über den *C. bucephalus* entscheiden sollen.

Sitzung den 6. April 1900.

1. Alexander Mocsáry macht die im Besitze des Nationalmuseums befindlichen Exemplare der *Troides*-Schmetterlingsart bekannt und daran anknüpfend bespricht er den Lebens- und Entwicklungsgang dieser Schmetterlinge. Er behandelt und zeigt die neue durch L. Biró gesammelte *Troides Elisabethae*-Art, welche in Erinnerung an weil. die Königin Elisabeth G. Horváth und A. Mocsáry beschrieben haben. Ausserdem erwähnt er einige interessante Varietäten, welche ebenfalls L. Biró in Neu-Guinea gesammelt hat.
2. Ernst Csiki wirft — als Einleitung — einen kurzen Rückblick auf die sich auf die vaterländischen Käfer beziehende Literatur und bespricht hauptsächlich die Daten, welche die *Cicindela*-Arten behandeln. Auf Grund seiner Studien machte er mehrere auf die *Cicindela*-Art bezügliche corrigierende Bemerkungen und theilt ausserdem Daten mit, welche sich auf die vaterländische Verbreitung von mehreren dieser Arten beziehen. Zur Ergänzung seines Vortrages zeigt er die charakteristischen Exemplare und Zeichnungen der vaterländischen Arten.

   Géza Entz stellt eine Frage betreffs des Vorkommens der *Cicindela elegans*.

   Nach Ernest Csiki hat man die *Cicindela elegans* unter mehreren Benennungen beschrieben, sie ist eigentlich die *Cicindela sigmatophora* Fisch. und gedeiht in der Umgebung der Siebenbürgischen Salzwässer.
3. Joseph Mallász spricht über die unter den Exemplaren der Carabus obsoletus-Art vorkommenden Varietäten und mit deren kurzem Vergleichen würdigt er ihre Bedeutung. Im Zusammenhange zeigt er auch die betreffenden Exemplare.
4. Victor Szépligeti skizziert den Stand der Kenntnisse über die Familie der *Braconidae* Hymenoptera. Er weist auf die Schwierigkeiten hin, mit denen die Bearbeiter der *Braconiden* kämpfen müssen und giebt einen kurzen Ueberblick der diesbezüglichen Literatur. Bisher sind aus unserm Lande 155 Arten bekannt. Er stellt eine Tabelle zur Bestimmung der bisher bekannten Arten zusammen.
5. Zoltán Szilády bespricht das Formaldehyd. Er trägt die Geschichte seiner Entdeckung vor, spricht über seine Wirkung und über seine das Verfaulen hindernde Eigenschaft. In unserer Literatur wies J. Szakáll zuerst auf die Brauchbarkeit des Formaldehyd bei der Verfertigung von Präparaten hin; aber auch Ludwig Méhely und Ludwig Biró beschäftigten sich mit dieser Frage. Im Jahre 1896 wurde aus den durch Formaldehyd conservierten Präparaten eine Ausstellung arrangiert. Er stellt die Resultate seiner eigenen Experimente dar und spricht über die guten und schlechten Eigenschaften des Formaldehyd.

   Kornélius Chyzer bemerkt, dass L. Biró viel mehr gesammelt hätte, wenn er kein Formaldehyd gebraucht hätte; er liebt diese Flüssigkeit nicht.

Ludwig Méhely verspricht, dass er demnächst seine diesbezüglichen Erfahrungen vortragen wird. Nach seiner Meinung ist das Formaldehyd zum Fixieren vortheilhaft, aber zum Conservieren nicht geeignet.

Géza Entz erklärt es als ein ausgezeichnetes Mittel für die Conservierung der Protozoen.

Stephan Rátz empfiehlt das Formaldehyd sehr beim Verfertigen anatomischer Präparate und trägt einige Modificationen des Verfahrens vor. Man muss die Präparate aus dem Formol in Alkohol, von da in glycerinartige Salzlösungen legen.

Sitzung den 11. Mai 1900.

1. Alexander Mocsáry hält einen Vortrag „*Ueber die schönsten Bienenarten*". Er trägt vor, welche verschiedenen Farben und Farbenvariationen bei den Bienen vorkommen können; die grüne Farbe ist selten, aber desto häufiger das Metallgrün und das Goldgrün. Er bespricht die Lebensweise und den Nestbau der buntfarbigen Bienen und führt gleichzeitig mehrere glänzende Bienenexemplare vor.
2. Stephan Rátz macht zwei neue *Dipylidia* bekannt und führt sie vor. Einleitend erwähnt er die bisher bekannten Arten dieses Genus. Er beschreibt die neuen *Dipylidia sexcoronata*- und *D. Örley*-Arten. Bisher sind zusammen 10 *Dipylidium*-Arten bekannt, von denen nur drei in unserem Lande vorkommen.
3. Ernest Csiki macht die zoologischen Daten des „*Die Pusztenflora der grossen Ungarischen Tiefebene*" betitelten Werkes von F. Woenig bekannt und demonstriert die Oberflächlichkeit und Unrichtigkeit der meisten Daten.
4. Koloman Kertész bespricht das Werk E. Ficalbi's: „Venti specie di zanzare (Culicidae) etc.", welche zuverlässige Tabellen zur Bestimmung der Arten enthält.

B) Fachconferenz für Botanik.

Sitzung den 10. Januar 1900.

1. Karl Schilberszky hält einen Vortrag „*Ueber die pfirsichförmige Mandelfrucht*", zu welchem eine Mandelfrucht, die die Gestalt eines Pfirsichs hatte und im Herbst durch ein Vereinsmitglied eingeschickt wurde, Anlass gab; der Baum soll sich, wie der Einsender angiebt, in einem in nordöstlicher Richtung gelegenen Garten des Ofner Festungsberges befinden; er hat immer nur normale Mandelfrüchte getragen, und im Jahre 1899 nahmen seine sämmtlichen Früchte die Gestalt des Pfirsichs an. Schilberszky erwähnt, dass dieses Phänomen wahrscheinlich die Folge von gekreuzter Bestäubung sein kann, da ähnliche Fälle auch an andern Pflanzen, resp. Bäumen bekannt sind.

Julius Klein hat auch im Laufe des verflossenen Herbstes aus der Umgebung von Budapest eine ähnliche Frucht erhalten und ist auch geneigt als Begründung die Wirkung des Bestäubens, resp. der Befruchtung anzunehmen.

2. Schilberszky trägt „*Die Angelegenheit der Ausrottung der Nessel*" vor, welche Angelegenheit in Form einer Anfrage von der Sebes-Körösr Wasserregulierungsgesellschaft angeregt wurde. Die Schutzdämme der Gesellschaft sind aus sandigem, schlammigem Material gebaut, auf welchem eine üppige Flora entstanden ist. Unter anderm vermehrte sich die Nessel in dem Maasse, dass die Oberfläche der Dämme sich vom Standpunkte der Verwerthung als ganz unmöglich erwies. So entstand die Frage, wie man da die Nessel mit wenig Kosten ausrotten könnte. — Nach kurzem Gedankenaustausch hat die Fachsection mit der Beantwortung der Frage Karl Schilberszky und Ludwig Thaisz betraut.

3. Alexander Mágócsy-Dietz legt unter dem Titel: „*Neue Erscheinungen in der Literatur*" mehrere botanische Werke vor. — Aus Anlass des Erscheinens und der Vorlage des Werkes: „*Die Flora des Esztergomer Comitates*", verfasst von dem Nestor unserer vaterländischen Botaniker Alexander Feichtinger, beschliesst die Fachsection auf Antrag von Moritz Staub einstimmig, dass dem Verfasser ein Begrüssungsschreiben mit den Unterschriften der anwesenden Mitglieder der Fachsection zugesendet werde.

Sitzung den 14. Februar 1900.

1. Alexander Mágócsy-Dietz trägt die unter dem Titel: „*Beiträge zur Kenntniss unserer Pilze*" eingesandte Mittheilung von Ladislaus Hollós vor, in welcher Hollós aus mehreren vaterländischen Gegenden stammende Gasteromycetesarten bekannt macht, unter welchen sich viele für unser Land noch neue Arten befinden.

2. Alexander Mágócsy-Dietz giebt folgende Erklärung: „In der am 17. October 1899 gehaltenen Sitzung der botanischen Fachsection habe ich auf Wunsch von Aladár Richter, des Professor-Stellvertreters der Botanik an der Klausenburger Universität, den Sonderabdruck seines im „Budapesti Szemle" erschienenen Artikels: „Unsere naturwissenschaftlichen Verhältnisse und das Ausland" unter den Mitgliedern der Fachsection vertheilt. Ich erklärte bei der Vertheilung, dass Richter die vaterländischen botanischen Verhältnisse viel schlimmer schildert, als dies nöthig. Diese Bemerkung wurde in der December-Nummer der Naturwissenschaftlichen Zeitschrift des Jahres 1899, pp. 726—727 publiciert. Richter erklärt in seinen an das Secretariat der Gesellschaft und auch in den an mich gerichteten Zeilen, dass „diese Bemerkungen überraschend klingen und rein persönlicher Beziehung sind". Diese Erklärung — da es mir fern liegt, unter den Botanikern eine Zwietracht wachzurufen — veranlasst mich zu folgender Bemerkung: Ich bedauere, dass meine Bemerkungen Richter

unangenehm berührten, da nicht nur alte Freundschaftsbande mich an seine Person knüpfen, sondern auch die Zuneigung, die ich für jeden, der an der Entwicklung unseres botanischen Wirkens mit solchem Eifer arbeitet, wie er, empfinde. Ich stimme mit ihm vollständig darin überein, dass bei uns auf dem Gebiete der Botanik, wie auch in der Wissenschaft im allgemeinen, viel zu schaffen ist. Aladár Richter wird meine persönliche Freiheit in dieser Sache wahrscheinlich in Ehren halten und auch ich kann ihn versichern, dass ich mit ihm Hand in Hand jetzt und auch in der Zukunft an der Beseitigung der verspürten Mängel und an der Entwicklung der vaterländischen botanischen Verhältnisse mit aller Kraft, mit ernster und stiller Arbeit, mit grösster Freude theilnehmen werde."

3. Ludwig Simonkai spricht unter dem Titel: „*Die Synonyme einer unserer vaterländischen Poa-Arten*" darüber, dass die Art der mit *Kitaibel Poa scabra* benannten und der in dem Wildenow'schen Herbarium im Original aufbewahrten Pflanze mit der vaterländischen *Poa pannonica* Kern-Art übereinstimmt, es ist sogar fast sicher, dass diese durch Kitaibel unterschiedene vaterländische Art dieselbe ist wie diejenige, welche durch Besser in Podolia im Jahre 1822 — viel später nach dem Tode Kitaibel's — *Poa versicolor* benannt wurde.

Sitzung den 14. März 1900.

1. Andreas Kibacska führt die zur Demonstration der Assimilation und des Athmens dienende Phosphorprobe vor.
2. Eugen Bernátsky fand in der Tátra den mit *Absidia septata V. Tiegh.* benannten Pilz, führt ihn als eine für unser Land neue Pilzart vor und macht gleichzeitig deren generische und specifische Kennzeichen bekannt und hebt ihre Abweichung von den andern Mucorarten hervor.
3. Präsident legt den Dankbrief Alexander Feichtinger's für die Begrüssung der Fachsection vor.

Sitzung den 4. April 1900.

1. Árpád Kardos bespricht unter dem Titel: „*Die Blumen und die Pflanzen in der türkischen Volksdichtung und in dem Volksglauben*" auf Grund der anlässlich seiner ostasiatischen Reise gesammelten Daten die symbolistische Bedeutung der Pflanzen und die volksthümliche Anwendung mancher Pflanzen zu medizinischen Zwecken.
2. Ludwig Fialowski würdigt in vergleichender Weise die Arbeit Alexander Feichtinger's: „*Die Verbreitung vornehmlich ungarischer Pflanzen und die in der Umgebung der Hauptstadt fehlenden Arten*" über die Esztergomer und die des Professors Ludwig Töke's über die Váczer Flora.

Sitzung den 9. Mai 1900.

1. Ludwig Fialowski macht unter dem Titel: „*Die Sternbergia mit der Blume der Zeitlosen*" die abweichenden Blumenconstitutionen der in der Um-

gebung der Hauptstadt beobachteten, gepflanzten und eingehend untersuchten *Sternbergia colchiflora W. Kit.* bekannt und zeigt hieran anknüpfend mit dem Grundriss der Blume andere interessante und lehrreiche photographische Aufnahmen.

2. Béla Kontur legt eine eingehende Studie L. S. J. Fonck's: „*Der Ysop in der heiligen Schrift*" vor, welche eine noch unentschiedene Frage behandelt, nämlich die Frage, was der Hysoppos der heiligen Schrift ist? Man erwähnt nicht weniger als 18 Pflanzenarten als solche biblische Hysoppen; so viel ist jedoch sicher, dass dabei nicht vom Linné'schen *Hysoppus officinalis* die Rede ist. Mit dieser Frage hat sich unter den vaterländischen Forschern Ludwig Haynald beschäftigt. Nach ihm ist der biblische Hysoppos und der *Capparis spinosa L.* dasselbe. Zuletzt hat der Jesuitenpater Fonck die ungefähr 300 Jahr alte, diesbezügliche Literatur einer Beurteilung unterzogen und beweist, dass der biblische Ysop nichts anderes sein kann, als das *Organum Maru L. var. sinaicum.*
3. Ludwig Simonkai hält unter dem Titel: „*Unsere halbblütigen Salbeiarten aus der Gruppe der Euplethiosphacen*" einen Vortrag. Vorausschickend, dass die meisten Arten des Salbeigeschlechts in der Familie der Labiatiflоren enthalten und dass die Salbeien käferlockend sind, führt er aus, dass unsere in die Euplethiosphacegruppe gehörigen Salbeiarten mehrere Halbblut- (hybridische) Arten besitzen. Diese kurz würdigend, zeigt und charakterisiert er drei neue Halbblutarten.

Sitzung den 9. Juni 1900.

1. Ludwig Fialowski trägt über „*Gedeihende Feigenbäumchen am Blocksberge*" vor; er spricht über die am südlichen Abhange des Budapester Blocksberges unter natürlichen Verhältnissen gedeihenden Feigenbüsche. Die eingebürgerten Pflanzen verlieren jeden Herbst die Blätter und fangen erst Ende April zu knospen an, ihre Frucht reift, wenn der Herbst günstig ist und wird sogar auch geniessbar. Vortragender meint, dass diese Feigenbäumchen Reste einstiger türkischer Gärten sind und durch ihre constant gewordene Vanabilität Aufmerksamkeit verdienen. Er führt noch mehrere Photographien und diapositive Platten zur Demonstration seines Vortrages vor.
2. Ferdinand Filarszky's in der Angelegenheit des „*Alpinetum aus der Tátraer Gegend*" eingereichter ausführlicher Bericht wird durch Karl Schilberszky vorgelesen.
3. Karl Schilberszky liest die gemäss des früheren principiellen Uebereinkommens der Fachsection zusammengestellten Statuten für die „Botanischen Berichte" in ihrem ganzen Umfange vor.
4. Zuletzt wurden der dendrologische Garten, die Obstcolonie und die Treibhauspflanzen des botanischen Institutes besichtigt.

Fachconferenz für Chemie. — Mineralogie.

Sitzung den 30. Januar 1900.

1. August Detsinyi (als Gast) hält unter dem Titel: „*Neues Heizverfahren mit Gas*“ einen Vortrag. Das Leuchtgas mit Luft gemischt verbrennt er auf der Oberfläche von Ziegelstücken, die durch Erwärmung und mit Platin zur katalytischen Wirkung geeignet gemacht wurden. Nach seiner Meinung ist das Verbrennen ein vollständiges und die Brennproducte entfernen sich aus dem Ofen fast auf gewöhnliche Temperatur ausgekühlt. Er meint, dass bei diesem Heizverfahren die Verbrennungswärme in Vergleich zu den frühern Verfahren besser zu verwerthen ist, wenn es gelingt, für den Ofen eine zweckmässige Form zu erfinden.

   Vincenz Waitha prophezeit diesem Heizverfahren keine grosse Zukunft. Bei den Heizverfahren mit Gas wurde bisher auch immer danach gestrebt, dass die Verwerthung der Verbrennungswärme zu Gunsten des Heizens immer vollständiger werde und dieses Ziel hat man auch schon gehörig erreicht; hingegen weiss man bei dem Detsinyi'schen Verfahren noch nicht, ob die Verbrennung des Gases eine vollständige ist? wie lange der das Brennen vermittelnde Körper brauchbar ist? ob das Platin das Verfahren nicht theuer macht? Er hält es auch für eine ungünstige Eigenschaft, dass eine Vorwärmung des vermittelnden Körpers nöthig ist.
2. Béla Lengyel führt jenes Calciumcarbonat und jenes Strontium vor, welche er zur Pariser Weltausstellung sendet. Seine Präparate erregen durch ihre Menge mit Recht das Staunen und zeugen genügend dafür, dass, wenn die alkalischen Erdmetalle irgend welche praktische Bedeutung erhalten, ihre Herstellung in grosser Menge möglich ist.
3. Joseph Messinger antwortet auf die Arbeit von W. Fresenius und L. Grünhut, in welcher diese Autoren die Methoden zur quantitativen Bestimmung der Salicylsäure kritisierend, sein Verfahren verurtheilen. Er beweist mit neueren Experimenten, dass sein Verfahren, falls man die experimentellen Bedingungen erfüllt, ausgezeichnete Resultate ergiebt.
4. Joseph Nuricsán bespricht die Daten der chemischen Analyse der Málnáser „*Siculia-Quelle*“, aus denen hervorgeht, dass das Wasser der „Siculia-Quelle“ zu den salzigen Mineralwässern gehört und dass seine Zusammensetzung der des Gleichenberger Wassers ähnlich ist.
5. Johann Schürger macht in seinem über „*Das Calciumamalgam*“ gehaltenen Vortrage die Verfahren bekannt, mit welchen ihm gelungen ist, krystallinisches Calciumamalgam von constanter Zusammensetzung herzustellen und bespricht dessen physikalische und chemische Eigenschaften.
6. Emerich Szarvasy trägt unter dem Titel: „*Ueber die Elektrolyse der Nitrogen-Hydrogen-Verbindungen*“ darüber vor, unter welchen Bedingungen Ammonia, Hydrazin, Azoimid und deren Salze, sowie die Salze des Hydroxilamin in Lösungen so zerfallen, dass an den Polen die die Bestand-

theile bildenden Elemente nach dem in der Moleküle gegebenen Verhältniss auftreten.

7. Alexius Sigmond giebt unter dem Titel: „*Daten zu den Anbauungsbedingungen zweier landwirthschaftlicher Pflanzen*" Rechenschaft über die Studien, welche er mit Mais und mit Tabak ausführte und welche Aufschluss über die Düngerbedürfnisse dieser Pflanze geben.

Sitzung den 20. Februar 1900.

1. Sigmund Neumann trägt unter dem Titel: „*Die Erkennung gefälschter Federn*" vor, dass man die Federn mit Stärke, Mehl, Barium- oder Caliumsulfat fälscht, damit sie schwerer werden. Die Stärke kann man unter Mikroskop oder mit Jodreactionen leicht erkennen, aber auf die in Wasser nicht auflösbaren festen Theile kann man nur aus der Gewichtszunahme der Asche schliessen; zu letzterem Zwecke muss man mindestens 10 g Federn verbrennen. Da aber die Verbrennung so vieler Federn wegen des grossen Umfanges der Feder überaus schwierig ist, so ist es zweckmässig, die Federn mit Alkohol zu befeuchten, da sie so zusammenschrumpfen und das Verbrennen hierdurch auch in verhältnissmässig kleinen Platinschalen gelingt, wenn wir den Alkohol anzünden und nach dessen Verbrennen die Veraschung durch untere Erwärmung der Schale vervollständigen. Der Ascheninhalt der von Sand und erdigen Substanzen befreiten Feder ist ungefähr 4 Proc.; und wenn nur ein bisschen mehr Asche vorhanden ist, so ist die Feder schon verdächtig und aus der Vermehrung um 2 Proc. kann man ganz sicher auf das Gefälschtsein der Federn schliessen.
2. Ignaz Pfeiffer macht unter dem Titel: „*Die Controle der Feuerungsanlagen*" bekannt, wie man die Feuerung theils auf thermometrischen Wege, theils durch die Bestimmung der Quantität des im Rauchgas enthaltenen Kohlendioxyd controllieren kann.
3. Karl Than (Präsident) liest den Brief Vant Hoff's vor, in welchem dieser der Fachsection für die Begrüssung anlässlich seines 25jährigen Jubiläums dankt.

Sitzung den 27. März 1900.

1. Ludwig Ilosvay bespricht in seinem über „*Die Eigenschaften der mit Hydrasin hergestellten Ammonia-Cuprolösung*" gehaltenen Vortrag, dass es ihm nicht gelungen ist, aus verschiedenen Cuprisalzlösungen weder mit Hydrasindioxyd noch mit salzsäurigem oder schwefelsäurigem Hydrasin solche Cuprolösungen herzustellen, welche für das Acetylen gerade charakteristische Reagentien wären, wie die mit salzsäurigem Hydroxilamin reducierten Lösungen. Die mit Hydrasin hergestellten Ammonia-Cuprolösungen geben zwar mit Acetylen auch Niederschläge, aber dieselben sind braun oder rotbraun, woraus hervorgeht, dass sie entweder anderer Zusammensetzung oder isomer zu dem seiner Farbe nach bekannten Cuproacetylen sind.

ist jedoch interessant, dass man aus den mit Hydrasin hergestellten Cuprolösungen entweder direct oder nach Vermengung mit Alkalimetallhydroxydlösung und nach Erwärmung einen schönen, auf der Glasfläche gut klebenden Kupferspiegel absondern kann.

2. Béla Lengyel giebt unter dem Titel: „*Ueber das radioactive Barium*" einen vorläufigen Bericht über diejenigen Studien, die er an Barium- und Uranverbindungen deshalb unternahm, damit er die Radioactivität des Bariums herstellen könne. Er kann gemäss seinen bisherigen Untersuchungen annehmen, dass das Radium und das Polonium, welche chemisch wirkende Strahlen aussenden, keine Elemente sind und dass sie mit demjenigen radioactiven Barium in Verbindung stehen, welches er herstellte. Bisher hat er schon mehrere radioactive Bariumverbindungen hergestellt, deren Wirkung auf photographische Platten er auch vorführte.

   Vincenz Wartha erinnert an solche Eigenschaften der Oxydgemenge des Erdmetalls, welche bezeugen, dass Béla Lengyel guten Spuren nachgeht.

   Alois Schuller ergänzte die vorgetragenen Erscheinungen der Radioactivität mit beachtenswerthen Bemerkungen.

3. Arthur Zaitschek trägt kurz den Inhalt einer in Verbindung mit Isidor Weiser verfassten Arbeit: „*Ueber die Bestimmung des Stärkeinhaltes des Futters*" vor. Der Werth der Arbeit wird dadurch erhöht, dass die Autoren solche Umstände berücksichtigen, welche die bisher bekannten Verfahren unverlässlich machten.

Sitzung den 27. April 1900.

1. Joseph Loczka berichtet über die chemische Analyse zweier *Magnesit*- und einer Bronzeantiquität. Das eine Magnesit war durch seinen reichen Eiseninhalt interessanter. Der Bronzgegenstand stammte vom Grunde der Donau und enthielt ziemlich viel Zinn und Zink und glich dadurch dem Messing.

2. Emerich Szarvasy spricht über „*Die Herstellung der Nitrogenhydride*". Er macht diejenigen Verfahren bekannt, welcher er sich bei der Herstellung des freien Hydroxylamins, des freien Hydrasins und des Asoimids bediente und trägt ausführlich vor, wie er das Verfahren von Wislicenus dahin modificierte, dass man das Natriumasoimid leicht in grösseren Quantitäten herstellen könne.

3. Ludwig Winkler trägt unter dem Titel: „*Die Bestimmung von Meniscuscorrectionen*" vor, wie er die Meniscuscorrectionen macht. Bunsen verfuhr so, dass er die Wölbung des in das Messglas gegossenen Quecksilbers mit Mercurichloridlösung horizontal machte und die Höhendifferenz zwischen der Wölbung und der Horizontalen ablas. Winkler füllt Glasröhren von verschiedenem Durchmesser und verschieden geschliffenen Enden mit Quecksilber, dann drückt er das Quecksilber herab, bis es horizontal liegt und liest jetzt die Höhendifferenz zwischen dem Ende

der Röhre und der durch die hervorstehende Wölbung des Quecksilbers gedachten horizontalen Höhe ab. Zwischen den Daten von Bunsen und Winkler zeigen sich keine grösseren Abweichungen.

4. Präsident Karl v. Than legt die bisherigen Uebereinkommen der *Internationalen Atomgewichtcommission* vor. Diese sind die folgenden: 1. Die ungarische Section, die Interessen der Anwendungen vor Augen haltend, stimmt dazu bei, dass bei der Berechnung der Atomgewichte zur Einheit das Atomgewicht des Oxygen: 16 dienen soll. 2. Sie stimmt auch dazu bei, dass man bei der Auswerthung der Atomgewichte als Princip befolge, dass die letzte Ziffer bis auf eine Einheit sicher sei. 3. Sie hat beschlossen, dass in der Centralcommission die ungarische Section durch Karl v. Than vertreten sei.

Sitzung den 29. Mai 1900.

1. Arthur Klein macht in seinem Vortrage: „*Ueber die Aenderung der freien Energie in einigen schwer lösbaren Salzbildungen*“ bekannt, dass seine mit Cupro-, Silber- und Bleisalzen unternommenen Experimente eine neue Bestätigung für die Helmholtz'sche Theorie lieferten, nach welcher als Maass der chemischen Verwandtschaft nur die Verminderung der freien — in Arbeit umsetzbaren — Energie dienen kann, und also nicht die Reactionswärme, wie man dies früher glaubte. Während seiner Untersuchungen fand er neben andern interessanten Daten drei endothermische Reactionen, welche aus sich selbst hervorgehen.
2. Joseph Loczka macht die Daten der chemischen Analyse eines vom Botesberg stammenden Tetraëdrites bekannt.
3. Karl Zimányi trägt die krystallographischen Eigenschaften desselben Tetraëdrites vor. Die Goldminen des Botesberges befinden sich in den Sandsteinen der Karpathen; man findet ausser dem daselbst so besonders schön vorkommenden Hessit (Tellursilber) noch schön krystallisiertes Tetraëdrit, dessen Krystalle auf weissem oder halb durchsichtigem Quarz sitzen. Man konnte durch Messung insgesammt 12 Formen erkennen. Die Combinationen haben alle den Charakter des Tetraëders. Neben den allereinfachsten Combinationen sind auch solche, die sehr viele Seiten haben, auf welchen man 7—10 einfache Formen erkennen kann. Die Zwillingskrystalle sind seltener.

Fachconferenz für Physiologie.

Sitzung den 16. Januar 1900.

1. Franz Tangl bespricht unter dem Titel: „*Kalorimetrische Untersuchungen* (mit Vorführung der modificierten Berthelot-Mahler'schen kalorimetrischen Bombe)“ ausführlich die Verfahren, mit welchen man die Berthelot-Mahler'sche Bombe zu physiologischen Untersuchungen verwerthen kann. Mit solchen kalorimetrischen Messungen kann man den Energiewechse-

der Organisation pünktlich bestimmen, besonders, wenn wir damit zusammen auch den Stoffwechsel beobachten. Vortragender führt einige Resultate der an Ochsen und an Geflügel unternommenen kalorimetrischen Untersuchungen vor.

2. Dr. Samuel Scheiber führt unter dem Titel: „*Beiträge zur Anatomie und zur physiologischen Function des musculus sternocleidomastoideus*“ aus, dass hinsichtlich der physiologischen Function des sternocleidomastoideus die Anatomen und die Kliniker principiell abweichende Ansichten haben. Erstere lehren in neuerer Zeit, dass der sternocleidomastoideus bei seiner beiderseitigen Function den Kopf nach hinten und nicht wie man früher glaubte nach vorn und nach unten zieht, und dass so sein alter Name: „Kopfnicker“ nicht entsprechend ist. Duchenne hat schon vor längerer Zeit festgestellt, dass er mit seiner beiderseitigen Function den Kopf aus seiner geraden Stellung nach vorn und nach unten zieht und wenn der Kopf schon in einer nach hinten gebeugten Lage ist, denselben noch mehr nach hinten beugt. Bei seiner einseitigen Funktion beugt er aber den Kopf immer nur nach vorn und nach unten. Diese Meinungsverschiedenheiten veranlassten Scheiber, dass er die Frage eingehend untersuchte; über seine diesbezüglichen Forschungen gab er der Fachsection Rechenschaft.

Sitzung den 15. Mai 1900.

1. Franz Tangl trägt „*Ueber die Arbeit des senilen Herzens*“ vor. Das eine Hauptresultat seiner Untersuchungen ist, dass die Arbeitskraft des senilen Herzens bei normalen Verhältnissen die vorkommenden Hindernisse zu überwältigen fähig ist und die Function des Herzens ist dementsprechend compensiert. Die Herzthätigkeit reicht beim Vollführen grösserer Muskelarbeit nicht aus und es treten die auf die Gefriermethode der Incompensation beruhenden Erscheinungen, manchmal begleitet von den klinischen Symptomen der Incompensation, in den Vordergrund. Auch unterscheidet sich das senile Herz von dem hypertrophischen und vom gesunden Herzen, da es entweder keine Ersatzkräfte zur Vollführung äusserer Arbeit zur Verfügung hat, oder diese Ersatzkräfte nur in überaus schwachem Maasse besitzt. Die im senilen Herzen mehr oder weniger immer vorhandenen organischen Veränderungen binden den grössten Theil des vorhandenen Energiegehaltes und so bleibt für die äussere Arbeitsleistung wenig Energie übrig. Wenn aber trotzdem zur äusseren Arbeit der grösste Theil der vorhandenen Energie benutzt wird, so ist das Herz zur Aufrechterhaltung der Blutcirculation unfähig, da es über genügende Energie nicht verfügt. Es ist weiterhin zu beachten, dass im Greisenalter die Gesammtenergie des Körpers schon infolge der mässigeren Ernährung abnimmt. Jede Veränderung im Herzen beansprucht vom Herzen grössere Arbeitsleistung. Also ist im Greisenalter, da diese Veränderungen nie fehlen, jedenfalls mit 57 kgmm mehr Arbeit nöthig, dass das Herz das

Blut durch das Herz durchtreiben soll. Das Herz muss um so grössere Arbeit leisten, je grösser seine Veränderungen sind und je grössere Arbeit infolgedessen zur Bekämpfung der Herzhindernisse benöthigt wird. Die Arbeitsvergrösserung ist bei kleinen Veränderungen gering und der Zustand des senilen Herzens ist nur wenig ungünstiger als der des gesunden Herzens. Eine solche Person verträgt die Arbeit schwerer als eine gesunde, obzwar bis zu einem gewissen Grade der grössere Energiebedarf mit bedeutender Ernährung zu ersetzen ist. Sehr grosse Herzveränderungen machen die Verrichtung jeder äusseren Muskelarbeit unmöglich. Weiterhin ist es festgestellt, dass die Endoarteriitis der Adern im Greisenalter zur Bewältigung der im ganzen Adersystem vorhandenen Hindernisse einer grösseren Arbeit bedarf als 758 kgmm, welche beim gesunden Herzen schon ausreichend ist.

2. Ladislaus Jacob spricht über „*Die Temperatur der alten Personen unter gesunden und kränklichen Umständen*". Nach einer kurzen Erörterung der Bedeutung der Thermometrie und der bisherigen Untersuchungen weist er darauf hin, dass es bis zum heutigen Tage nicht festgestellt ist, welche die obere Grenze der physiologischen Temperatur ist, und dass, obzwar sich bei mittelalten Personen viele mit dieser Frage beschäftigten, die Sache bei älteren Personen noch weniger aufgeklärt ist. Wunderlich nimmt an, dass die Temperatur der alten Personen etwas höher ist als die der mittelalten, hingegen hat Vortragender für dieselbe nach seinen im Ofner Armenhause unternommenen Experimenten das Gegentheil gefunden; er fand, dass bei über 60 Jahre alten Personen das tägliche Maximum der Temperatur 37° C. nicht erreicht, also wenn diese höher ist, sie als fieberisch zu betrachten ist. Es ist bei der im Vergleich geringen Oscillation auffallend, wie oft der typus inversus bei Greisen vorkommt: das Maximum am Morgen und das Minimum am Abend.

Diejenigen physiologischen Wirkungen, welche die Temperatur wesentlich beeinflussen, wie z. B. die Arbeit, verursacht bei Greisen unter denselben Umständen viel kleinere Veränderung der Temperatur als bei mittelalten Personen.

Vortragender bespricht dann die unter krankhaften Verhältnissen eintretenden Abweichungen. Die fieberische Temperatur der alten Personen erreicht selten einen sehr hohen Grad, hingegen kommt der Collapsus, die bedeutende Abnahme der Temperatur, häufig vor.

Er erwähnt die im Ofner Armenhause gemachte interessante Erfahrung, dass, während in der Umgebung viele typhus abdominalis-Fälle vorkamen und sogar ein Diener des Hauses daran starb, unter den Alten überhaupt kein Typhusfall war.

Endlich weist er darauf hin, dass die Schnelligkeit des Pulsschlages der Alten mit der Temperatur nicht in jenem Verhältniss steht, welches man bei den mittelalten Personen findet; sie ist gewöhnlich kleiner und

die Schnelligkeit des Pulsschlages ist das Symptom der für die fieberischen Krankheiten grössten Gefahr: der Schwäche des Herzmuskels.

3. Géza Kövesi hebt in seinem Vortrage: „*Ueber den Eiweissstoffwechsel im Greisenalter*" jene Mängel hervor, welche in der Lehre über den Eiweissstoffwechsel zu finden sind. Hauptsächlich ist die sehr wichtige Frage, in welchem Maasse die im Greisenalter zu beobachtenden atrophischen Processe durch die Veränderung, eventuell durch die Störung des Stoffwechsels beeinflusst sind, noch unaufgeklärt. Diese Mängel machen das exacte Studium des Stoffwechsels im Greisenalter erforderlich; diesen Zweck verfolgte der Vortragende für den Eiweissstoffwechsel und fand wesentliche Abweichungen gegenüber dem normalen Nitrogenstoffwechsel.

Die Absorption, d. h. die Ausnützung der Eiweissstoffe litt in der Darmröhre gar nicht, da die Quantität des täglich mit dem Darmkoth ausgeleerten Nitrogens zwischen 3—5 g schwankte. Das Rubner'sche Gesetz, nach welchem der Caloriebedarf des menschlichen Organismus von der Grösse der Körperoberfläche und deren Verhältniss zu einander abhängen soll, verliert im Greisenalter seine Gültigkeit, da die untersuchten Personen bei täglicher Einnahme von 30 g Eiweiss (25 Calorien per Kilo) nicht nur in Nitrogengleichgewicht kamen, sondern es war auch Eiweisszurückhaltung mit Körpergewichtzunahme vereint zu beobachten.

Vortragender führt auf Grund seiner experimentellen Resultate aus, dass sowohl der Eiweissbedarf, wie der Caloriebedarf des senilen Organismus bedeutend abnahm Demzufolge zeigt der Eiweissstoffwechsel im Greisenalter nur quantitative, aber keine qualitativen Unterschiede.

Diese Abweichungen vom Normalen beweisen die Veränderungen in den biologischen Verhältnissen des senilen Zellenprotoplasmas, nämlich die Eiweiss auflösende Befähigung des letztern nahm bedeutend ab, und dieser Umstand spielt beim Hervorbringen der atrophischen Processe im Greisenalter eine erhebliche Rolle.

E) Conferenz der vereinten Sectionen.

Sitzung den 17. October 1900.

1. Alexander Kalecsinszky trägt über „*Die Messung hoher Temperaturen*" vor und zeigt gleichzeitig die hierfür dienenden Apparate.

Sitzung den 21. November 1900.

1. Dr. Paul Ranschburg (Nervenarzt) hält über „*Die Untersuchung der Erinnerungsfähigkeit*" einen Vortrag und führt den Apparat vor, welchen er zu diesem Zwecke construierte. Seine Untersuchungen führen die exacte Messmethode auch in den die Erinnerung behandelnden Theil der Psychophysik ein.

JAHRESBERICHT DES GENERALSECRETÄRS COLOMAN VON SZILY.

(Gelesen in der Generalversammlung vom 6. Mai.)

Die ungarische Akademie der Wissenschaften hat im Jahre 1899 im ganzen 39 öffentliche Sitzungen gehalten, und zwar 26 Klassensitzungen, 12 Allgemeinsitzungen und eine Generalversammlung. Die Zahl der Vorlesungen betrug 93.

Der grösste Theil dieser Vorlesungen (52), mehr als die Hälfte des ganzen, fällt auf die III. Klasse. Aus dem Gebiete der Mathematik hielten unsere Collegen Julius König, Josef Kürschák und Gustav Rados Vorlesungen; aus dem der Physik und Chemie Rudolf Fabinyi, Isidor Fröhlich, Wilhelm Hankó, August Heller, Ludwig Ilosvay, Rudolf Kövesligethy, Paul Pléss und Alois Schuller; aus dem der Zoologie: Eugen Daday und Alexander Mocsáry; aus dem Gebiete der Botanik Julius Klein, Alexander Mágócsy-Dietz und Moritz Staub; aus dem der Mineralogie und Geologie Josef Krenner und Ludwig Lóczy; aus dem Gebiete der ärztlichen Wissenschaften Árpád Bókay, Anton Genersich, Andreas Högyes, Karl Kétly, Karl Laufenauer, Adolf Ónodi, Wilhelm Schulek und Ludwig Thanhoffer. Auf das technische Gebiet entfiel nur eine Vorlesung, und zwar der Antrittsvortrag unseres Collegen, Architekt Professor Emerich Steindl, über das grösste Werk seines Lebens: „Unser neues Parlamentshaus."

In den Sitzungen der ersten Klasse hielten unsere Collegen Josef Bayer, Zsolt Beöthy, Johann Csengeri, Julius Gyomlay, Franz Kozma, Ignatz Kunos, Albert Lehr und Aron Szilády aus dem Gebiete der schönen Wissenschaften und der Literatur Vorträge, als Gäste Árpád Kégl und Johann Váczy. Diese Vorträge bezogen sich natürlicherweise hauptsächlich auf die ungarische Literatur und auf solche Werke fremder Sprachen, welche in ungarischer Uebersetzung erschienen sind. Ebenso waren die Vorträge unserer Collegen Ignatz Halász, Ignatz Kunos, Sigmund Simonyi, Emil Thewrewk von Ponor, Julius Zolnay und Johann Melich dem Gebiete der ungarischen Sprachwissenschaft entnommen, während der Antrittsvortrag des ord. Mitgliedes Anton Bartal sich auf die lateinische Sprache in Ungarn bezog.

Die II. Klasse hatte im vergangenen Jahre weniger Vorträge als gewöhnlich auf die Tagesordnung gesetzt. Der grösste Theil dieser Vorlesungen war der allgemeinen Geschichte oder der Kulturgeschichte gewidmet, so die Vorträge von Ignatz Acsády, Alfred Ballagi, Remigius Békefi, Johann Karácsonyi, Heinrich Marczali, Florian Mátyás, Leopold Óváry, Julius Schwarcz, Karl Tagányi, Gabriel Téglás und Eduard Mahler, und nur der Vortrag unseres Collegen Zoltán Ráth war dem Gebiete der Socialwissenschaft entnommen.

In den Ausgaben unserer Akademie sind 48 Werke erschienen, welche 885 Druckbogen umfassten. Hier kann ich natürlich nur einige erwähnen. Das Ehrenmitglied Karl Szász vollendete sein grosses Unternehmen, die Uebersetzung von Dante's „Göttlicher Komödie", indem er mit dem, im vorigen Jahre erschienenen dritten Theil „Das Paradies" dies unsterbliche Werk in ungarischer Sprache, in der dem Originale gleichen Versform, vollendete. Von dem preisgekrönten Werke des Professors Béla Jánossy „Zur Geschichte der Aesthetik" ist der erste Theil, welcher die Aesthetik der Griechen enthält, erschienen. — Aus dem Briefwechsel Franz Kazinczy's, dieser wichtigen Forschungsquelle unserer Literaturgeschichte, ist der IX. Band, von Johann Váczy redigiert, erschienen. — „Das Archiv des ung. königl. Patronatsrechtes" von dem ord. Mitglied Wilhelm Fraknoi. — Von dem ord. Mitglied Emerich Hajnik: „Die Organisation der ungarischen Gerichtsbarkeit und die Processordnung unter den Königen aus dem Hause der Arpáden und deren Nachfolgern". Es ist dies nicht nur ein juridisches Werk wie man es auch in der Literatur des Auslandes kaum findet, sondern es gewährt uns auch in unsere Staatsorganisation und unser Regierungssystem im Mittelalter einen tiefen Einblick und ist uns ein Schlüssel zum Verständniss unserer Staatsarchive. — „Die Gesetze der Debrecziner und Sárospataker reformierten Hochschulen im XVII. Jahrhundert" von dem corresp. Mitglied Remigius Békefi, sind ein wichtiger Beitrag zu unserer Kulturgeschichte. — Von Ladislaus Réthy corresp. Mitglied ist das erste Heft des ersten Bandes der Numismatik, welche sich mit dem Zeitalter der Könige aus dem Hause der Arpáden beschäftigt, erschienen; des raschen Absatzes dieses Heftes halber mussten neue Exemplare nachgedruckt werden. — Von den auf den Lebenslauf Nikolaus Zrinyi's, des Helden von Szigetvár bezüglichen Briefen und Dokumenten ist der II. Band unter der Redaction von Samuel Barabás erschienen. — Das preisgekrönte Werk Geyza Ferdinandy's: „Die goldene Bulle." — „Die Geschichte des Unterrichtswesens in Ungarn zur Zeit Maria Theresia's" von Ernst Fináczy. — Nicht nur die I. und II., sondern auch die III. Klasse veröffentlichte Werke, welche das Interesse der weitesten Kreise erweckten, indem sie unter der Redaction von Franz Schmidt und Paul Stäckel den Briefwechsel zwischen Bolyai und Gauss — diesen zwei auf gleicher Höhe stehenden Geistesgrössen — von den Jahren 1797—1853 veröffentlichte; weiter erschien das preisgekrönte Werk von Wilhelm Hankó und Johann Gáspár: „Ueber die chemische Zu-

sammensetzung des ungarischen Weizens", welches eine Frage, die auch im Auslande viel erörtert wurde, entschied.

Auch kann ich die freudige Nachricht bringen, dass manches von langer Zeit begonnene sehnlichst erwartete Werk vollendet wurde. Die neue Ausgabe der „Regeln der ungarischen Rechtschreibung" wird jetzt, nachdem die Meinungsverschiedenheit der I. Klasse und der sprachwissenschaftlichen Commission ausgeglichen ist, in nicht zu ferner Zeit vor die gesammte Akademie gelangen und im Herbste dieses Jahres erscheinen. — Nach Aufforderung des Herrn Ministers Julius Wlassisz und mit Hülfe des Ministeriums für Cultus und Unterricht hat die sprachwissenschaftliche Commission ein Wörterbuch verfertigt, welches den Zweck hat, die in den parlamentarischen Reden und in der Journalistik überwuchernden Fremdwörter auszurotten; mit der Redaction betraute sie Herrn Wilhelm Tolnai. Auch dieses Wörterbuch wird im Herbste dieses Jahres erscheinen.

Von dem *Wörterbuche der Gewerbe*, unter der Redaction des Johann Frecskay, sind 18 Hefte schon erschienen, und nach dem gegenseitigen Uebereinkommen des Autors und des Herausgebers wird das vollständige Werk zu Ende dieses Jahres das Licht der Welt erblicken. — Von dem grossen Werke unseres Collegen Anton Bartal, dem *Wörterbuche des Latein Ungarns*, welches nicht nur die heimischen, sondern auch die gelehrten Kreise des Auslandes mit Interesse erwarten, sind 30 Bogen schon ausgedruckt, welche von Seite des Herausgebers in der Heimath Ducange's bei Gelegenheit der Weltausstellung erscheinen werden. — Die Millenniumsausgabe der Akademie: *Die Quellen der Landnahme Ungarns* wurde, wie wenn das Schicksal es so gewollt hätte, erst heuer im Jahre des thatsächlichen Vollendens des tausendjährigen Besitzes, fertig. Für die auf 104 Bogen sich belaufende grosse Sammlung der Quellen hat die byzantinischen Heinrich Marczalli und Rudolf Vári, die orientalischen Graf Géza Kuun, die occidentalischen ebenfalls Heinrich Marczalli, die slawischen Quellen Vratislav Jagić und Ludwig Thallóczy, die heimischen endlich Ladislaus Fejérpataky und Heinrich Marczali und die heimathlichen Andenken aus der Zeit der Landnahme Josef Hampel aufgearbeitet. Die Redaction der Ausgabe aber haben der verstorbene Alexander Szilágyi und Julius Pauler übernommen. Jetzt ist nur mehr das Vorwort und das Inhaltsverzeichniss zu vollenden, so dass dies grosse Werk auch in kurzer Zeit erscheinen wird. Unser College Julius Pauler wurde damit betraut, ein Werk über „Das Zeitalter der Heerführer" zu schreiben; dies soll eine Ergänzung seiner Arbeit „Ueber die Könige aus dem Hause der Arpáden" bilden. Auch dies Werk ist schon unter der Presse und wird in der Reihe des dieses Jahr erscheinenden „Bücherausgabe-Unternehmens" (Könyvkiadó Vállalat) erscheinen.

Ich habe mich bemüht, meinen diesjährigen Jahresbericht so kurz als nur möglich zu fassen, und es ist nicht mein Fehler, sondern das Verdienst unserer Akademie und ihrer Mitglieder, dass dieser trotzdem etwas umfangreich wurde. Unser Zeitalter — das Zeitalter der Maschinen — ist geneigt

zu glauben, dass dort, wo kein Getöse zu hören ist, auch nicht gearbeitet wird; und doch zeitigt die stille das Getöse meidende Arbeit, wenn sie andauernd ausgeübt wird, ebensolche, ja sogar noch sicherere Früchte.

Das verflossene Jahr war nicht nur ein Jahr der Arbeit, es war auch ein Jahr der Feste. An den literarischen Festen war unsere Akademie überall vertreten. — Bei dem in Gran stattgefundenen Knauzfeste war unsere Akademie durch Anton Pór vertreten, bei der Enthüllung des Bessenyey-Monumentes in Nyiregyháza durch Zsolt Beöthy, bei der Enthüllung des Szilágyi-Monumentes durch Andreas György, bei Gelegenheit der Enthüllung der Gedenktafel für Albert Pálfy in Békés-Gyula durch Paul Gyulai, bei derjenigen, welche dem Andenken August Trefort's gewidmet ist, vertrat Géza Ballagi unsere Akademie, bei dem zu Ehren des serbischen Dichters Johann Ioanovics veranstalteten Jubiläum war Oskar Asbóth erschienen, zu dem elfhundertjährigen Jubiläum des Paulus Diaconus in Cividale wurde Leopold Ováry gesandt, bei der Enthüllung der Büste Gabriel Szarvas' in Budapest erschien Paul Gyulai als Stellvertreter des Generalsecretärs, bei der in Segesvár veranstalteten Petöfi-Feier war Michael Zsilinsky, bei der Budapester Petöfi-Feier Eugen Rákosi und Josef Bayer zugegen. Zu der in Nagyszalonta stattgehabten Eröffnung des Aranyzimmers erschienen Karl Szász und Josef Lévay; bei der in Eperies stattgefundenen Petöfi-Feier war unser Kollege Franz Herczeg erschienen, und bei dem in Rom zusammengetretenen orientalischen Congress repräsentierte unsere Akademie Ignatz Goldziher.

Doch wir haben auch traurige Tage zu verzeichnen, Tage, an welchen wir den Einen oder Anderen unserer abgeschiedenen Collegen zu Grabe tragen oder seinen Tod anzeigen mussten. Von den ordentlichen Mitgliedern sind Géza Mihalkovics und Julius Schwarcz gestorben, beide auf der Mittagshöhe ihres Wirkens. Beide hervorragende Gelehrte: der Eine auf dem Gebiete der Anatomie, der Andere auf dem der altgriechischen Geschichte. Der erstere baute mit den Werkzeugen der Forschung weiter fort auf dem festen Grunde, der letztere zertrümmerte mit den, durch die Induction der Dialektik ihm gebotenen Waffen das alte Gebäude, um an dessen Stelle ein neues aufzurichten. Die Wissenschaft nimmt aber nicht nur das Weiterbauen, sondern auch das Niederreissen, wenn dies im Interesse der Wahrheit geschieht, mit Dank an. Diesen Dank sprachen nicht nur wir in unseren Sitzungen aus, es gab diesem auch an der Bahre des Einen Professor Wilhelm Waldeyer, der Secretär der Berliner Akademie, Ausdruck.

Von den correspondierenden Mitgliedern sind drei gestorben: Justinian Hollósy, Abt von Dömölk, anfangs selbst ein fleissiger Arbeiter auf dem Gebiete der physikalischen Literatur, wurde er später, als hoher geistlicher Würdenträger, ein wahrer Beschützer der Wissenschaft; Béla Majláth, der einstige Custos der Bibliothek des Nationalmuseums, der sich mit Geschichte und Geologie erfolgreich befasste; und weit über dem Ocean, in einem

entfernten Welttheile, fand ein reich begabtes, jedoch trauriges Leben sein frühes tragisches Ende durch den Tod von KARL PULSZKY.

Unter den auswärtigen Mitgliedern starben: FRANZ BOCK, Abt von Aachen, Kunsthistoriker und der erste sachkundige Gelehrte, der die heilige ungarische Krone beschrieb; ROBERT BUNSEN, der grosse Chemiker der Heidelberger Universität, dessen Name mit so vielen Entdeckungen eng verknüpft ist und dessen Andenken auch heute noch so viele Schüler dankbar bewahren; BERTHOLD CAPASSO, italienischer Geschichtsschreiber, Präsident der Neapolitanischen Akademie; ERNST KUNIK, russischer Staatsrath, der Geschichtsschreiber der mit der ungarischen Nation verwandten Völker; ANTON PATTERSON, Professor der englischen Sprache an der Budapester Universität, welchen unsere Akademie wegen seiner in englischer Sprache geschriebenen Studien über Ungarn zu ihrem Mitgliede wählte.

Segnen wir das Andenken der Dahingeschiedenen und heissen wir die neu Angekommenen willkommen.

A. Vermögen der Akademie am 31. Dezember 1899.

I. Activum.

1. Werthpapiere	3 456 924	Kron.	24 H.
2. Gebäude der Akademie, Bibliothek, Einrichtung	2 000 000	„	— „
3. Aeussere Stiftungen	165 492	„	66 „
4. Rückständige Zinsen der obigen Fonds	1 276	„	16 „
5. Forderungen	155 133	„	68 „
6. Im Vorhinein für 1900 bezahlte Gebühren	4 279	„	35 „
7. Ausstehende Vorschüsse	2 007	„	98 „
8. Rückständige Hausmiethe	110	„	— „

II. Passivum.

1. Die von der Akademie verwalteten Fonds	355 273	„	32 „
2. Verschiedene Forderungen	87 018	„	72 „
3. Für das Jahr 1900 im Voraus bezahlte Hausmiethe	3 140	„	07 „
4. Gesammtvermögen	5 339 791	„	96 „

B. Ausgaben der Akademie im Jahre 1899.

1. Personalbezüge	60 796	„	4[illegible]
2. Almanach, Anzeiger u. s. w.	8 810	„	3[illegible]
3. I. Classe und deren Commissionen	33 961	„	8[illegible]
4. II. „ „ „ „	69 294	„	[illegible]
5. III. „ „ „ „	32 759	„	
6. Wörterbuch-Commission	6 317	„	
7. Bücherausgabe-Unternehmungen	8 000	„	
	219 940	Kron.	

		219 940	Kron.	54 H.
8.	Für das Graf Széchenyi-Museum	1 105	„	22 „
8 a.	Ausgabe der Correspondenz Kazinczy's aus dem Kazinczy-Fonds u. a.	51 399	„	92 „
8 b.	Szinnyei: Biographien ungarischer Schriftsteller	2 400	„	— „
9.	Preise	10 511	„	22 „
10.	Budapesti Szemle (Budapester Revue)	8 000	„	— „
11.	Für ausländische Publicationen der ungarischen Literatur	1 948	„	— „
12.	Naturwissenschaftliche Berichte	3 000	„	— „
13.	Bibliothek und Archiv	12 999	„	20 „
14.	Instandhalten der Gebäude	19 742	„	48 „
15.	Advocaturs-Kanzlei und andere Ausgaben	8 594	„	44 „
16.	Steuer	31 082	„	54 „
17.	Interessen der Stiftungen und Fonds	6 454	„	60 „
18.	Rückerstattung an das Grundcapital	3 600	„	— „
19.	Unvorhergesehene Ausgaben	1 492	„	52 „
20.	Ausgaben bei Gelegenheit der Milleniumsfeier	651	„	— „
	Ausgabe	382 921	Kron.	68 H.

C. Einnahmen der Akademie im Jahre 1899.

1.	Zinsen der Stiftungen, Werthpapiere, Hausmiethe u. s. w.	242 743	„	96 „
2.	Dotation	84 000	„	— „
3.	Ertrag der Immobilien	189	„	88 „
4.	Vermächtnisse und Stiftungen	79 668	„	36 „
5.	Beitrag der Alterthums- und Physiologischen Gesellschaft	1 050	„	— „
6.	Differenz des Curses der während des Jahres gekauften Werthpapiere	5 925	„	— „
7.	Kazinczy-Fond	5 399	„	92 „
8.	Rückzahlung der Classen	19 212	„	18 „
9.	Neue Stiftungen	9 000	„	— „
10.	Immobilien von Kazinczy	16 754	„	— „
	Einnahme	463 943	Kron.	30 H.

Einnahme	463 943	Kron.	30 H.
Ausgabe	382 921	„	68 „
Zunahme des Capitals	81 021	„	62 „

Die Zahl der Mitglieder betrug am 1. Januar 1900 insgesammt 234. Von diesen waren 24 Ehrenmitglieder, 54 ordentliche und 140 correspondierende Mitglieder.

Der Directionsrath bestand aus 24 Mitgliedern.

Auf die einzelnen Classen vertheilen sich die Mitglieder wie folgt: Die I. (sprach- und schönwissenschaftliche) Classe hatte 6 Ehrenmitglieder, 11 ordentliche und 31 correspondierende Mitglieder.

Die II. (philosophisch-historische) Classe hatte 8 Ehrenmitglieder, 23 ordentliche und 52 correspondierende Mitglieder.

Die III. (mathematisch-naturwissenschaftliche) Classe zählte 8 Ehrenmitglieder, 20 ordentliche und 57 correspondierende Mitglieder.

Bibliothek.

Für die Bibliothek wurden im Jahre 1899 insgesammt 12 999 Kron. 20 H. verausgabt.

Die Zahl der geordneten Fachwissenschaften betrug 53. Diese enthalten 61 611 Werke, welche sich auf die verschiedenen Fächer in der folgenden Weise vertheilen: Bibliographie 1156, Encyclopädie 142, Philosophie 1394, Mythologie 117, Theologie 4854, Pädagogik 1926, Schönwissenschaften 565, Anthropologie 325, Jurisprudenz 1243, ungarisches Recht 1550, Politik 2365, ungarische Politik 1680, Geschichte 5800, ungarische Geschichte 2892, ungarische Landtagssitzungen 95, Biographien 2599, Geographie 1070, ungarische Geographie 456, Landkarten 927, Reisebeschreibungen 1208, Statistik 709, Schematismen 114, Kriegswissenschaft 680, Alterthumskunde 1386, Numismatik 176, Mathematik und Astronomie 1141, Naturwissenschaft 963, Chemie 424, Naturgeschichte 133, Zoologie 495, Botanik 442, Mineralogie und Geologie 514, Oeconomie 3539, Medicin 2501, Sprachwissenschaft 2078, classische Philologie 737, griechische Schriftsteller 827, lateinische Schriftsteller 894, neu-lateinische Schriftsteller 796, ungarische Sprachwissenschaft 473, alte ungarische Literatur 658, ungarische Literatur 3069, germanische Literatur 1598, französische Literatur 700, italienische und spanische Literatur 254, slawische Literatur 406, orientalische Literatur 1711, Incunabeln 356, Ausgaben von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften 366, Ausgaben der ungarischen Akademie 360, ausländische Zeitschriften 196, inländische Zeitungen und Zeitschriften 373.

Der Fachkatalog besteht aus 109 Bänden und 42 Zetteln. Der grosse Katalog besteht aus 101 Zettelkapseln.

Zunahme der Bibliothek im Jahre 1899:

a) Durch Kauf 389 Werke, b) Pflichtexemplare der Druckereien 324 7790 Werke, 2063 Bände, 6335 Hefte, 204 Musikalien, 5 Bände, 240 Hefte und 47 Landkarten.

Die Zahl der ausländischen Zeitschriften beträgt 112.

Im Lesesaal der Bibliothek erschienen im Jahre 1899 6163 Leser, welche 7228 Werke benützt haben. Zum Eintritt in den Lesesaal wurden 699 Karten vertheilt. Ausgeliehen wurden 1218 Werke, die auf amtlichem Wege in die Provinz ausgeliehenen Werke mit eingerechnet.

ZUM GEDÄCHTNISS VON AUGUST HELLER.

Den 4. September 1902 verschied in Budapest der Geschichtschreiber der Physik, August Heller, Oberbibliothekar der Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Im Hingeschiedenen hat die wissenschaftliche Welt einen tiefdenkenden Gelehrten und unermüdlichen Schriftsteller verloren, von dem sie noch umfangreiche und schwierige Arbeiten hoffte, als ihn die todbringende Krankheit seiner Kräfte beraubte. Diese „Berichte" haben in ihm ihren Redacteur zu betrauern und so doppelten Grund seines Lebens und Wirkens zu gedenken.

August Heller wurde den 6. August 1843 in Budapest geboren, besuchte ebendort die Realschule im IV. Bezirk und seit 1862 die technische Hochschule, wo er sich zum Ingenieur ausbildete. Als er aber 1866 absolvierte, erkannte er bald, dass er innere Befriedigung nur im Lehramte finden könne. Er wurde darum 1867 Assistent des Physikers Josef Sztoczek, des damaligen Directors der technischen Hochschule, und hat im Juli 1868 die Professorenprüfung für Physik und Mathematik mit Vorzug bestanden.

Im Herbste 1869 sandte man ihn mit staatlichem Stipendium an die Universität Heidelberg, wo er ein eifriger Schüler Kirchhoff's und Helmholtz' war. Ersterer wählte ihn zum Assistenten, eine Auszeichnung, die Heller bis an sein Ende mit Stolz erfüllte. Überhaupt war diese Studienzeit eine seiner schönsten Erinnerungen, und noch in seinen letzten Jahren verweilte sein Blick gern auf einer aussergewöhnlich grossen Photographie Heidelbergs, die sein Schreibzimmer schmückte. In seinen Schriften hat er nicht nur der Hochachtung und Liebe zu Kirchhoff in einem Nekrologe Ausdruck verliehen (ungarisch in „*Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz*"* I. Heft; deutsch in der „*Beilage der Münchener Allg. Zeitung*"), sondern er gedachte auch seiner berühmten Mitschülerin Sonja Kowalewsky in der „*Budapesti Szemle*".**

Als der deutsch-französische Krieg seinen Studien in Deutschland plötzlich ein Ende machte, kehrte Heller nach Budapest zurück und wurde im October 1870 zum Professor der Physik und Mathematik an der Realschule im II. Bezirk ernannt. Er bekleidete diese Stelle bis 1898. Von

* *Ergänzungshefte der Naturwissenschaftlichen Zeitschrift.*

** *Budapester Rundschau.*

Mitte März 1872 bis zum Schlusse des Schuljahres 1874/5 war er auch Privatdocent an der technischen Hochschule und 1875—1895 Bibliothekar der Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft.

Im Jahre 1872 wurde ihm vom Kultusminister August Trefort die Stelle eines ord. Professors an der neuen Universität in *Kolozsvár* (Klausenburg) angeboten, jedoch Heller wollte die Hauptstadt wegen ihrer reichhaltigeren Bibliotheken nicht verlassen. In Budapest aber erwarteten ihn wiederholt bittere Enttäuschungen und Zurücksetzungen, so oft er bei Besetzung höherer, seinem Wissen entsprechenden Stellen in Betracht gezogen wurde, bis dann im Jahre 1894 die Ungarische Akademie der Wissenschaften, der er seit 1887 als correspondierendes und seit 1893 als ordentliches Mitglied angehörte, ihn zum Oberbibliothekar wählte.

Als Mitglied und Oberbibliothekar der Akademie hat Heller von dieser, wie auch von der ungarischen Regierung, eine Reihe ehrenvoller Aufträge erhalten, den ersten im Jahre 1895. Es schenkte damals der Professor Dr. med. Julius Elischer die von seinem Onkel, dem Advokaten Dr. Balthazar Elischer, hinterlassene Goethe-Sammlung der Akademie. Mit ihrer Ordnung wurde Heller betraut und im Juli 1895 nach Frankfurt a. M. und Weimar gesandt, um die dortigen Goethe-Sammlungen zu studieren. Das von Heller eingerichtete Goethe-Zimmer wurde 1896 eröffnet und ist wöchentlich dreimal dem Publikum zur Ansicht und zum Studium unentgeltlich zugänglich.

Im Juli 1896, im Oktober 1898 und im Juni 1900 vertrat Heller mit Theodor Duka die ungarische Regierung an den Konferenzen, welche die Anfertigung eines internationalen naturwissenschaftlichen Catalogs in London besprachen. Jedesmal hat er an den Debatten lebhaften Antheil genommen, und im October 1898 wurde er zum Secretär des ungarischen Regionalbureaus gewählt.

Kaum war er das drittemal von London zurückgekehrt, wurde er nach Paris gesandt, wo er die Ungarische Akademie der Wissenschaften an der Conferenz der internationalen Association der Akademien vertrat. Es war dies seine letzte grosse Reise. Als die erste Generalversammlung der Association im Jahre 1901 vom 16. bis 20. April in Paris tagte, erlaubten es ihm seine gesunkenen Kräfte nicht mehr daran theilzunehmen.

Im August 1900 merkten die Angehörigen und Collegen an dem von Paris heimgekehrten Gelehrten eine Veränderung, die anfangs von keiner Seite ernst genommen wurde; um Weihnachten jedoch hatte seine Krankheit schon einen ernsten Charakter angenommen, und sein Hausarzt befürchtete mit Recht, es sei dies der Beginn eines Hirnleidens. Als er im Januar 1901 der Akademie sein Referat über die letzte Londoner Conferenz vorlegte, merkte man seiner Sprache das schwere Leiden schon an. Im Juni 1901 besuchte Heller ein Sanatorium in Purkersdorf bei Wien, wo ihn nebst anderen Aerzten auch Professor Krafft-Ebing untersuchte und die Diagnose des Hausarztes bestätigte. Der Leidende war nicht mehr im

Stande literarisch zu arbeiten, aber er verbrachte den grössten Theil des Tages mit wissenschaftlicher Lectüre und las besonders gern in KANT's „Kritik der reinen Vernunft". Am 27. August 1902 wurde er zum erstenmal von jenen schrecklichen Krämpfen befallen, die eine Folge seines Leidens sind. Seither konnte er das Bett nicht mehr verlassen, und in den darauf folgenden Tagen wiederholten sich die Krämpfe, bis er am 4. September morgens halb acht Uhr verschied. Seine Gattin und drei erwachsene Söhne betrauern den zu früh Dahingeschiedenen.

Am 6. September halb vier Uhr versammelten sich HELLER's Angehörige und seine vielen Verehrer mit tiefbetrübtem Herzen in der Säulenhalle der Akademie, um dem Begräbnisse des Verblichenen beizuwohnen. An der Bahre würdigte COLOMAN v. SZILY, Generalsecretär der Akademie, die Verdienste seines dahingeschiedenen Collegen und Freundes.

HELLER hatte eine kleine, zarte Gestalt, aber schon aus seinen hellen funkelnden Augen konnte man den Geist und das ungewöhnliche Arbeitsvermögen ahnen, die in diesem Körper wohnten. Die Tagesstunden widmete er der Schule, den Bibliotheken, die er mit grösster Gewissenhaftigkeit leitete, und den Sitzungen der wissenschaftlichen Körperschaften, denen er angehörte. Die Zeit zum Studium und zu seiner schriftstellerischen Thätigkeit entzog er Jahrzehnte hindurch der nächtlichen Ruhe, bis die fortwährende Ueberanstrengung sich an ihm rächte.

HELLER's erste Arbeiten erschienen, als er Assistent an der technischen Hochschule war. Die Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft begründete eben im Jahre 1869 die populäre Zeitschrift „*Természettudományi Közlöny*", die so sehr zu dem wunderbaren Aufschwunge dieser Gesellschaft beigetragen hat. HELLER schrieb bereits in dem ersten Jahrgang vier Artikel, und blieb viele Jahre ein eifriger Mitarbeiter mit seinen Artikeln aus dem Gebiete der Akustik, Optik, Astronomie und Meteorologie, wie auch mit Nekrologen. Ebenfalls im Jahre 1869 schrieb HELLER der Ungarischen Akademie der Wissenschaften seine Mittheilung: „*Ueber eine Intensitätsmessung des Schalles*", die dann auch in POGGENDORFF's *Annalen* Bd. 141 erschien. In Bd. 142 derselben Annalen veröffentlichte er eine Arbeit, mit der er sich als Assistent KIRCHHOFF's beschäftigte: „*Ueber ein Barometer ohne Quecksilber*" (auch englisch im *Philosoph. Magazine*). Im Jahre 1876 gründeten einige Professoren der technischen Hochschule eine Zeitschrift aus dem Gebiete der exacten und der technischen Wissenschaften mit dem Titel „*Müegyetemi Lapok*" (Polytechnische Blätter). HELLER lieferte Recensionen über BESSEL's Abhandlungen und über ERDMANN's „*Die Axiome der Geometrie*" dem Journale, das leider nach drei Jahren einging. Auch andere Blätter brachten von ihm Recensionen, wie auch pädagogische und didaktische Artikel. Als 1893—1900 ein grosses ungarisches Conversationslexikon erschien, hat HELLER die Redaction des physikalischen Theiles übernommen, und die Biographieen der Physiker stammen darin alle aus seiner Feder. Auch eine Meteorologie und einige Lehrbücher sind von ihm erschienen.

Aber nicht in den erwähnten physikalischen Untersuchungen und den vielen Schriften, mit denen Heller der Schule und den kulturellen Bewegungen seines Vaterlandes diente, liegt Heller's Bedeutung, sondern in jenen Arbeiten, die sich am Grenzgebiete der Philosophie und der Naturwissenschaften bewegen, und die sich mit der Entwickelungsgeschichte der Physik beschäftigen.

Schon in sehr jungen Jahren brachte er der Philosophie grosses Interesse entgegen, und mit 18 Jahren schrieb er eine kleine Abhandlung: „*Apodiktisches und empirisches Wissen*", die aber nicht gedruckt wurde. Als gereifter Mann hat er seine Ideen in folgenden Abhandlungen niedergelegt: „*Ziele und Wege der modernen physikalischen Forschung*" (Humboldt I 2. 3), „*Aus wissenschaftlichen Grenzgebieten*" (Philosophiai szemle IV. 1.; Humboldt IV.), „*A XIX század physikai kutatásainak mozgató eszméiről*" (Ueber die bewegenden Ideen der physikalischen Forschungen des XIX. Jahrhunderts, Antrittsvortrag als corr. Mitglied der Ung. Akademie d. W.), „*Az energiatan alapjairól*" (Ueber die Grundlagen der Energielehre, Antrittsvortrag als ord. Mitglied ebendort) und in seiner letzten deutschen Abhandlung: „*Ueber die Aufgaben einer Geschichte der Physik*" (1899, in der *Festschrift* zu M. Cantor's 70. Geburtstage).

Heller's erste geschichtliche Abhandlung erschien im Jahre 1878 mit dem Titel: „Die St. Gerardsberger Sternwarte in Ofen" (Természettudományi Közlöny, Bd. X.; Literarische Berichte aus Ungarn, Bd. II).

Im nächsten Jahre hatte die Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft einen Preis für eine Geschichte der Physik ausgeschrieben. Diesen Preis gewann Heller im Januar 1881 mit seiner „*A physika története Aristotelestől Newtonig*". Ich war so glücklich eben damals ein Schüler Heller's zu sein und aus seinem anregenden Vortrage Interesse für exacte Wissenschaft und Hochachtung für ihre Heroen zu gewinnen. Die Stunde, an der wir dem preisgekrönten Professor unsere Glückwünsche als geringes Zeichen unserer Liebe überreichen konnten, ist uns allen eine freudevolle Erinnerung geblieben; Heller aber sollte auch den von uns bejubelten Erfolg nicht ohne Bitterkeit geniessen. Da seine Darstellung nur bis zum 17. Jahrhundert reichte, hat die Nat. Gesellschaft mit Zurücksetzung der preisgekrönten Arbeit eine andere bis Robert Mayer gehende Preisschrift von Aloys Czögler herausgegeben. Durch Vermittelung seines Freundes, des Augenarztes Prof. Dr. Wilhelm Goldzieher trat Heller später mit der Verlagsbuchhandlung Ferdinand Enke in Verbindung und im Jahre 1882 erschien der mit Galilei abschliessende erste Band der erweiterten deutschen Bearbeitung der „*Geschichte der Physik von Aristoteles bis auf die neueste Zeit*". Der zweite Band des nunmehr ergänzten Werkes, die Entwickelung der Physik von Descartes bis Robert Mayer enthaltend, erschien im Jahre 1884. Die Gründlichkeit, die höhere philosophische Auffassung und die klare Darstellung des Werkes hatte nun allgemeinen Beifall gefunden, und es wurden auch Verhandlungen wegen einer französischen und einer italienischen Ueber-

setzung eingeleitet, die aber beide ohne gegenseitige Uebereinstimmung der Parteien abgebrochen wurden.

Bald hernach wurde Heller von der Ungarischen Akademie d. W. aufgefordert, die „Entwicklungsgeschichte der Physik im XIX. Jahrhundert" zu schreiben, deren I. Band im Jahre 1891 in ungarischer Sprache erschien. Vom II. Bande sind 30 Bogen gedruckt, die mit der Erfindung der Spectralanalyse schliessen. Weiter konnte der Verfasser wegen seiner Erkrankung nicht gelangen.

Auch eine andere Hoffnung, die man an Heller knüpfte, konnte er nicht mehr erfüllen. Im Sommer 1899 wurde er von der Akademie d. W. in München mit der Abfassung des noch ausstehenden Bandes der Sammlung *„Geschichte der Wissenschaften in Deutschland"*, der die Geschichte der Physik enthalten wird, betraut. Das Buch sollte zwar in erster Linie den Antheil, den die Deutschen an der Entwickelung der Physik genommen, darstellen, aber doch stets die von aussen nach Deutschland eingeströmten Ideenzüge berücksichtigen, und auf diese Weise ein gewissermaassen vollständiges Bild der ganzen Entwickelung dieser Wissenschaft bieten. Es gewährte Heller dieser Auftrag eine grosse Genugthuung nach den vielen Zurücksetzungen, die er in seinem Leben erfahren hatte. Er verwandte auch alle freie Zeit, um dieser Aufgabe gerecht zu werden. Jedoch kaum war das Werk nach den nöthigen Vorarbeiten begonnen, verliessen ihn seine Kräfte, und mit Wehmuth sagte er oft: „Ich befürchte, ich werde meine Geschichte der Physik nicht vollenden."

Die Redaction der *Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn* hat Heller erst vor wenigen Jahren übernommen. Jedoch auch die kurze Zeit, die seither verflossen ist, genügte ihm zu einer wichtigen Aenderung. Indem er zu diesem früher in Budapest erschienenen Jahrbuche in Leipzig einen Verleger fand, ist es ihm gelungen die wissenschaftlichen Arbeiten seines Vaterlandes dem Auslande zugänglicher zu machen und damit die Berichte ihrem Zwecke näher zu führen.

Ehre dem Andenken des von uns *dahin* geschiedenen, wohin irdisches Wissen nicht reicht: *Nam causarum finalium inquisitio sterilis est et tanquam virgo Deo consecrata nihil parit* (Heller's Motto aus Bacon, De aug. scient. III. 5.).

Josef Kürschák.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillirenden Functionen A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. X. Band. In 3 Lieferungen. gr. 8. geh. 1. Lfg. [176 S.] 1901. n. *M.* 5.60. — 2. Lfg. [S. 177—400.] 1902. n. *M.* 7.60.

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. III Band. Von 1668—1758. 2. Aufl. Mit 147 in den Text gedruckten Fig. [X u. 923 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 25.60.

Cesàro, Ernesto, Vorlesungen über natürliche Geometrie. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. Gerhardt Kowalewski. Mit 24 in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 341 S.] gr. 8. 1901. In Leinwand geb. n. *M.* 12 —

Curtze, Maximilian, Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Abbildungen. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. *M.* 16.— II. Teil. [IV u. 291 S.] n. *M.* 14.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. *M.* 24.—

Darwin, G. H., Professor an der Universität Cambridge, Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von A. Pockels. Mit 43 Illustrationen im Text. [XXII u. 344 S.] 8. 1902. Eleg. geb. *M.* 6.80.

Dickson, L. E., Ph. D., Assistant Professor of Mathematics in the University of Chicago, linear Groups with an exposition of the Galois Field theory. [X u. 312 S.] gr. 8. 1901. [In englischer Sprache.] In Leinw. geb. n. *M.* 12.—

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. *M.* 3.—. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 5. Aufl. [IV u. 187 S.] 1903. II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. [X u. 186 S.] 1901.

Gleichen, A., Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Fig. im Text. [XIV u 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 20.—

Grassmann, H., gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Herausgegeben von Fr. Engel und J. Lüroth. Mit 51 Figuren im Text. [VIII u. 266 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. [16 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 1 —

Hammer, Dr. E., Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log}\frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10 (vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 3.60.

Hensel, K., und **G. Landsberg,** Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlr. Textfig. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. *M.* 28.—

Jahnke, E., Nachruf auf Ferdinand Caspary. Mit dem Bildnis F. Casparys, einem Verzeichnis seiner Abhandlungen sowie einem Briefe Ch. Hermites an H. Bertram. [30 S.] gr. 8. 1903. geh. n. *M.* 1.40.

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 10.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. I. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. [XVI u. 509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.—

Kübler, Baurat J. in Eßlingen, die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Gino, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberl am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithograph Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Lwd. geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines v. J. A. Ewing. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902 In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Neumann, C., über die Maxwell-Hertz'sche Theorie. Erste Abhdlg. Abhdlgn. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. XXVII. Bd No. II. Mit 3 Fig. 1901. geh. n. ℳ 3.50. — Zweite Abhdlg. XXVII. Bd. No. VIII. Mit 3 Fig. 1902. geh. n. ℳ 3.50. — Dritte Abhdlg. XXVIII. Bd. No. II. Mit 3 Fig. 1903. geh. n. ℳ 1.50.

Pascal, Ernst, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. gr. 8. In Leinwand geb I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] 1900. n. ℳ 10.— II. Teil: Die Geometrie. [X u. 712 S.] 1902. n. ℳ 12.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Sauerbeck, Dr. Paul, Professor am Gymnasium Reutlingen, Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven. Nach den Methoden von Jean Paul de Gua de Malves Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Mit 76 Abbildungen im Text [VI u. 166 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 8.—

Scheibner, W., zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, insbesondere über zweitheilige complexe Zahlen Erste Abhdlg. Abhdlgn. d. math.-phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. XXV. Bd No. VI. 1900. geh n. ℳ 1.80. Zweite Abhdlg. XXVII. Bd No. VII. Mit 2 Figuren 1902. geh. n. ℳ 3.50

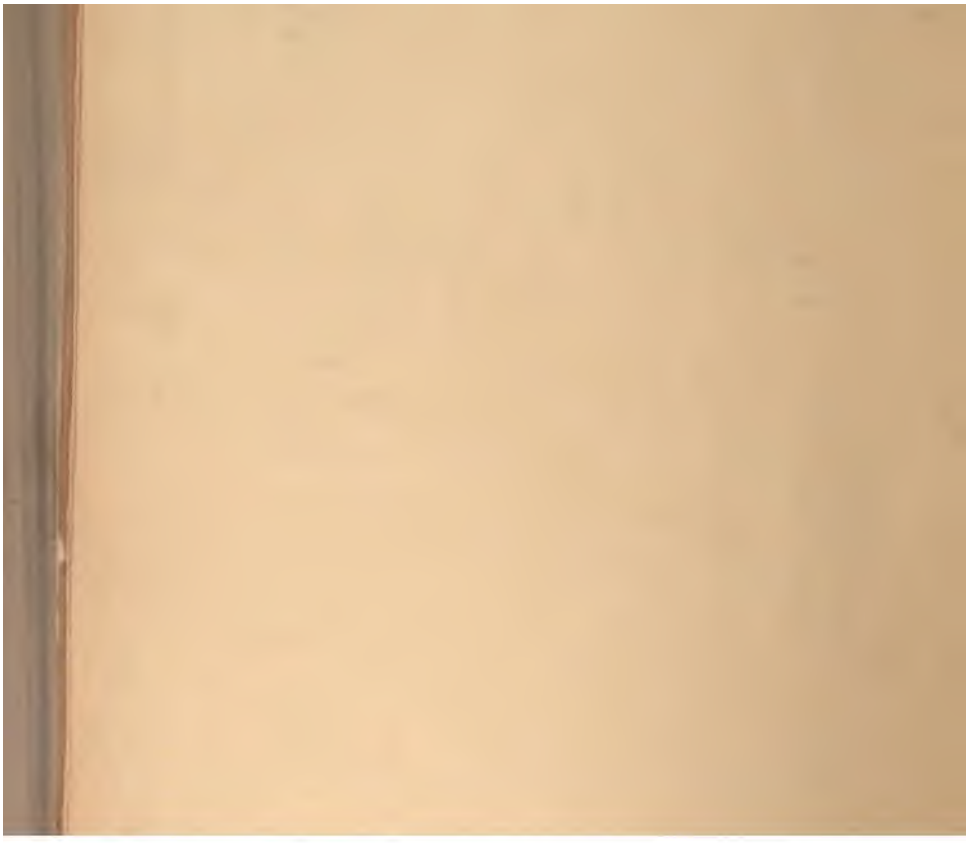
Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band: Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. Erster Jahrgang [IV u. 66 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 2.40.

Stolz, O., und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik. Zweite umgearbeitete Auflage ausgewählter Abschnitte der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. [XI u. 402 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 10.60

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 21.—, geb. n. ℳ 23.—

von Weber, Dr. **E.,** Privatdocent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwd. geb. n. ℳ 24.—



DEC 9 - 1938